CONSTANTES FÍSICAS

Celeridad de la luz	c	299 792 458†	metro s^{-1}
Carga fundamental	e	$4{,}803 \times 10^{-10}$	esu
		$1{,}602 \times 10^{-19}$	coulomb
Masa del electrón	m_e	$9{,}110 \times 10^{-28}$	gramo
Masa del protón	m_p	$1{,}673 \times 10^{-24}$	gramo
Número de Avogadro	N_0	$6{,}022 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	$1{,}381 \times 10^{-16}$	erg $kelvin^{-1}$
Constante de Planck	h	$6{,}626 \times 10^{-27}$	erg s
Constante de gravitación	G	$6{,}672 \times 10^{-8}$	$gramo^{-1}$ cm^3 s^{-2}
Momento magnético del electrón		$9{,}285 \times 10^{-21}$	erg $gauss^{-1}$
Momento magnético del protón		$1{,}411 \times 10^{-23}$	erg $gauss^{-1}$

† La asignación de este valor exacto a c constituye la nueva definición del metro, como se explicó en el apéndice E. Los valores de las otras constantes se han redondeado arbitrariamente a cuatro dígitos. Sin embargo, a excepción de la constante de gravitación G, todas las demás se han determinado experimentalmente con una precisión considerablemente mejor que esta.

electricidad y magnetismo

SEGUNDA EDICIÓN

electricidad y magnetismo

SEGUNDA EDICIÓN

berkeley physics course – volumen 2

La preparación de este curso fue realizada por el Educational Services Incorporated patrocinada por el National Science Foundation.

Edward M. Purcell

Gerhard Gade University Professor
Harvard University



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

Título de la obra original:
Berkeley Physics Course 2/e, Volume 2-Electricity and Magnetism

Edición original en lengua inglesa publicada por:
McGraw-Hill Book Company

Copyright © McGraw-Hill, Inc.

Versión española por:
Dr. Marcos Pujal Carrera
Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Tarrasa

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1988

4ª REIMPRESIÓN: MAYO DE 2001

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4319 - X
Depósito Legal: B - 19794 - 2001

Impreso por Domingraf Impressors
Pol. Ind. Can Magarola
08100 Mollet del Vallés (Barcelona)

Prólogo a la segunda edición del Volumen II

La revisión del volumen 2, «Electricidad y Magnetismo», del Curso de Física de Berkeley se ha hecho teniendo en cuenta tres amplios objetivos. Primero, he intentado hacer el texto más claro en muchos puntos. En los años de uso, profesores y alumnos han encontrado innumerables lugares donde para seguir sería más fácil la simplificación o la reorganización de una explicación. Indudablemente se habrán omitido algunas otras oportunidades para tales mejoras; no demasiadas, espero.

Un segundo objetivo era hacer el libro prácticamente independiente de los otros volúmenes del Curso de Física de Berkeley. Como se concibió originalmente, estaba intercalado entre el Volumen 1, que proporcionaba la necesaria Relatividad Restringida, y el Volumen 3, «Ondas y Oscilaciones», al que se asignó el tema de las ondas electromagnéticas. Ha resultado que el Volumen 2 se ha utilizado mucho independientemente. Como consecuencia de esto he efectuado ciertos cambios y adiciones. En el Apéndice A se incluye un resumen conciso de las relaciones de la Relatividad Restringida, aunque se supone cierto conocimiento previo de la Relatividad. Este resumen proporciona una referencia manejable y resumida de las ideas y fórmulas que necesitamos para comprender los campos de las cargas móviles y su transformación de una referencia a otra. El desarrollo de las ecuaciones de Maxwell para el vacío se ha trasladado del Capítulo 7, (acerca de la inducción), muy cargado, a un nuevo capítulo 9, donde con un tratamiento elemental conduce de manera natural a las ondas electromagnéticas planas, a la vez de propagación y estacionarias. La propagación de una onda en un medio dieléctrico se estudia en el Capítulo 10 en las cargas eléctricas en la materia.

Una tercera necesidad, modernizar el tratamiento de ciertos temas, era muy urgente en el capítulo de la conducción eléctrica. Una revisión sustancial del Capítulo 4 incluye ahora una sección de la física de los semiconductores homogéneos incluyendo semiconductores con impurezas. No se incluyen los dispositivos, ni siquiera el rectificador de unión, pero lo que se dice acerca de las bandas, dado-

res y aceptores puede servir como punto de partida para el desarrollo de tales temas por el profesor. Gracias a la electrónica del estado sólido, la física de las pilas voltaicas se ha hecho cada vez más importante en la vida diaria, tanto que el número de baterías en uso se acerca en orden de magnitud al de la población del mundo. En la primera edición de este libro imprudentemente se tomó como ejemplo el de una pila electrolítica —la típica Weston—, que los avances de la física pronto hicieron totalmente obsoleta. El párrafo correspondiente se ha sustituido por un análisis, con nuevos diagramas, del acumulador de plomo-ácido, omnipresente y lejos de volverse obsoleto.

Difícilmente podía esperarse que en la revisión de un texto elemental de electromagnetismo clásico, se tendrían que tener en cuenta los nuevos desarrollos de la física de las partículas. Pero es así en dos cuestiones que se discutieron en la primera edición: el significado de la cuantización de la carga, y la ausencia aparente de monopolos magnéticos. La observación de la desintegración del protón afectaría profundamente nuestro punto de vista en la primera cuestión. Investigaciones asiduas sobre este tema, y también sobre los monopolos magnéticos, hasta ahora no dan noticia de ningún suceso confirmado, pero la posibilidad de tales descubrimientos fundamentales permanece abierta.

En cortos apéndices se han introducido tres temas especiales, extensiones opcionales del texto: Apéndice B: Radiación de una carga acelerada; Apéndice C: Superconductividad; y Apéndice D: Resonancia magnética.

Nuestro principal sistema de unidades será el sistema de unidades SI. El diagrama en la contracubierta posterior resume las relaciones básicas entre los sistemas SI y CGS. No hay objeción a una unidad «mezcla» como el ohm-cm, a menudo aún usado para la resistividad, procurando que su significado sea perfectamente claro.

La definición del metro en función del valor asignado a la celeridad de la luz, que hace poco se ha hecho oficial, simplifica las relaciones exactas entre las unidades, como se explica brevemente en el Apéndice E.

Hay algo más de 300 problemas; aproximadamente la mitad son nuevos.

No es posible agradecer individualmente a todos los profesores y alumnos que han hecho buenas sugerencias sobre cambios y correcciones. Temo que algunos quedarán defraudados al hallar que sus sugerencias no se han seguido completamente como ellos deseaban. El resultado final es una mejora sustancial, la cual espero que los lectores familiarizados con la primera edición agradecerán. Seguramente se encontrarán desaciertos a la vez antiguos y nuevos. Las comunicaciones indicándolos serán bien recibidas.

Es un placer agradecer a Olive S. Rand su paciente y cuidadosa ayuda en la producción del manuscrito.

EDWARD M. PURCELL

Prólogo a la primera edición del Volumen II

La materia de este Curso de Física de Berkeley es la electricidad y el magnetismo. La secuencia de conceptos, en líneas generales, no es nueva: electrostática, corrientes estacionarias, campo magnético, inducción electromagnética, polarización eléctrica y polarización magnética en la materia. Sin embargo, los puntos de vista son diferentes de los tradicionales. La diferencia es más notable en los capítulos 5 y 6 donde, con base en lo tratado en el Vol I, consideramos los campos eléctricos y magnéticos de las cargas móviles como manifestaciones de la relatividad y la invariancia de la carga eléctrica. Este punto de vista enfoca la atención sobre algunas cuestiones fundamentales tales como: conservación de la carga, invariancia de la carga, significado del campo. El único aparato formal de la relatividad restringida, que es realmente necesario, es la transformación de Lorentz de las coordenadas y la fórmula de la suma de velocidades. Pero, es esencial que el estudiante aporte a esta parte del curso algunas de las ideas y posturas que el Vol. I procuró desarrollar — entre ellas una disposición a considerar las cosas desde distintos sistemas de referencia, una apreciación de la invariancia, y una atención a los argumentos de simetría. También haremos mucho uso, en el Vol. II, de razonamientos basados en la superposición.

Nuestra manera de ver los fenómenos eléctricos y magnéticos en la materia es principalmente « microscópica » subrayando la naturaleza de los dipolos atómicos y moleculares, tanto eléctricos como magnéticos. La conducción eléctrica, también se describe microscópicamente siguiendo un modelo de Drude-Lorentz. Naturalmente, algunas cuestiones quedan por decidir hasta que el estudiante estudie la física cuántica en el Vol. IV. Pero hablamos libremente de una manera natural de moléculas y átomos como estructuras eléctricas con tamaño y forma y, premiosamente, de órbitas electrónicas y spin. Procuramos tratar cuidadosamente una cuestión que a menudo se evita y a veces se oculta en textos de introducción: el significado de los campos macroscópicos **E** y **B** dentro de un material.

En el Vol II, el bagaje matemático del alumno se extiende al añadirle algunas herramientas de cálculo vectorial — gradiente, divergencia, rotacional y Laplaciana. Estos conceptos se desarrollan, a medida que se necesitan, en los primeros capítulos.

En sus versiones preliminares, el Vol. II se ha usado en varias clases en la Universidad de California. Se ha beneficiado del juicio crítico de algunas personas conectadas con el Curso de Berkeley, especialmente de las contribuciones de E. D. Commins y F. S. Crawford, Jr., que explicaron las primeras clases que utilizaron el texto. Ellos y sus alumnos encontraron numerosos puntos donde se necesitaban aclaraciones o algo más radical; algunas de las revisiones se basaron en estas sugerencias. El juicio crítico de los estudiantes de la última versión preliminar fueron recogidos por Robert Goren, quien también ayudó a organizar los problemas. Críticas valiosas han venido también de J. D. Gavenda que usó la versión preliminar en la Universidad de Texas, y de E. F. Taylor, de la Universidad de Wesleyan. Alan Kaufman contribuyó con sus ideas en la primera etapa de la redacción. A. Felzer trabajó en la primera parte del bosquejo como nuestro primer « estudiante de prueba ».

El desarrollo de esta versión de electricidad y magnetismo fue alentada, no solamente por nuestro Comité del Curso original, sino también por colegas activos en un desarrollo tal vez paralelo del material de un nuevo curso en el Massachusetts Institut of Technology. Entre los últimos, J. T. Tessman, del M. I. T. Science Teaching Center y la Universidad de Tufts, fue especialmente útil e influyente en la primitiva formulación de la estrategia. Ha usado la primitiva versión en clase, en el M. I. T. y su lectura crítica del texto completo ha redundado en muchos cambios y correcciones.

La publicación de la versión preliminar, con sus revisiones sucesivas, fue supervisada por la Sra. Mary R. Maloney. La Sra. Lila Lowell mecanografió la mayor parte del manuscrito. Las ilustraciones las puso en su forma final Felix Cooper.

El autor de este volumen está profundamente agradecido a sus amigos de Berkeley y principalmente a Charles Kittel, por el estímulo y constante ánimo que han hecho agradable la larga tarea.

E. M. PURCELL

Prólogo al Berkeley Physics Course

Éste es un curso de física de dos años, a nivel intermedio, para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La intención de los autores ha sido presentar la física tan elemental como sea posible, de la misma forma que la usan los físicos en la primera línea de su campo. Hemos pretendido hacer un curso que subraye vigorosamente los fundamentos de la física. Nuestros objetivos específicos fueron introducir coherentemente, en una sucesión elemental, las ideas de la relatividad restringida, de la física cuántica y de la física estadística.

Este curso está pensado para estudiantes que hayan pasado por un curso de física en el bachillerato. Al mismo tiempo que este curso, debería seguirse un curso de matemáticas, incluyendo cálculo.

Actualmente, existen en los Estados Unidos varios nuevos cursos de física intermedia en desarrollo. La idea de hacer un nuevo curso ha surgido de varios físicos afectados por las necesidades del progreso de la ciencia y de la ingeniería a la vez que intensificar la ciencia en los centros de grado medio y superior. Nuestro propio curso se concibió en una conversación entre Philip Morrison de la Universidad de Cornell y C. Kittel a finales de 1961. Nos animaron John Mays y sus colegas de la National Science Foundation, y Walter C. Michels, entonces Presidente de la Comisión en College Physics. Un comité informal se creó para guiar este curso desde sus etapas iniciales. El comité original constaba de Luis Álvarez, William B. Fretter, Charles Kittel, Walter D. Knight, Philip Morrison, Edward M. Purcell, Malvin A. Ruderman y Jerrold R. Zacharias. La primera reunión del comité fue en mayo de 1962, en Berkeley; entonces se trazó un bosquejo provisional de un curso de física completamente nuevo. Debido a importantes obligaciones de varios de los miembros originales, el comité se reorganizó parcialmente en enero de 1964, y ahora consta de los consignados más adelante. Las contribuciones de otros se agradecen en los prólogos de cada uno de los volúmenes.

El esquema provisional y su espíritu asociado tuvieron una gran influencia en el curso producido finalmente. El esquema cubría en

detalle los conceptos y actitudes que creíamos podían y debían enseñarse a unos estudiantes que empezaban sus estudios superiores de ciencias e ingeniería. Nunca fue nuestra intención desarrollar un curso limitado a estudiantes excepcionales ni a los alumnos en posición avanzada. Hemos procurado presentar los principios de la física desde puntos de vista modernos y unificados, y partes del curso pueden por tanto parecer casi tan nuevas al profesor como a los alumnos.

Los cinco volúmenes del curso, tal como se planificó, constarán de:

I. Mecánica (Kittel, Knight, Ruderman)
II. Electricidad y Magnetismo (Purcell)
III. Ondas y oscilaciones (Crawford)
IV. Física cuántica (Wichmann)
V. Física estadística (Reif)

Los autores de cada volumen han tenido la libertad de escoger el estilo y método de presentación que les ha parecido apropiado a su tema.

La actividad inicial del curso condujo a Alan M. Portis a diseñar una nueva física elemental de laboratorio, ahora conocida por Física de Laboratorio de Berkeley. Debido a que el curso subraya los principios de la física, algunos profesores pueden tener la sensación de que no se trata suficientemente de la física experimental. El laboratorio está sobrado de experimentos importantes y está proyectado para complementar el curso.

La asistencia financiera al desarrollo del curso vino de la National Science Foundation, con considerable aportación indirecta de la Universidad de California. Los fondos los administró la Educational Services Incorporated, una organización desinteresada establecida para administrar los sucesivos programas de mejora. Estamos en deuda, muy particularmente, con Gilbert Oakley, James Aldrich, y William Jones, todos del ESI, por su simpático y vigoroso apoyo. El ESI estableció en Berkeley una oficina bajo la competente dirección de la Sra. Mary R. Maloney para ayudar al desarrollo del curso y del laboratorio. La Universidad de California no tiene conexión oficial con nuestro programa, pero nos ha ayudado de forma importante. Por esta ayuda, agradecemos en particular a los directores sucesivos del Departamento de Física, August C. Helmholtz y Burton J. Moyer; al claustro y miembros no académicos del Departamento; Donald Coney, y muchos otros de la Universidad. Abraham Olshen nos ayudó mucho en los primeros problemas de organización.

Las correcciones y sugerencias serán siempre bien recibidas.

Eugene D. Commins
Frank S. Crawford, Jr.
Walter D. Knight
Philip Morrison
Alan M. Portis
Edward M. Purcell
Frederick Reif
Malvin A. Ruderman
Eyvind H. Wichmann
Charles Kittel, *Director*

Berkeley, California

Índice analítico

1

Electrostática: cargas y campos

1.1 Carga eléctrica

La electricidad apareció a sus primeros investigadores como un fenómeno extraordinario. Sacar de los cuerpos el *fuego sutil*, como se llamó en otro tiempo, conducir un cuerpo a un estado muy electrizado, producir un flujo estacionario de corriente, requería medios ingeniosos. Exceptuando el espectáculo de un relámpago, las manifestaciones corrientes de la naturaleza, desde la congelación del agua al crecimiento de un árbol, no parecían tener relación con el curioso comportamiento de los cuerpos electrizados. Actualmente sabemos que las fuerzas eléctricas determinan en gran parte las propiedades físicas y químicas de la materia en todo el dominio desde el átomo a la célula viva. Por este conocimiento, tenemos que agradecer, tanto a los científicos del siglo XIX, Ampère, Faraday, Maxwell, y algunos otros, quienes descubrieron la naturaleza del electromagnetismo, como a los físicos y químicos del siglo veinte los cuales explicaron la estructura atómica de la materia.

El electromagnetismo clásico trata de las cargas y corrientes eléctricas y sus interacciones, como si todas las magnitudes que intervienen pudieran medirse independientemente con precisión ilimitada. En este caso, *clásico* sólo significa « no-cuántico ». En la teoría clásica del electromagnetismo se ignora la ley cuántica con su constante h, tal como ocurre en la mecánica ordinaria. En realidad la teoría clásica había llegado casi a su estado presente de desarrollo antes del descubrimiento de Planck. Ha sobrevivido extraordinariamente. Ni la revolución de la física cuántica ni el desarrollo de la relatividad restringida empañaron el esplendor de las ecuaciones del campo electromagnético que Maxwell consignó hace unos cien años.

Desde luego, la teoría estaba sólidamente basada en la experiencia, y a causa de ello estaba bien firme dentro de su ámbito original de aplicaciones — para bobinas, condensadores, corrientes oscilantes, llegando hasta las ondas de radio y ondas luminosas. Pero incluso un éxito tan grande no permite asegurar su validez en otro dominio, por ejemplo, en el interior de una molécula.

Dos hechos ayudan a explicar la persistente importancia en la física moderna de la descripción clásica del electromagnetismo. Primero, la relatividad restringida no requería revisión del electromagnetismo clásico. Históricamente hablando, la relatividad restringida *surgió* de la teoría electromagnética clásica y de experimentos inspirados por ella. Las ecuaciones de Maxwell, desarrolladas mucho antes que los trabajos de Lorentz y Einstein, demostraron ser totalmente compatibles con la relatividad. Segundo, las modificaciones cuánticas resultan ser poco importantes hasta distancias menores que 10^{-10} cm, un centenar de veces menor que el átomo. Podemos explicar la repulsión y atracción de partículas en el átomo utilizando las mismas leyes que aplicamos a las hojas de un electroscopio, aunque necesitamos la mecánica cuántica para predecir cómo se comportarán las partículas bajo la acción de aquellas fuerzas. Para distancias aún

más pequeñas, hay una fusión afortunada de la teoría electromagnética y la teoría cuántica, llamada *electrodinámica cuántica*, la cual parece estar de acuerdo con la experiencia para las distancias más pequeñas exploradas hasta ahora.

Suponemos al lector familiarizado con los hechos elementales de la electricidad. No vamos a examinar todos los experimentos que pusieron de manifiesto la existencia de la carga eléctrica, o la evidencia de la constitución eléctrica de la materia. Por otro lado, necesitamos examinar cuidadosamente los fundamentos experimentales de las leyes básicas de los cuales dependen todos los otros. En este capítulo estudiaremos la física de las cargas eléctricas estacionarias: la *electrostática*.

Sin duda una propiedad fundamental de la carga eléctrica es su existencia en las dos variedades que desde hace tiempo se llaman positiva y negativa. El hecho observado es que todas las partículas cargadas pueden dividirse en dos clases tales que todos los miembros de una clase se repelen entre sí, mientras que atraen a los miembros de la otra clase. Si dos cuerpos pequeños A y B cargados eléctricamente, separados cierta distancia, se atraen entre sí, y si A atrae a un tercer cuerpo electrizado C, siempre encontraremos que B repele a C. Esto contrasta con la gravitación: solamente existe una sola clase de masa gravitatoria, y toda masa atrae a cualquier otra.

Pueden considerarse las dos clases de carga, positiva y negativa como manifestaciones opuestas de cierta cualidad, tal como *derecha* e *izquierda* son dos clases de «mano». En realidad en la física de las partículas elementales, las cuestiones donde interviene el signo de la carga a veces están ligadas a cuestiones de «mano», y para otra simetría básica, la relación de una secuencia de sucesos, *a* luego *b*, luego *c*, a la secuencia inversa temporalmente *c*, luego *b*, luego *a*. Lo que ahora nos interesa es la dualidad de la carga eléctrica. Para cada clase de partícula en la naturaleza, como hasta ahora conocemos, puede existir una ***antipartícula***, una especie de «imagen especular» eléctrica. La antipartícula lleva carga de signo opuesto. Si cualquier otra cualidad intrínseca de la partícula tiene un opuesto, la antipartícula igualmente la tiene, mientras que en una propiedad que no admite opuesto, tal como la masa, la antipartícula y la partícula son exactamente iguales. La carga del electrón es negativa; su antipartícula, llamada ***positrón***, tiene carga positiva, pero su masa es precisamente la misma que la del electrón. La antipartícula del protón se llama simplemente ***antiprotón***; su carga eléctrica es negativa. Un electrón y un protón se combinan para formar un átomo de hidrógeno ordinario. Un positrón y un antiprotón podrían combinarse de la misma manera para formar un átomo de antihidrógeno. Dando los materiales de construcción positrones, antiprotones y antineutrones*, puede construirse el conjunto de la antimateria, desde el antihidrógeno a las antigalaxias. Por supuesto que hay una dificultad práctica.

---

* Aunque la carga eléctrica es nula, el neutrón y su antipartícula no son intercambiables. Ciertas propiedades, que aquí no nos interesan, son opuestas.

Si el positrón se encuentra con un electrón, o un antiprotón encuentra un protón, este par de partículas se desvanece rápidamente en un estallido de radiación. Por esto no es sorprendente que incluso positrones y antiprotones, sin hablar de antiátomos, son extraordinariamente raros y de corta vida en nuestro mundo. Quizá el universo contenga, en alguna parte, una vasta concentración de antimateria. Si es así, su paradero es un misterio cosmológico.

El universo en torno nuestro consta abrumadoramente de materia, no de antimateria. Así que digamos que los portadores abundantes de carga negativa son electrones, y los portadores abundantes de carga positiva son protones. El protón es, aproximadamente, 2000 veces más pesado que el electrón y muy diferente, además, en algunos otros aspectos. Así que la materia a nivel atómico incorpora electricidad negativa y positiva de maneras completamente diferentes. La carga positiva está toda en el núcleo atómico, limitada dentro de una estructura maciza de tamaño no superior a los 10^{-12} cm, mientras que la carga negativa está dispersa a lo largo de una región de dimensiones cerca de 10^4 veces mayor. Es difícil imaginar que átomos y moléculas —en toda la química— serían iguales si no fuese por esta asimetría eléctrica fundamental de la materia.

La carga que llamamos negativa lo mismo también podíamos haberla llamado positiva. El nombre fue un accidente histórico. No hay nada esencialmente negativo en la carga de un electrón. No es como un entero negativo. Un entero negativo, una vez se ha definido la multiplicación, difiere esencialmente de un entero positivo en que su cuadrado es un entero de signo opuesto. Pero el producto de dos cargas no es una carga; no hay comparación.

Otras dos propiedades observadas de la carga eléctrica son esenciales en la estructura eléctrica de la materia: la carga se *conserva* y la carga está *cuantizada*. Estas propiedades implican *cantidad* de carga, y así entraña una medida de la carga. En breve indicaremos cómo pueden medirse las cargas situadas a cierta distancia en función de la fuerza entre ellas. Pero tomemos esto de momento como convenio, con lo que podemos hablar libremente acerca de estos hechos fundamentales.

Fig. 1.1 Se crean a pares partículas cargadas, con cargas iguales y opuestas.

1.2 Conservación de la carga

La carga total en un sistema aislado nunca varía. Entendemos por sistema *aislado* aquél en donde no está permitido que la materia atraviese sus límites. Podríamos dejar entrar o salir luz del sistema sin afectar el principio, ya que los fotones no transportan carga. Por ejemplo, una caja situada en el vacío, de paredes delgadas, expuesta a rayos gamma, podría ser el escenario de la « creación de un par » suceso en el cual un fotón de alta energía termina su existencia con la creación de un electrón negativo y un electrón positivo (Fig. 1.1). Se han creado dos partículas cargadas eléctricamente pero la variación de la carga total dentro y en la caja es nula. Un hecho que infringiría la ley que acabamos de establecer sería la creación de una partícula

cargada positivamente *sin* la simultánea creación de una partícula cargada negativamente. Tal acontecimiento no se ha observado nunca.

Por supuesto, si las cargas eléctricas del electrón y del positrón no fueran exactamente iguales en magnitud la creación del par violaría la ley estricta de la conservación de la carga. También se determina experimentalmente que sus cargas *son* iguales. Una prueba experimental interesante la proporciona la estructura llamada *positronio*, una estructura compuesta nada más que por un electrón y un positrón. Este curioso « átomo » puede existir lo suficiente — algo así como una décima de microsegundo — para que pueda estudiarse con detalle. Se comporta como si fuese completamente neutro. Actualmente, la mayoría de físicos se mostrarían estupefactos, por no decir incrédulos, si se hallara *alguna* diferencia en las magnitudes de estas cargas, pues sabemos que el electrón y el positrón están relacionados entre sí como *partícula* a *antipartícula*. Su exacta igualdad de carga, como su igualdad de masa, son la manifestación de una evidente simetría universal en la naturaleza, la dualidad partícula-antipartícula. Podríamos preguntarnos si la conservación de la carga es meramente un corolario de alguna ley más amplia de conservación que rigiera la creación y aniquilación de las partículas; o si la conservación de la carga es un requerimiento primario, con el cual las otras leyes tienen que caer dentro de sus límites. O si tienen sentido estas cuestiones. No lo sabemos con toda seguridad.

Una cosa se aclarará en el curso de nuestro estudio del electromagnetismo: la no conservación de la carga sería incompatible con la estructura de nuestra teoría electromagnética actual. Por esto podemos establecer la *ley de conservación de la carga* como postulado de la teoría o como ley empírica confirmada sin excepción por todas las observaciones realizadas hasta ahora:

La carga eléctrica total en un sistema aislado, es decir, la suma algebraica de la carga positiva y negativa presente en cierto instante, no varía nunca.

Tarde o temprano deberemos preguntar si esta ley satisface la prueba de la invariancia relativista. Pospondremos hasta el Cap. 5 el estudio completo de esta importante cuestión. Sin embargo, la contestación es que la satisface, y no simplemente en el sentido que lo establecido anteriormente se cumple en cualquier sistema de referencia inercial, sino en el sentido más firme que observadores en diferentes sistemas de referencia, midiendo la carga, obtienen el mismo número. En otras palabras, la carga eléctrica total de un sistema aislado es un número relativísticamente invariante.

1.3 Cuantización de la carga

Las cargas eléctricas que hallamos en la naturaleza son múltiplos de solamente una magnitud, igual a la carga que lleva el electrón. Denotamos la magnitud de esta carga por e. (Cuando debamos tener en cuenta el signo, escribiremos $-e$ para la carga del mismo

electrón.) Ya hemos señalado que la carga que lleva el positrón es precisamente ésta. Como debe conservarse la carga, cuando un electrón y un positrón se aniquilan no dejan nada salvo luz. Lo que parece más notable es la evidente igualdad de las cargas que llevan otras partículas cargadas —la igualdad, por ejemplo, de la carga positiva en el protón y la negativa en el electrón.

Esta particular igualdad es fácil comprobarla experimentalmente. Podemos ver si la carga neta en una molécula de hidrógeno, que consta de dos protones y dos electrones, es nula. En un experimento realizado por J. G. King* se comprimió gas hidrógeno en un tanque perfectamente aislado. El tanque contenía unas 5×10^{24} moléculas (aproximadamente 17 gramos) de hidrógeno. Se dejaba escapar el gas del recipiente de manera que se impidiera la fuga de cualquier ion (una molécula con un electrón omitido o un electrón suplementario asignado). Si la carga del electrón difiriera de la del protón en, por ejemplo, una parte en 10^9, cada molécula de hidrógeno tendría una carga de $2 \times 10^{-9}e$, y la salida de toda la masa de hidrógeno alteraría la carga del tanque en $10^{16}e$, un efecto gigantesco. En realidad, el experimento podría haber revelado una cantidad residual tan pequeña como $2 \times 10^{-20}e$, y nada se observó. Esto prueba que el protón y el electrón no difieren en el valor de la carga en más del uno por 10^{20}.

Quizá la igualdad es realmente *exacta* por alguna razón que hasta ahora no comprendemos. Puede conectarse con la posibilidad, sugerida por recientes teorías, que un protón puede, *muy* raramente, desintegrarse en un positrón y cierta partícula neutra. Si esto ocurriera, incluso la más ligera discrepancia entre la carga del protón y la del positrón violaría la conservación de la carga. Varios experimentos diseñados para detectar la desintegración del protón, no han registrado con certeza una sola desintegración hasta ahora; esto está escrito en 1983.

Si esto se llega a observar, y se demuestra la exacta igualdad del valor de la carga del protón y la del electrón (la antipartícula del positrón) podrá considerarse como un corolario de la ley más general de la conservación de la carga.

Sin embargo, ahora existe abrumadora evidencia de que la estructura *interna* de todas las partículas que interactúan fuertemente llamadas *hadrones* —una clase que incluye el protón y el neutrón— implican unidades básicas llamadas *quarks,* cuyas cargas eléctricas son múltiplos de $e/3$. El protón, por ejemplo, está constituido por tres quarks, dos de carga $2e/3$ y uno con carga $-1e/3$. El neutrón contiene un quark de carga $2e/3$ y dos quarks con carga $-1e/3$.

Varios experimentadores han buscado quarks aislados, tanto libres como ligados a la materia ordinaria. La carga fraccionaria de

---

* J. G. King, *Phys. Rev. Letters* **5**, 562 (1960). Se hallarán referencias, para pruebas previas de igualdad de carga, en este artículo y en el capítulo de V. W. Hughes en *Gravitation and Relativity,* editado por H. Y. Chiu y W. F. Hoffman (W. A. Benjamin, Inc., Nueva York, 1964), cap. 13.

tales quarks, ya que no puede neutralizarse con ningún número de electrones o protones, traicionaría la presencia de los quarks. Hasta ahora, no se han identificado de manera concluyente partículas con carga fraccionaria. Hay bases teóricas para sospechar que la liberación de un quark de un hadrón es imposible, pero la cuestión, hasta ahora, permanece abierta.

Por descontado, la cuantización de la carga sale fuera del radio de acción del electromagnetismo clásico. Generalmente lo ignoraremos, y actuaremos como si nuestra carga puntiforme q pueda tener cualquier valor. Esto no causará perturbación alguna. Sin embargo, es importante recordar que no podemos esperar que la teoría clásica explique la estructura de las partículas elementales. (No es cierto que la teoría cuántica actual lo pueda!) Lo que mantiene unido al electrón es tan misterioso como lo que fija el valor preciso de su carga. Deben considerarse algo más que las fuerzas eléctricas, para las fuerzas electrostáticas entre las distintas partes del electrón, que serían repulsivas.

En nuestro estudio de la electricidad y magnetismo consideraremos las partículas cargadas simplemente como portadores de cargas, con dimensiones tan pequeñas que su tamaño y estructura es, en la mayoría de los casos, insignificante. En el caso del protón, por ejemplo, sabemos a partir de los experimentos de difusión de alta energía que la carga eléctrica no se manifiesta apreciablemente más allá de un radio de 10^{-15} m. Sabemos del análisis de Rutherford acerca de la difusión de partículas alfa que incluso los núcleos pesados tienen su carga eléctrica distribuida en una región inferior a 10^{-13} m. Para el físico del siglo diecinueve, una «carga puntiforme» era una noción abstracta. Hoy en día estamos familiarizados con las partículas atómicas. La naturaleza granular de la electricidad es tan conspicua en nuestra descripción moderna de la naturaleza que encontramos que una carga puntiforme es una idealización menos artificial que una distribución continua variable de la densidad de carga. Cuando postulamos tales distribuciones continuas de carga podemos considerarlas como valores medios de un gran número de cargas elementales de la misma forma que podemos definir la densidad macroscópica de un líquido a pesar de su discontinuidad a escala molecular. En los cuerpos mucho mayores que las gotas de aceite de Millikan la cuantización de la carga no es apreciable.

1.4 Ley de Coulomb

Sabido es que la interacción entre cargas eléctricas en reposo se explica por la ley de Coulomb: Dos cargas eléctricas estacionarias se repelen o atraen entre sí con una fuerza proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional a su distancia mutua.

Podemos expresarla abreviadamente en forma vectorial:

$$\mathbf{F}_2 = k\frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}{}^2} \qquad (1)$$

Aquí q_1 y q_2 son números (escalares) que dan el valor y signo de las cargas respectivas, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ es el vector unitario en la dirección * de la carga 1 a la carga 2, y $\mathbf{F}_2$ es la fuerza que actúa sobre la carga 2. Así pues la Ec. (1) expresa, entre otras cosas, el hecho de que cargas iguales se repelen y las distintas se atraen, y que la fuerza es Newtoniana; es decir, $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ indica que la fuerza es paralela a la recta que une las cargas. No podría ser de otro modo a menos que el mismo espacio tenga alguna propiedad direccional constitucional, pues dos cargas puntiformes solitarias en un espacio vacío e isótropo, no podrían particularizar ninguna otra dirección.

Si la «carga puntiforme» tuviese cierta estructura interna, con un eje definiendo una dirección, tendría que determinarse por algo más que una simple magnitud escalar q. Es cierto que algunas partículas elementales, incluido el electrón, poseen otra propiedad, llamada *spin*. Éste da lugar a una fuerza magnética entre dos electrones, sumada a su repulsión electrostática. Esta fuerza magnética, en general, no actúa en la dirección de la línea que une las dos partículas. Disminuye con el inverso de la cuarta potencia de la distancia, y a distancias atómicas de unos 10^{-8} cm la fuerza de Coulomb es alrededor de 10^4 más fuerte que la interacción magnética de los spins. Si las cargas se mueven aparece otra fuerza magnética —de aquí la restricción a cargas estacionarias en nuestra exposición de la ley de Coulomb—. Volveremos a estos fenómenos magnéticos en capítulos posteriores.

Al escribir la Ec. 1 suponemos que ambas cargas están bien localizadas, ocupando pequeñas regiones comparadas con r_{21}; si no es así, r_{21} no puede definirse con precisión.

El valor de la constante k en la Ec. 1 depende del sistema de unidades en las que se expresen r, $\mathbf{F}$ y q. En el SI r se mide en metros, $\mathbf{F}$ en newton y la carga q en coulomb. El metro y el newton son unidades básicas, pero el coulomb es unidad derivada, 1 coulomb = 1 ampere × segundo. En función de las unidades básicas k vendrá en función de m, N y A. No obstante, se prefiere escribir $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ (sistema racionalizado) con lo que la Ec. 1 se escribe

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{21}}{r_{21}^2} \tag{1'}$$

Si queremos expresar ε_0 en función de m, N, A deberemos tener en cuenta la Ec. 7 del capítulo 6 (6.1, pág. 205), en donde se da la fuerza entre conductores paralelos en las condiciones precisas para la definición del ampere. En esta ecuación aparece la constante μ_0 que en la XI C.G.P.M. (1960) se acordó tomar $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m y de aquí la definición de ampere.

Ahora bien, en el estudio de las ondas electromagnéticas, capítulo 9, veremos que $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, siendo c la celeridad de la luz en el

---

* El convenio adoptado puede no parecer natural, pero está más de acuerdo con el uso en otras partes de la física y procuraremos seguirlo en este libro.

vacío, con lo que $\varepsilon_0 = 1/4\pi \times 10^{-7}c^2$. En el Apéndice E se da el valor exacto de ε_0; para nuestros fines son suficientemente precisas las relaciones $k = 9 \times 10^9$ y $\varepsilon_0 = 1/36\pi \times 10^9 c^2/N \times m^2$, en donde hemos tomado el valor aproximado de $c = 3 \times 10^8$ m/s.

El único medio que tenemos de detectar y medir cargas eléctricas es observar la interacción de cuerpos cargados. Podría preguntarse qué parte del contenido manifiesto de la ley de Coulomb es realmente sólo definición. Como ella establece, el significado físico es la expresión de la dependencia inversa del cuadrado y la deducción de que la carga eléctrica es *aditiva* en su efecto. Para poner de relieve esto último debemos considerar *más* de dos cargas. Puesto que si en el mundo existieran solamente dos cargas q_1 y q_2 con las que experimentar, nunca podríamos medirlas por separado. Unicamente podríamos comprobar que F es proporcional a $1/r_2{}^2$. Supongamos que tenemos *tres* cuerpos que poseen las cargas q_1, q_2 y q_3. Podemos medir la fuerza sobre q_1 cuando q_2 está a 10 cm de q_1 y q_3 está muy lejos, como en la Fig. 1.3*a*. A continuación podemos alejar q_2 y poner en su lugar a q_3 y medir de nuevo la fuerza sobre q_1. Finalmente colocamos q_2 y q_3 muy próximas entre sí y a una distancia de 10 cm de q_1. Midiendo la fuerza sobre q_1 vemos que es igual a la suma de las fuerzas previamente medidas. Este importante resultado, no podía predecirse por razonamientos lógicos a partir de la simetría, como hemos hecho anteriormente para demostrar que la fuerza entre dos cargas puntiformes *tiene* que estar situada a lo largo de la recta que las une. *La fuerza con la cual dos cargas interaccionan no se modifica por la presencia de una tercera carga.*

Sea cual fuere el número de cargas presentes en nuestro sistema, la ley de Coulomb (Ec. 1) puede utilizarse para calcular la interacción de cada par. Esto es la base de un principio de *superposición* el cual invocaremos muchas veces en nuestro estudio del electromagnetismo. La superposición significa combinar dos conjuntos de manantiales en un sistema añadiendo el segundo « sobre » el primero sin alterar su configuración. Este principio afirma que la fuerza sobre una carga colocada en un punto del sistema combinado será la suma vectorial de las fuerzas que cada conjunto de cargas, actuando por separado, ocasiona al actuar sobre la carga colocada en tal punto. Este principio no debe darse por supuesto a la ligera. Puede muy bien existir un dominio de fenómenos, donde intervengan distancias muy pequeñas o fuerzas muy intensas, en donde *no se cumpla* la superposición. En realidad, sabemos que los fenómenos cuánticos en el campo electromagnético representan un fracaso de la superposición, considerada desde el punto de vista de la teoría clásica.

Así pues la física de las interacciones eléctricas se presenta en completa perspectiva solamente cuando tenemos *más* de dos cargas. Podemos ir más allá de lo establecido explícitamente en la Ec. 1 y afirmar que con las tres cargas de la Fig. 1.3 ocupando posiciones cualesquiera, la fuerza sobre una de ellas, por ejemplo, la q_3, está dada correctamente por esta ecuación:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{k q_3 q_1 \hat{\mathbf{r}}_{31}}{r_{31}{}^2} + \frac{k q_3 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{32}}{r_{32}{}^2} \qquad (2)$$

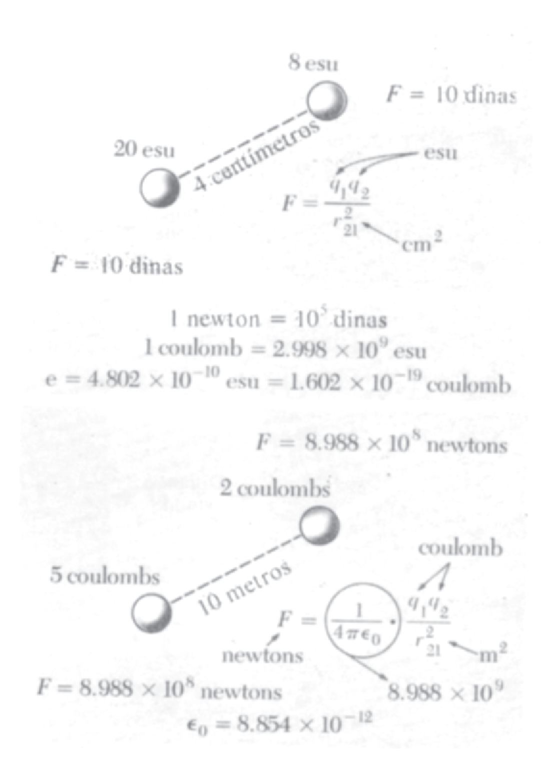


Fig. 1.2 La ley de Coulomb expresada en unidades SI. La constante ε_0 implica la celeridad de la luz, como veremos más adelante. En la figura hemos redondeado el valor de las constantes a 4 dígitos. En el Apéndice E se dan los valores precisos.

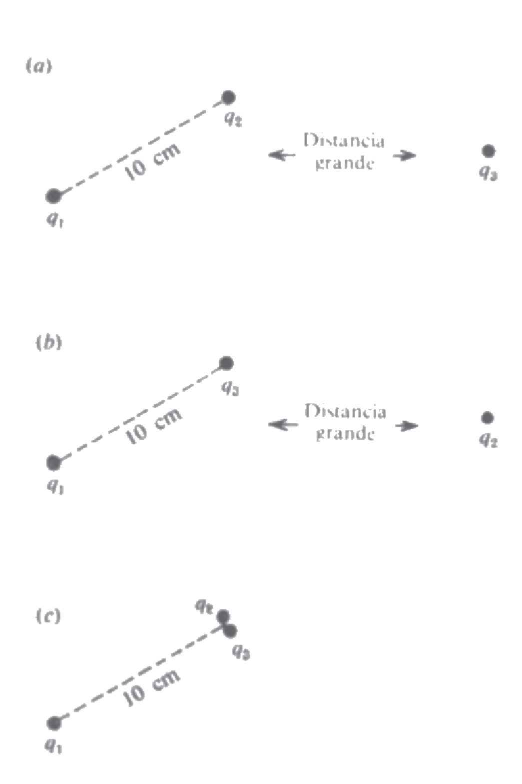


Fig. 1.3 La fuerza sobre q_1 en (*c*) es la suma de las fuerzas sobre q_1 en (*a*) y (*b*).

La comprobación experimental de la ley inversa del cuadrado, acerca de la atracción y repulsión eléctrica, tiene una curiosa historia. El mismo Coulomb enunció la ley en 1786 después de medir, con una balanza de torsión, la fuerza entre pequeñas esferas cargadas. Pero 20 años antes, Joseph Priestly, efectuando un experimento que le sugirió Benjamin Franklin, comprobó la ausencia de influencia eléctrica dentro de un recipiente hueco cargado e hizo una inspirada conjetura: «Podría inferir de este experimento que la atracción de la electricidad está sujeta a las mismas leyes que la gravitación y está por tanto de acuerdo al cuadrado de la distancia; ya que es fácil demostrar que si la tierra estuviese formada por una capa, un cuerpo en su interior no sería atraído por un lado más que por otro»*. La misma idea fue la base de un elegante experimento por Henry Cavendish, en 1772. Este cargó una capa esférica conductora que contenía en su interior, y temporalmente conectada a ella, una esfera más pequeña. La capa exterior se separó en dos mitades y retirada cuidadosamente, habiendo desconectado antes la esfera interior. Al comprobar la ausencia de carga en esta esfera, se confirmó la ley del inverso del cuadrado. Suponiendo que una desviación de la ley inversa del cuadrado pudiese expresarse como una diferencia en el exponente 2, por ejemplo $2 + \delta$, Cavendish concluyó que δ debe ser menor que 0,03. Este experimento de Cavendish permaneció largo tiempo desconocido hasta que Maxwell halló y publicó las notas de Cavendish un siglo más tarde (1876). Entonces Maxwell repitió el experimento con aparatos mejorados, disminuyendo el límite a $\delta < 10^{-6}$. Las últimas versiones modernas del experimento de Cavendish**, si se interpretan de la misma manera, dan el límite fantásticamente pequeño $\delta < 10^{-15}$.

Sin embargo, después de dos siglos de Cavendish, la cuestión de interés cambia algo. No importa cómo la ley de Coulomb se cumple perfectamente para objetos cargados en el laboratorio. ¿Hay un margen de distancias donde falle completamente? Hay dos dominios en cada uno de los cuales es presumible un fallo. El primero es en el dominio de distancias muy pequeñas, distancias menores que 10^{-14} cm, donde la teoría electromagnética sabemos que no puede aplicarse. A muy grandes distancias, digamos de las geográficas a las astronómicas, evidentemente no es posible una comprobación de la ley de Coulomb por el método de Cavendish. Sin embargo observamos ciertos fenómenos electromagnéticos a gran escala que prueban que las leyes del electromagnetismo clásico se cumplen a distancias muy grandes. Una de las pruebas más estrictas la proporcionan los campos magnéticos planetarios, en particular, el campo magnético del gran planeta Júpiter, suministrada por el Pioneer 10. Se analizó cuidadosamente la

* Joseph Priestly, «The History and Present State of Electricity», vol. II, Londres, 1767.
** E. R. Williams, J. G. Faller y H. Hill. *Phys. Rev. Lett.* **26**:721 (1971).

variación espacial de este campo* y se halló que concuerda enteramente con la teoría clásica hasta ditancias de al menos 10^5 kilómetros del planeta. Esto es equivalente a una comprobación, si bien indirecta, de la ley de Coulomb a gran distancia.

Para resumir, tenemos razones para confiar en la ley de Coulomb en el estupendo margen de 24 décadas en distancia, de 10^{-14} a 10^{10} cm, si no más lejos, y la tomaremos como base de nuestra descripción del electromagnetismo.

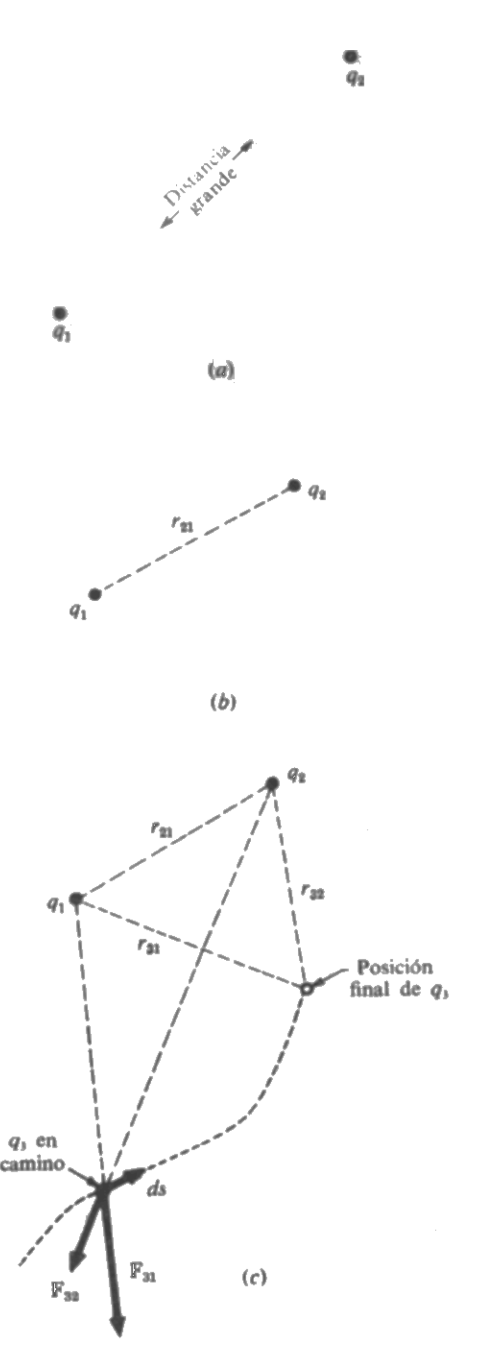


Fig. 1.4 Tres cargas se colocan próximas entre sí. Primero se trae q_2; luego, con q_1 y q_2 fijas, se trae q_3.

1.5 Energía de un sistema de cargas

En principio, lo único que tenemos para la electrostática es la ley de Coulomb. Dadas las cargas y sus posiciones podemos hallar todas las fuerzas electrostáticas. O bien, dado que las cargas también tienen libertad de moverse bajo la influencia de otro tipo de fuerzas, podemos hallar la posición de equilibrio en la cual la distribución de cargas permanecerá estacionaria. En el mismo sentido las leyes de Newton del movimiento son indispensables para la mecánica. Pero en ambos mecánica y electromagnetismo, alcanzamos fuerza y perspicacia introduciendo otros conceptos, el más notable es el de energía.

La energía es un concepto útil en nuestro caso a causa de que las fuerzas son *conservativas*. Consideremos primero el trabajo que debe cederse *al* sistema para conducir cuerpos cargados a una disposición particular. Empecemos con dos cuerpos cargados o dos partículas cargadas muy distantes entre sí, como se indica en la parte superior de la Fig. 1.4, cuyas cargas son q_1 y q_2. Omitiremos cuál puede haber sido la energía necesaria para crear inicialmente estas dos concentraciones de carga. Acerquemos lentamente las partículas hasta que su distancia sea r_{12}. ¿Qué trabajo se requiere para esto?

No distinguimos si q_1 va hacia q_2 o al contrario. En cualquier caso el trabajo realizado es la integral del producto: fuerza por el desplazamiento en la dirección de la fuerza. La fuerza que se ha de aplicar para mover una carga hacia la otra es igual y de signo contrario a la fuerza culombiana.

$$W = \int \text{fuerza} \times \text{distancia} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2(-dr)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{3}$$

Debido a que r varía desde ∞ a r_{12}, el incremento de desplazamiento es $-dr$. Sabemos que el trabajo efectuado sobre el sistema debe ser positivo para cargas del mismo signo; han de empujarse una hacia la otra. Con q_1 y q_2 en C y r_{12} en m, la Ec. 3 da el trabajo en J.

* L. Davis, Jr., A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **35**:1402 (1975). Para una revisión de la historia de la exploración del límite exterior del electromagnetismo clásico, véase A. S. Goldhaber y M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**:277 (1971).

Este trabajo es el mismo sea cual fuere el camino de aproximación. Analicemos el razonamiento aplicado a las dos cargas q_1 y q_2 en la Fig. 1.5. Se mantiene a q_1 fija y trasladamos a q_2 a su posición final siguiendo dos caminos distintos. Ambos caminos deben atravesar la capa esférica indicada entre r y $r + dr$. El incremento de trabajo $-\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ correspondiente a esta porción de camino, es el mismo para los dos caminos*. El motivo es que **F** tiene el mismo módulo en ambas posiciones y está dirigida radialmente desde q_1, a la vez que $ds = dr/\cos\theta$; de aquí que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F\,dr$. Cada incremento de trabajo a lo largo de un camino está apareado con el incremento correspondiente en el otro, así que la suma debe ser la misma. Nuestra conclusión se mantiene incluso para caminos recodados, como el camino de trazos en la Fig. 1.5. (¿Por qué?)

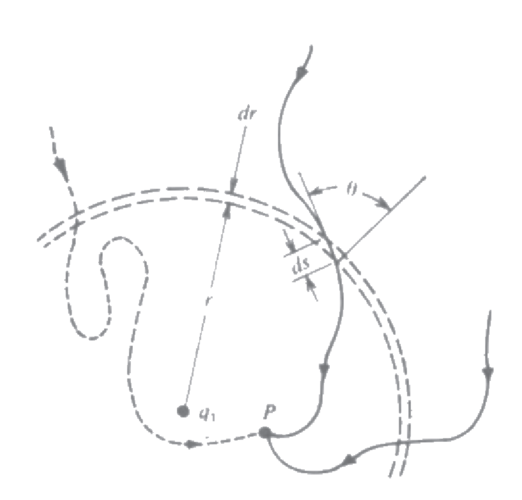


Fig. 1.5 Debido a que la fuerza es central, los tramos de diferentes caminos entre $r + dr$ y r requieren el mismo trabajo.

Volviendo a las dos cargas representadas en la Fig. 1.4, acerquemos una tercera carga q_3 desde un punto lejano trasladándola hasta un punto P_3 que dista r_{31} cm de la carga 1 y r_{32} cm de la carga 2. El trabajo requerido para ello será

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} \qquad (4)$$

Gracias a la aditividad de las interacciones eléctricas, que ya hemos señalado,

$$-\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r} \qquad (5)$$

Es decir, el trabajo para llevar a q_3 a P_3 es la suma del trabajo necesario cuando solamente está presente q_1 y el necesario cuando está presente solamente q_2.

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}}\right] \qquad (6)$$

El trabajo total efectuado para reunir las tres cargas en esta posición, al cual llamaremos U, es por lo tanto

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right] \qquad (7)$$

Observamos que q_1, q_2 y q_3 aparecen simétricamente en la expresión anterior a pesar de que q_3 se colocó en último lugar. Habríamos obtenido el mismo resultado si colocásemos en primer lugar la q_3. (Comprobarlo.) Por consiguiente U es independiente del *orden* de colocación de las cargas. Puesto que U también es independiente del camino

* Aquí usamos por vez primera el producto escalar de dos vectores: el producto escalar de dos vectores **A** y **B**, escrito **A · B**, es el número $AB\cos\theta$. Siendo A y B los módulos de los vectores **A** y **B**, y θ es el ángulo entre ellos. Expresado en función de las componentes cartesianas de los dos vectores, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

seguido por cada carga, U dependerá únicamente de la disposición final de las cargas. Podemos llamarle *energía potencial eléctrica* de este sistema particular. Como siempre, existe cierta arbitrariedad en la definición de una energía potencial. En este caso hemos elegido como cero de energía potencial la correspondiente a la situación de las tres cargas, ya existentes, infinitamente alejadas una de otra. La energía potencial *concierne a la configuración en conjunto*. No hay manera de asignar, con toda propiedad, una fracción de ésta a una de las cargas.

Es evidente que este simple resultado puede generalizarse a cualquier número de cargas. Si tenemos N cargas distintas, en una distribución arbitraria en el espacio, la energía potencial del sistema se calcula sumando todos los productos binarios de cargas, como en la Ec. 7. El cero de energía potencial, como en aquel caso, es la que corresponde a todas las cargas muy alejadas.

Como ejemplo, calculemos la energía potencial de una distribución de ocho cargas negativas en los vértices de un cubo de arista b, con una carga positiva en el centro del cubo, como en la Fig. 1.6 *a*. Supongamos que cada carga negativa es un electrón con carga $-e$, mientras que la partícula central tiene una carga positiva doble: $2e$. Sumando los productos binarios, tenemos:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{8(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)b} + \frac{12e^2}{b} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}b} + \frac{4e^2}{\sqrt{3}b}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4{,}32e^2}{b} \qquad (8)$$

La Fig. 1.6*b* muestra de donde procede cada término de dicha suma. La energía es positiva, lo que indica que el trabajo hubo de cederse al sistema para formarlo. Por descontado que este trabajo podría recuperarse si permitimos a las cargas moverse por separado, ejerciendo fuerzas sobre algún cuerpo o cuerpos exteriores. O bien si los electrones escapasen de su configuración, la *energía cinética total* de las partículas llegaría a ser igual a U. Lo dicho sería cierto si se separasen simultáneamente y simétricamente, o si se desprendiesen a la vez en cierto orden. Aquí vemos la importancia de esta simple noción de energía potencial total del sistema. Imaginemos el problema que representaría tener que calcular el vector fuerza resultante sobre cada partícula, en cada estado de la configuración. En este ejemplo, la simetría geométrica simplificaría la tarea; a pesar de esto sería mucho más complicado que el simple cálculo anterior.

Una manera de escribir la suma de productos binarios es:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{r_{jk}} \qquad (9)$$

La notación sumatorio doble, $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}$, significa: Tomar $j = 1$ y sumar para $k = 2, 3, 4, \ldots, N$; luego tomar $j = 2$ y sumar para $k = 1, 3, 4, \ldots, N$; y así sucesivamente, hasta $j = N$. Evidentemente este método da

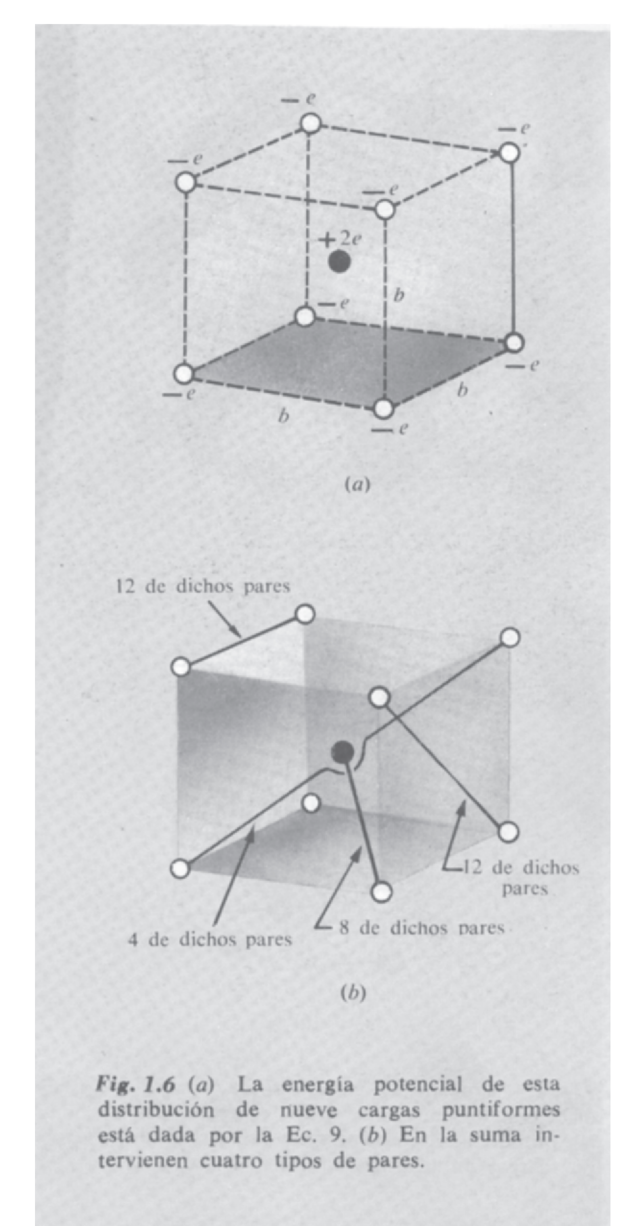


Fig. 1.6 (*a*) La energía potencial de esta distribución de nueve cargas puntiformes está dada por la Ec. 9. (*b*) En la suma intervienen cuatro tipos de pares.

lugar a que cada producto binario aparezca *dos veces*, para corregir este hecho multiplicamos por $\frac{1}{2}$.

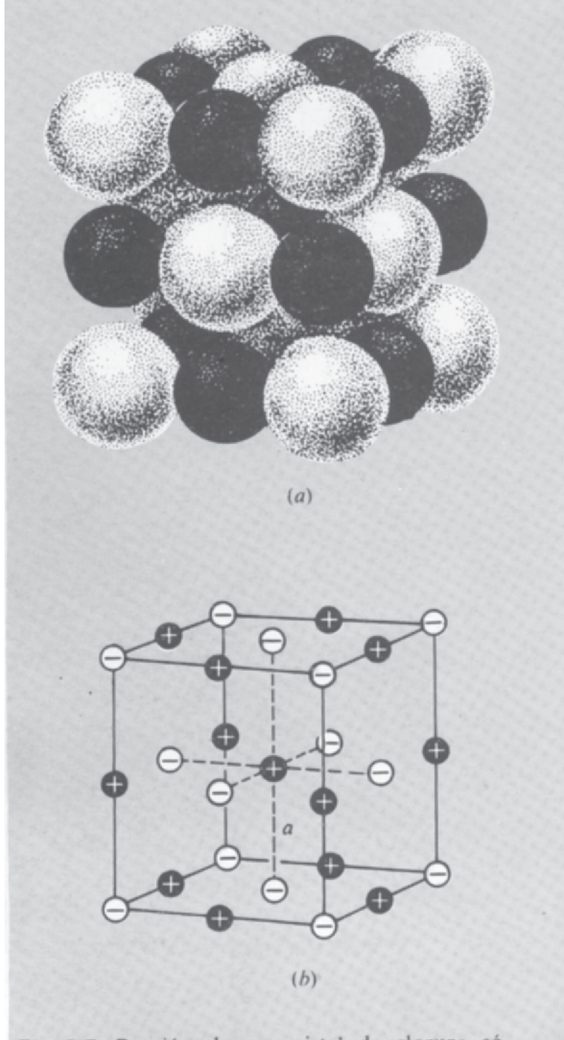


Fig. 1.7 Porción de un cristal de cloruro sódico, con los iones Na^+ y Cl^- representados en las proporciones casi correctas (*a*), y sustituidos por cargas puntiformes equivalentes (*b*).

1.6 Energía eléctrica en una red cristalina

Estas ideas tienen una importante aplicación a la física de los cristales. Sabemos que un cristal iónico como el cloruro sódico puede representarse, con gran aproximación, por una distribución de iones positivos (Na^+) y negativos (Cl^-) alternando en una disposición regular tridimensional o red. En el cloruro sódico la disposición es la representada en la Fig. 1.7*a*. Por supuesto que los iones no son cargas puntiformes, sino que son distribuciones casi esféricas de carga y por lo tanto (como probaremos en breve) las fuerzas eléctricas ejercidas entre sí son las mismas que si cada ion fuese sustituido por una carga puntiforme equivalente en su centro. Este sistema eléctricamente equivalente lo representamos en la Fig. 1.7*b*. La energía potencial electrostática de la distribución de cargas en la red juega un importante papel en la explicación de la estabilidad y cohesión del cristal iónico. Veamos si podemos determinar su valor.

Desde luego, estamos enfrentados a una suma enorme, si no doblemente infinita, pues un cristal macroscópico contiene al menos 10^{20} átomos. ¿Convergerá la suma? Lo que deseamos hallar ahora es la energía potencial por unidad de volumen o de masa del cristal. Es de suponer que este valor sea independiente del tamaño del cristal, considerando que en un cristal macroscópico un extremo puede tener poca influencia sobre el otro. Dos gramos de cloruro sódico deben tener doble energía potencial que un gramo, no importando la forma si los átomos superficiales representan un pequeña fracción del número total de átomos. Nos *equivocaríamos* al suponer esto si el cristal estuviese constituido solamente por iones del mismo signo. En este caso, un gramo de cristal tendría una enorme carga eléctrica y se necesitaría una energía muy grande para unir los dos cristales citados para formar uno de dos gramos. (Podemos calcularla.) Se salva la situación por el hecho de que la estructura cristalina es una disposición alternada de cargas iguales y de signo contrario, así que una porción macroscópica de cristal es muy aproximadamente neutra.

Para evaluar la energía potencial observemos primero que cualquier ion positivo está en una posición equivalente a la de cualquier ion positivo. Además, aunque esto no es quizá inmediato a partir de la Fig. 1.7, la distribución de iones positivos alrededor de un ion negativo es exactamente la misma que la distribución de iones negativos en torno a un ion positivo, y así sucesivamente. Por lo tanto podemos tomar un ion de cualquier clase como centro, sumar *sus* interacciones con todos los demás, y multiplicar por el número total de iones de ambas clases. Esto reduce el sumatorio doble en la Ec. 9 a una simple suma y un factor N; debemos mantener el factor $^1/_2$ para compensar el haber incluido cada par dos veces. Es decir, la energía

de una red de cloruro sódico compuesta por un número total de N iones es

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \tfrac{1}{2}N \sum_{k=2}^{N} \frac{q_1 q_k}{r_{1k}} \qquad (10)$$

Tomando el ion positivo en el centro como en la Fig. 1.7*b*, nuestra suma abarca todos sus vecinos próximos y lejanos. Los términos principales empiezan de la manera siguiente:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \tfrac{1}{2}N \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right] \qquad (11)$$

El primer término proviene de los seis iones cloro más próximos a la distancia a, el segundo, de los doce iones sodio sobre las aristas del cubo, y así sucesivamente. Es evidente que esta serie no converge *absolutamente;* si somos tan simples como para intentar sumar primero todos los términos positivos, esta suma divergería. Para calcular esta suma la distribuiríamos de manera que procedemos hacia el exterior, incluyendo siempre iones más distantes, los incluimos en grupos que representen capas de material casi neutras. Al interrumpir la suma, los iones más remotos que han sido despreciados serán como una mezcla de carga positiva y negativa a partes iguales, que podemos estar seguros de que su contribución será pequeña. Ésta es una manera simple de describir lo que es realmente un problema de cálculo más delicado. El cálculo numérico de una serie tal se realiza en nuestros días con un calculador electrónico. En este ejemplo, el resultado es:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{-0{,}8738Ne^2}{a} \qquad (12)$$

Aquí N, el número de iones, es el doble del número de moléculas de NaCl.

El signo negativo refleja el predominio de los vecinos más próximos e indica que debería *efectuarse* trabajo para separar el cristal en iones. En otras palabras, la energía eléctrica ayuda a explicar la cohesión del cristal. Sin embargo, si todo lo que ocurre fuera esto, el cristal se desmoronaría, pues la energía potencial de la distribución de cargas evidentemente se *reduce* por una disminución de todas las distancias Encontramos de nuevo el dilema familiar de la física clásica — que es la no cuántica. Según las leyes clásicas, ningún sistema puede estar en equilibrio estable bajo la única acción de fuerzas eléctricas. ¿Esto

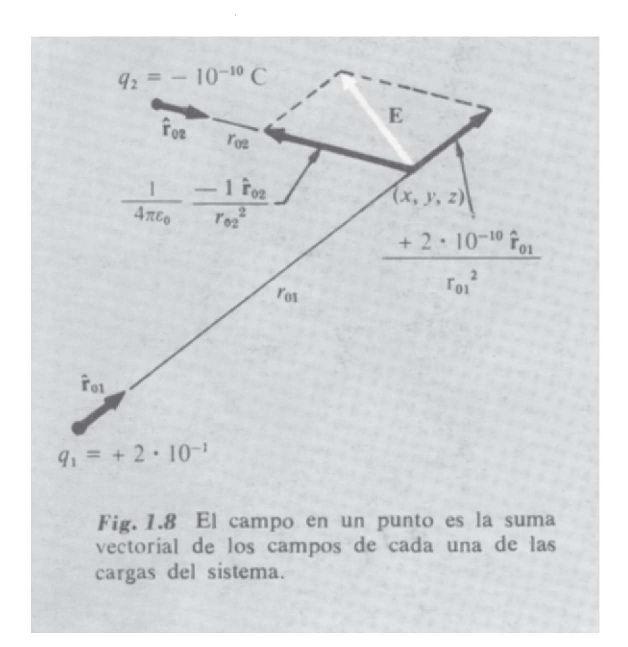


Fig. 1.8 El campo en un punto es la suma vectorial de los campos de cada una de las cargas del sistema.

hace inútil nuestro análisis? En absoluto. Notable y felizmente, en la física cuántica de los cristales puede aun asignarse un significado a la energía potencial eléctrica, y puede calcularse poco más o menos de la misma manera que hemos indicado.

1.7 El campo eléctrico

Supongamos que tenemos una distribución de cargas q_1, q_2..., q_N, fijas en el espacio, y nos interesa, no las fuerzas que se ejercen mutuamente, sino su efecto sobre otra carga q_0 que puede situarse en sus proximidades. Sabemos cómo calcular la fuerza resultante sobre esta carga dada su posición, que podemos determinar por sus coordenadas x, y, z. La fuerza sobre la carga q_0 es:

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \tag{13}$$

donde $\mathbf{r}_{0j}$ es el vector de origen de la carga j ésima en el sistema y extremo el punto (x, y, z). La fuerza es proporcional a q_0, así que si dividimos por q_0 obtenemos una magnitud vectorial que depende solamente de la estructura de nuestro sistema de cargas original q_1, q_2, ..., q_N y de la posición del punto (x, y, z). A este vector función de x, y, z le llamamos *campo eléctrico* originado por las cargas q_1, q_2, ..., q_N, y para él usamos el símbolo **E**. A las cargas q_1, q_2, ..., q_N las llamamos *manantiales* del campo. Podemos tomar como definición del campo eléctrico **E** de una distribución de cargas, en el punto (x, y, z)

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2} \tag{14}$$

En la Fig. 1.8 se representa la suma vectorial del campo eléctrico de una carga puntiforme de $+2\cdot10^{-10}$ C con el campo de una carga puntiforme de -10^{-10} C, en un punto del espacio. En el sistema de unidades CGS, la intensidad del campo eléctrico se expresa en dinas por unidad de carga, es decir, dinas/ues.La intensidad del campo eléctrico **E** se expresa en newton/coulomb.

Después de la introducción del potencial eléctrico, en el próximo capítulo tendremos otra manera de expresar la unidad de intensidad del campo, y completamente equivalente, a saber, volt/metro.

Hasta aquí, nada tenemos realmente nuevo. El campo eléctrico es simplemente otra manera de describir el sistema de cargas; nos da la fuerza por unidad de carga, en módulo y dirección, que una carga de prueba q_0 experimentaría en cada punto. Hay que tener un poco de cuidado con esta interpretación. A menos que las cargas manantial sean realmente inmóviles, la introducción de cualquier carga finita q_0 puede ocasionar variación en las posiciones de las cargas

manantial, así que el propio campo definido por la Ec. 14 es distinto. Este es el motivo de suponer las cargas fijas al empezar nuestra exposición. A veces se define el campo exigiendo que q_0 sea una carga de prueba « infinitésima », siendo **E** el límite de $\mathbf{F}/q_0$ cuando $q_0 \to 0$. Toda impresión de rigor que esto pueda conferir es ilusoria. Recordemos que en el mundo real nunca se ha observado una carga menor que e. En realidad, si tomamos la Ec. 14 como nuestra *definición* de **E**, sin referencia a una carga de prueba, no surgen problemas y no necesitamos que los manantiales sean fijos. Si la introducción de una nueva carga origina una variación en las cargas manantiales, en realidad hemos provocado un cambio en el campo eléctrico, y si deseamos determinar la fuerza sobre la nueva carga, deberemos usar el nuevo campo eléctrico para calcularla.

Quizá puede preguntarse ¿qué es un campo eléctrico? Es algo real, o es puramente un nombre para un factor en una ecuación que ha de multiplicarse por otro para dar el valor numérico de la fuerza que medimos en un experimento? Pueden ser interesantes dos observaciones. Primero, ya que trabaja no ocasiona diferencia. Ésta no es una contestación trivial sino muy sensata. Segundo, el hecho de que el vector campo eléctrico en un punto del espacio es todo lo que necesitamos conocer para predecir la fuerza que actuará sobre *cualquier* carga en este punto no es de ningún modo trivial. Podía haber sido de otra manera. Si no se hubiesen realizado experimentos, podríamos imaginar que en dos posiciones distintas en las cuales la unidad de carga experimentara la misma fuerza, cargas de prueba de valor 2 unidades podían experimentar fuerzas distintas, dependientes de la naturaleza de las otras cargas en el sistema. Si esto fuese cierto la descripción del campo no sería eficaz. El campo eléctrico asigna a cada punto en un sistema una *propiedad local,* en este sentido: Si conocemos **E** en una pequeña región, sabemos *sin ulterior averiguación,* lo que ocurrirá a cualquier carga en aquella región. No necesitamos conocer lo que produce el campo.

Para hacer visible un campo eléctrico necesitamos asociarle un vector, es decir, un módulo, dirección y sentido, en cada punto del espacio. En este libro utilizaremos varias representaciones esquemáticas del vector campo, ninguna de ellas completamente satisfactoria.

Es difícil dibujar en dos dimensiones la representación de una función vectorial en un espacio de tres dimensiones. Podemos indicar el módulo y dirección de **E** en varios puntos dibujando pequeñas flechas próximas a estos puntos, trazando las flechas más largas donde E sea más intenso *. Usando este esquema presentamos, en la Fig. 1.9*a*, el campo de una carga puntiforme aislada de $+10^{-9}$ C y en la Fig. 1.9*b* el campo de una carga puntiforme de $-0{,}3 \cdot 10^{-9}$ C. Estas

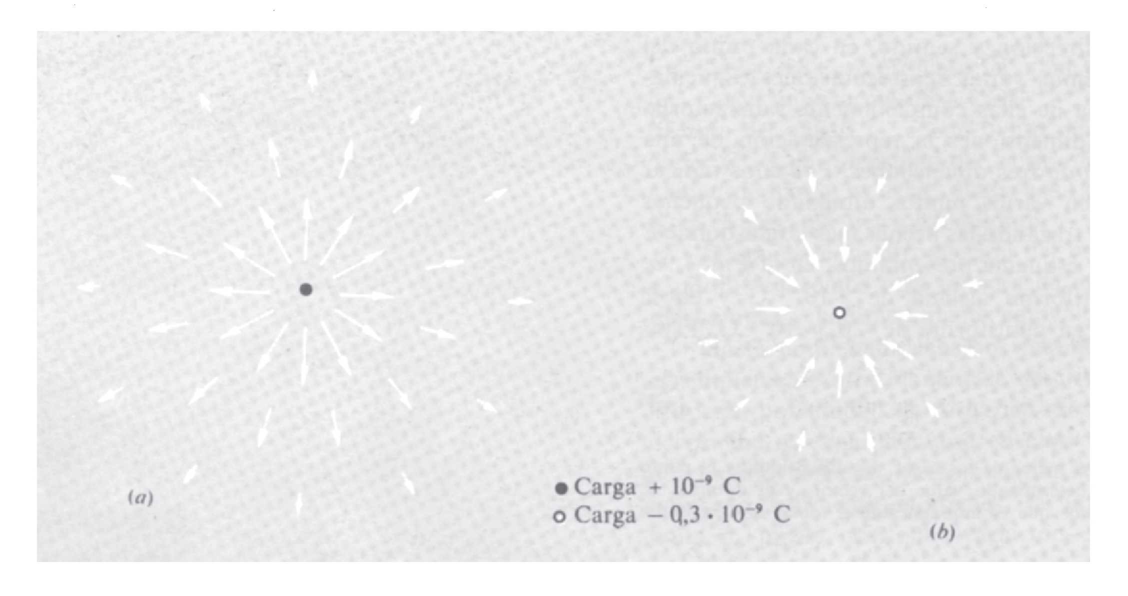
---

* Tal representación es tosca en el mejor de los casos. Es difícil indicar el punto del espacio en el cual se aplica un determinado valor del vector, y el dominio de valores de E es generalmente tan grande que es impracticable el tomar las longitudes de las flechas proporcionales a E.

representaciones no añaden nada a nuestro conocimiento del campo de una carga aislada; cualquiera puede imaginar un simple campo radial inverso del cuadrado sin la ayuda de una representación. Los dibujaremos en la Fig. 1.10 con objeto de combinar los dos campos, la cual indica al mismo tiempo el campo de las dos cargas separadas por una distancia a. Todo lo que representa esta figura es el campo en un plano que contiene las cargas. Para obtener una representación tridimensional completa debemos imaginar que la figura gira en torno del eje de simetría. En Fig. 1.10 existe un punto del espacio donde $\mathbf{E}$ es nulo. ¿A qué distancia debe estar de la carga más próxima? Observemos que hacia el borde del dibujo el campo está dirigido casi completamente hacia el exterior. Puede verse que a gran distancia de las cargas el campo se parece mucho al debido a una carga puntiforme positiva. Esto podía suponerse debido a que para puntos muy alejados la separación de las cargas no tiene mucha importancia, y lo que habría resultado al superponer nuestras dos cargas en un punto es una carga puntiforme de $0{,}7 \cdot 10^{-9}$ C.

Otra manera de representar un campo vectorial es dibujar las *líneas de campo*. Estas son líneas cuya tangente, en cualquier punto, tiene la dirección del campo en este punto. Tales líneas serán curvas continuas excepto en las singularidades tales como cargas puntiformes, o puntos tales como el citado en la Fig. 1.10 donde el campo es nulo. El dibujo de una línea de campo no da directamente el valor del campo, aunque veremos que, de manera general, las líneas de campo convergen cuando nos aproximamos a una región de campo intenso y se separan al aproximarnos a una región de campo débil. En la Fig. 1.11 se han

Fig. 1.9 (*a*) Campo de una carga $q_1 = +10^{-9}$ C (*b*) campo de una carga $q_2 = -0{,}3 \cdot 10^{-9}$ C. Ambas representaciones son necesariamente toscas y sólo groseramente cuantitativas.



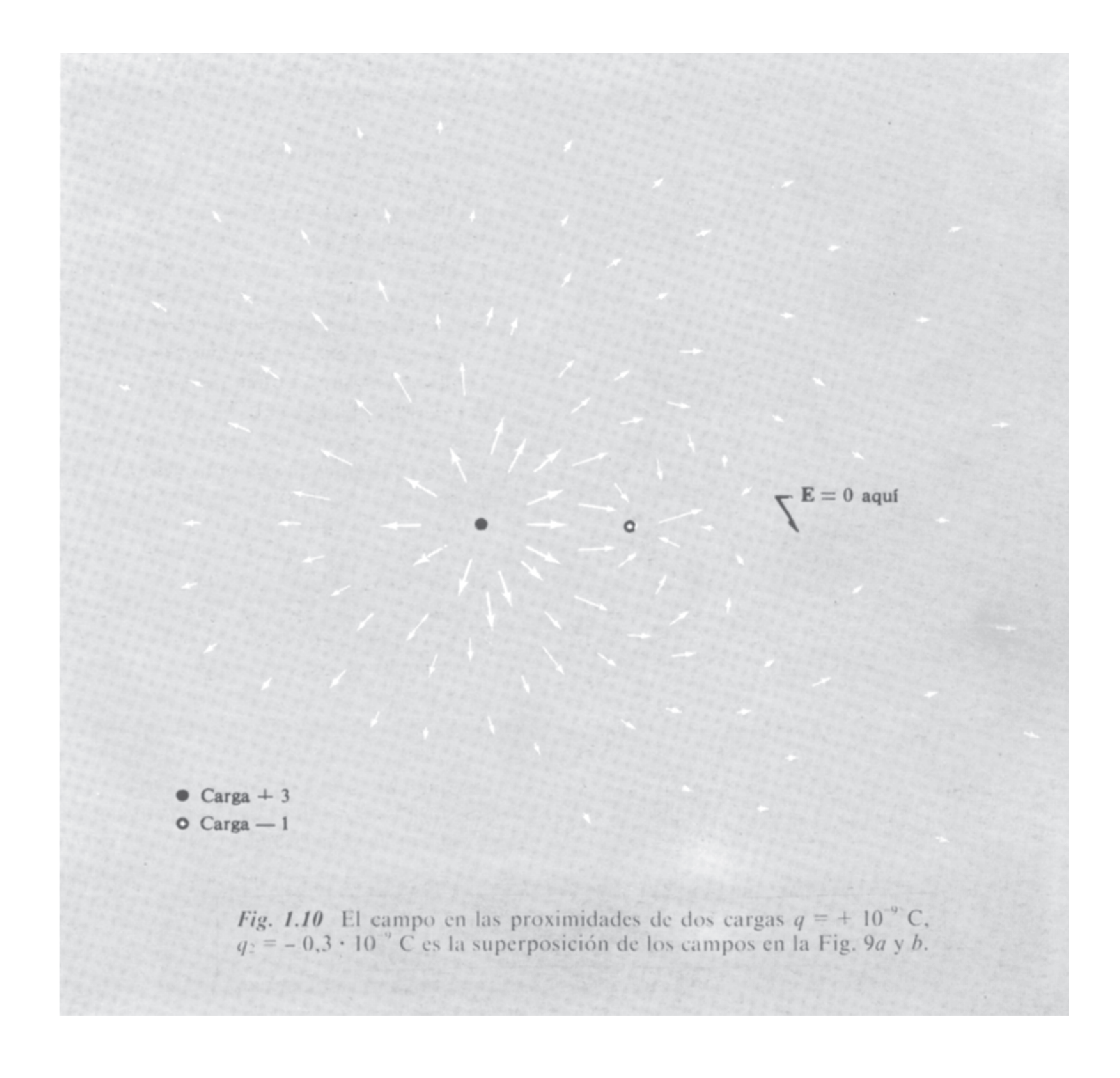


Fig. 1.10 El campo en las proximidades de dos cargas $q = +10^{-9}$ C, $q_2 = -0{,}3 \cdot 10^{-9}$ C es la superposición de los campos en la Fig. 9*a* y *b*.

dibujado algunas líneas de campo para la misma distribución de cargas que en la Fig. 1.10, una carga positiva de 10^{-9} C y una carga negativa de $-0{,}3 \cdot 10^{-9}$ C. De nuevo, estamos restringidos por la naturaleza del papel y de la tinta a una sección bidimensional de un haz de curvas tridimensional.

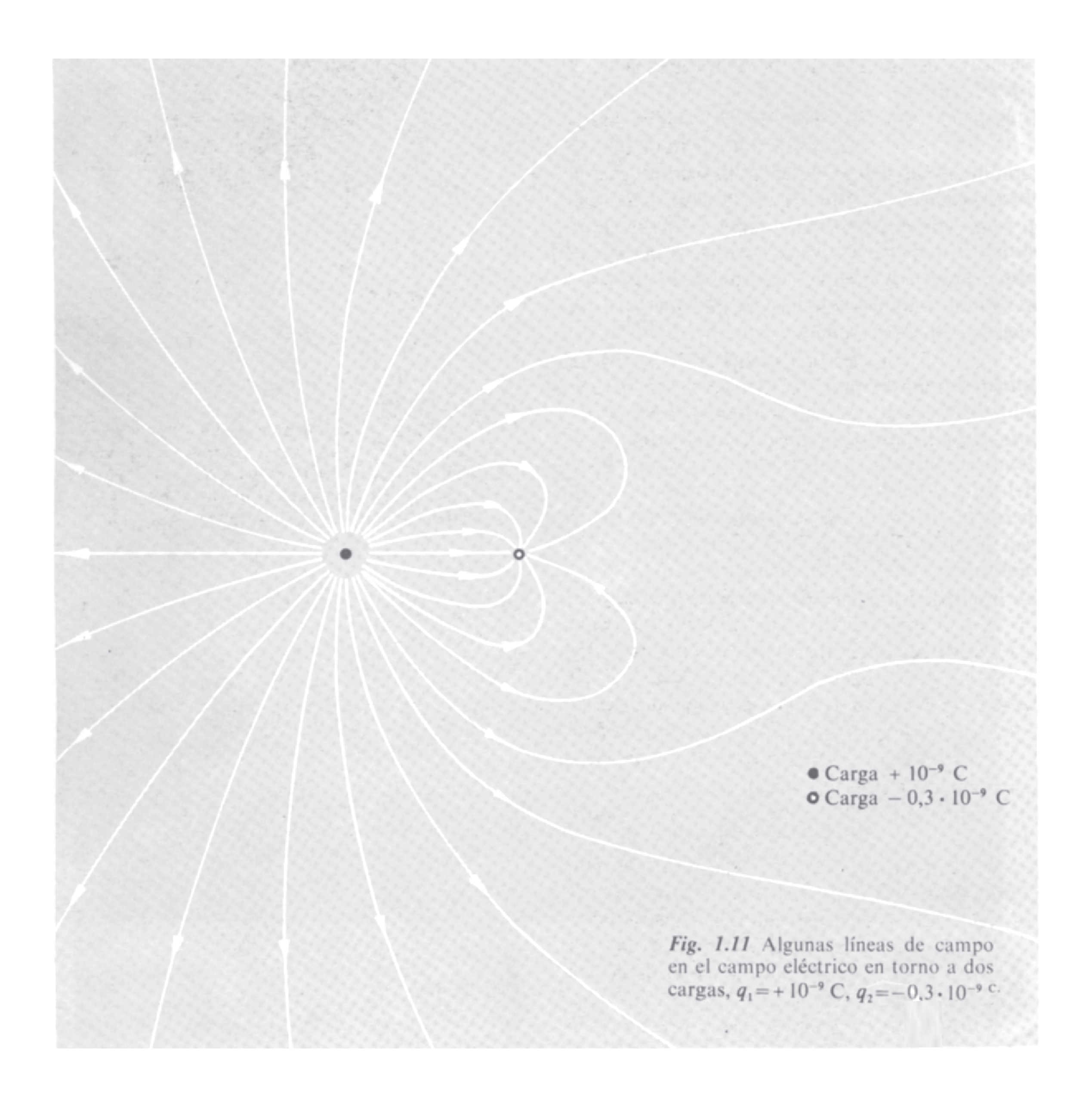


Fig. 1.11 Algunas líneas de campo en el campo eléctrico en torno a dos cargas, $q_1 = +10^{-9}$ C, $q_2 = -0,3 \cdot 10^{-9}$ C.

1.8 Distribución de cargas

Ahora vamos a generalizar pasando de *cargas puntiformes* a una *distribución continua de carga*. Una distribución cúbica de cargas se define por una función escalar ρ densidad de carga, la cual es función de la posición, de dimensiones *carga/volumen*. Es decir, ρ veces un

elemento de volumen da la cantidad de carga contenida en este elemento de volumen. El mismo símbolo se utiliza a menudo para designar la masa por unidad de volumen, pero en este libro siempre designaremos por ρ la carga por unidad de volumen. Si escribimos ρ en función de las coordenadas x, y, z, entonces $\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ es la carga contenida en el elemento de volumen $dx\, dy\, dz$, localizada en el punto (x, y, z).

Desde luego, a escala atómica la densidad de carga varía enormemente de un punto a otro; pero a pesar de todo resulta ser un concepto útil en este dominio. Sin embargo, lo utilizaremos principalmente cuando tratemos sistemas a gran escala, tan grandes que un elemento de volumen $dv = dx\, dy\, dz$ pueda ser muy pequeño con relación al tamaño de nuestro sistema aunque lo suficientemente grande para contener algunos átomos o cargas elementales. Como hemos señalado anteriormente, nos encaramos con un problema similar al definir la densidad másica de una substancia.

Si el manantial de campo eléctrico es una distribución continua de cargas en lugar de cargas puntiformes, solamente tenemos que reemplazar la suma en la Ec. 13 por la integral apropiada. La integral da el campo eléctrico en (x, y, z), producido por cargas en otros puntos (x', y', z').

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(x',y',z')\hat{\mathbf{r}}\, dx'\, dy'\, dz'}{r^2} \tag{15}$$

Ésta es una integral de volumen. Manteniendo fijo el punto (x, y, z) se hace recorrer a las variables de integración x', y' y z' todo el espacio que contiene carga, de este modo se suman las contribuciones de todas las porciones de carga. El vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ se dirige de (x', y', z') a (x, y, z) — a menos que deseemos colocar el signo menos ante la integral, en cuyo caso podemos invertir el sentido de $\hat{\mathbf{r}}$. Es difícil mantener siempre el signo correcto. Recordemos que el campo eléctrico se dirige *hacia fuera* de una carga positiva (Fig. 1.12).

En las proximidades de una carga puntiforme verdadera el campo eléctrico crece indefinidamente como $1/r^2$ al aproximarnos al punto. No tiene sentido hablar del campo *en* la carga puntiforme. Como nuestras fuentes físicas primarias de campo creemos que no son infinitas concentraciones de carga en un volumen nulo, sino estructuras finitas, ignoraremos las singularidades matemáticas implicadas en nuestro lenguaje carga-punto y las desecharemos del interior de los límites de nuestros manantiales elementales. Sin embargo, puede ser importante advertir que una distribución continua de carga no tiene el peligro de una singularidad, y permite definir el campo en puntos interiores a la misma distribución. Esto es debido a que la integral de volumen en la Ec. 15 evita el crecimiento indefinido en las proximidades de $r = 0$ por el hecho de que el elemento de volumen crece como $r^2\, dr$. Es decir, en tanto ρ permanezca finita, el campo se mantendrá finito, incluso en el interior o en el contorno de una distribución de carga.

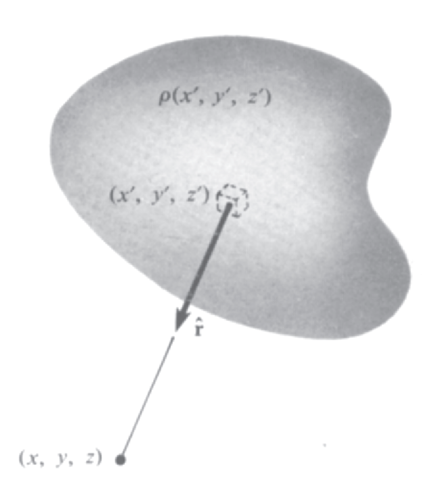


Fig. 1.12 Cada elemento de la distribución de carga $\rho(x', y', z')$ proporciona una contribución al campo eléctrico E en el punto (x, y, z). El campo total en este punto es la suma de dichas contribuciones (Ec. 15).

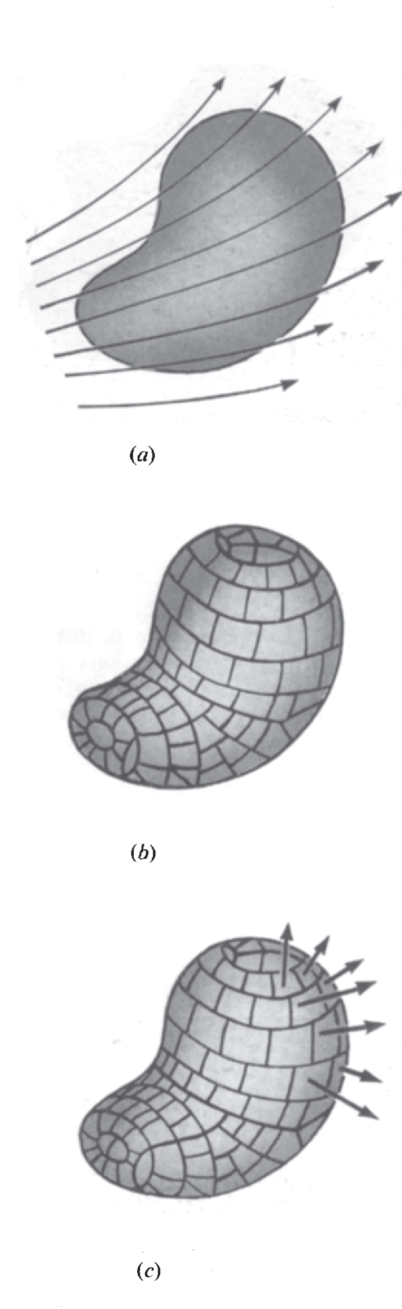


Fig. 1.13 (*a*) Una superficie cerrada en un campo vectorial está dividida (*b*) en pequeños elementos de superficie (*c*). Cada elemento de superficie está representado por un vector hacia el exterior.

1.9 Flujo

La relación entre el campo eléctrico y sus fuentes puede expresarse de una manera notablemente simple, que encontraremos muy útil. Para ello necesitamos definir una magnitud llamada *flujo*.

Consideremos cierto campo eléctrico en el espacio, y en este espacio cierta superficie cerrada arbitraria, como un globo de forma cualquiera. La figura 13 representa una superficie tal, insinuándose el campo por unas líneas de campo. Dividimos la superficie en pequeños pedazos los cuales son tan pequeños que en cada uno de ellos la superficie es prácticamente plana y el vector campo no varía apreciablemente de un punto a otro del pedazo. En otras palabras, no se permite al globo ser demasiado rugoso ni que su superficie pase por una singularidad * del campo, tal como una carga puntiforme. El área de un pedazo tiene un determinado valor en centímetros cuadrados y define una dirección y sentido únicos — la de la normal a su superficie dirigida hacia fuera. (Ya que la superficie es cerrada puede distinguirse su interior de su exterior; no hay ambigüedad.) Representemos este módulo, dirección y sentido por un vector. Para cada uno de los pedazos en que se ha dividido la superficie, tal como el pedazo número j, tenemos un vector $\mathbf{a}_j$ que da su área y orientación. Las operaciones efectuadas están dibujadas en la Fig. 1.13*b* y *c*. Adviértase que el vector $\mathbf{a}_j$ no depende en absoluto de la forma del pedazo; no importa cómo se haya dividido la superficie mientras los pedazos sean lo suficientemente pequeños.

Sea $\mathbf{E}_j$ el vector campo eléctrico en la posición del pedazo número j. El producto escalar $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ es un número. A este número le llamamos *flujo* a través de esta porción de superficie. Para comprender el origen del nombre, imaginemos una función vectorial que represente la velocidad del movimiento en un fluido, por ejemplo, en un río, donde la velocidad varía de un lugar a otro pero es constante con el tiempo en una posición determinada. Denotemos este campo vectorial por $\mathbf{v}$ medido por ejemplo en centímetros por segundo. Si $\mathbf{a}$ es el área orientada, en centímetros cuadrados, de una figura sumergida en el agua, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$ es el *flujo por unidad de tiempo* de agua, a través de la figura, en centímetros cúbicos por segundo (Fig. 1.14). Debemos señalar que nuestra definición de flujo puede aplicarse a cualquier función vectorial, puede representar cualquier variable física.

Sumemos el flujo a través de todos los pedazos para obtener el flujo a través de la superficie total, una magnitud escalar que denotaremos por:

$$\Phi = \sum_{\text{toda } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \qquad (16)$$

* Por una singularidad del campo, generalmente entendemos no solamente un manantial puntiforme, sino también un lugar donde el campo cambia de valor o dirección discontinuamente, tal como en una capa infinitamente delgada de carga concentrada. En realidad, esta última clase de singularidad, más leve, no nos causaría dificultades a menos que la superficie del globo coincidiese con la superficie de discontinuidad en un área finita.

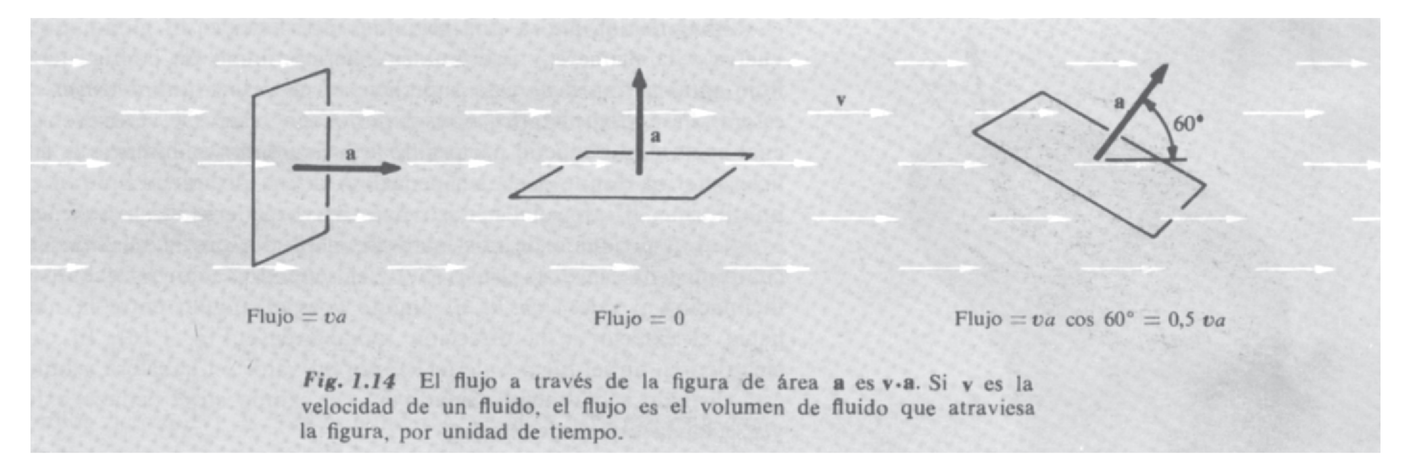


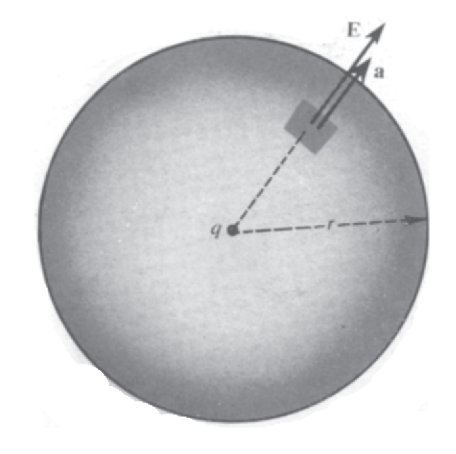
Fig. 1.14 El flujo a través de la figura de área **a** es **v·a**. Si **v** es la velocidad de un fluido, el flujo es el volumen de fluido que atraviesa la figura, por unidad de tiempo.

Haciendo que los pedazos sean cada vez más pequeños y numerosos ilimitadamente, pasamos de la suma de la Ec. 16 a la integral de superficie

$$\Phi = \int_{\substack{\text{Toda la}\\ \text{superficie}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{17}$$

La integral de superficie de una función vectorial **F**, sobre una superficie S, significa precisamente esto: Dividir S en pequeños pedazos, cada uno de ellos representado por un vector hacia fuera, de módulo igual al área del pedazo; en cada pedazo efectuamos el producto escalar del vector área del mismo y el **F** local; sumamos todos estos productos, y el límite de esta suma, al hacer pequeños los pedazos, es la integral de superficie. No debemos asustarnos por la perspectiva de tener que realizar un cálculo tal para una superficie de forma complicada, como la de la Fig. 1.13. La propiedad admirable que vamos a demostrar lo hace innecesario.

Fig. 1.15 En el campo **E** de una carga puntiforme q, ¿cuál es el flujo saliente de una esfera que rodea a?



1.10 Ley de Gauss

Vamos a considerar el caso más simple que podemos imaginar; supongamos que el campo es el debido a una sola carga puntiforme aislada positiva q y que la superficie es una esfera de radio r con centro en la carga puntiforme (Fig. 1.15). ¿Cuál es el flujo Φ a través de esta superficie? La solución es fácil debido a que el módulo de **E** en todo punto de la superficie es q/r^2 y su dirección y sentido es el mismo que el de la normal hacia el exterior en este punto. Tenemos así:

$$\Phi = E \times \text{área total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \tag{18}$$

El flujo es independiente del tamaño de la esfera.

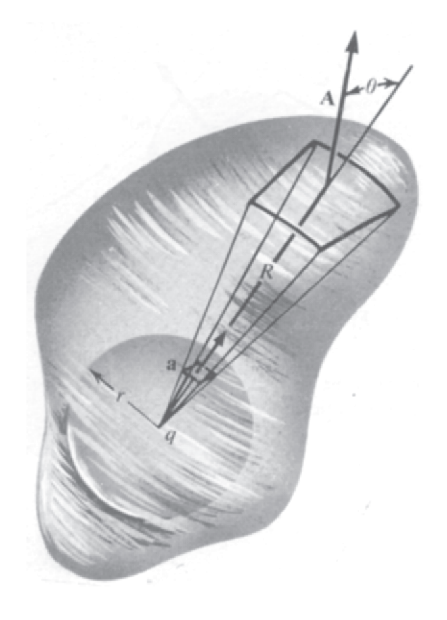


Fig. 1.16 Demostración de que el flujo a través de cualquier superficie cerrada en torno a q es igual al flujo a través de la esfera.

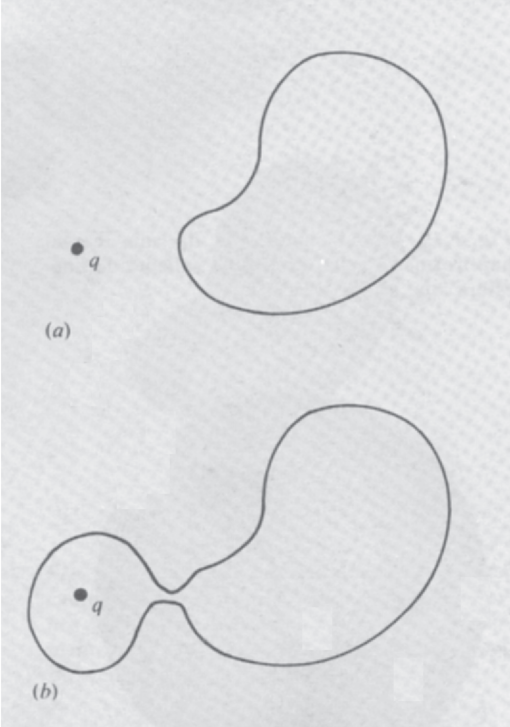


Fig. 1.17 Para demostrar que en (*a*) el flujo a través de S es nulo, se puede hacer uso de (*b*).

Imaginemos ahora una segunda superficie, o un globo, que envuelva a la primera y que no sea esférica, como en la Fig. 1.16. El flujo total a través de esta superficie es el mismo que a través de la esfera. Para demostrarlo, consideremos un cono de vértice en q, el cual corta una pequeña parte **a** de la esfera y continúa hacia la superficie exterior donde corta un pedazo **A** a una distancia R de la carga puntiforme. El área del pedazo **A** es mayor que la del **a**, su cociente es igual al producto de dos factores: el primero es la relación de los cuadrados de las distancias $(R/r)^2$; el segundo factor es debido a su inclinación y vale $1/\cos\theta$. El ángulo θ es el ángulo entre la normal hacia el exterior y la dirección radial (véase Fig. 1.16). El campo eléctrico en aquel lugar vale $(r/R)^2$ por su valor en la esfera y también está dirigido radialmente. Siendo $\mathbf{E}_{(R)}$ el campo en el pedazo exterior y $\mathbf{E}_{(r)}$ en la esfera, tenemos:

$$\text{Flujo a través del pedazo exterior} = \mathbf{E}_{(R)} \cdot \mathbf{A} = E_{(R)} A \cos\theta$$
$$\text{Flujo a través del pedazo interior} = \mathbf{E}_{(r)} \cdot \mathbf{a} = E_{(r)} a$$

$$E_{(R)} A \cos\theta = \left[E_{(r)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[a\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{\cos\theta}\right] \cos\theta = E_{(r)} a \qquad (19)$$

Esto prueba que el flujo a través de los dos pedazos es el mismo.

Ahora, cada pedazo sobre la superficie exterior puede hacerse corresponder, de esta manera, con parte de la superficie esférica, así que el flujo total debe ser el mismo a través de las dos superficies. Es decir, el flujo a través de la nueva superficie debe ser precisamente igual a $\frac{1}{\varepsilon_0} q$. Pero esta superficie tenía forma y tamaño *arbitrarios* *. Deducimos que: el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie que tenga en su interior una carga q vale $\frac{1}{\varepsilon_0} q$. Como corolario podemos decir que el flujo total a través de una superficie cerrada es *nulo* si la carga está en el *exterior* de la superficie. Dejamos que el lector demuestre esto, ayudado por la Fig. 1.17.

Existe una forma de considerar esto que hace que el resultado parezca más evidente. Imaginemos que q es una fuente que emite partículas en todas direcciones — tales como proyectiles o fotones — en número constante por unidad de tiempo. Evidentemente el flujo de partículas a través de una ventana de área unidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de q. De aquí que podamos deducir una analogía entre la intensidad del campo eléctrico E y el valor del flujo de partículas, en proyectiles por unidad de superficie en la unidad de tiempo. Se ve claramente que el flujo de proyectiles a través de una superficie que rodee completamente a q es independiente del tamaño y de la forma de tal superficie, pues precisamente es el número total emitido por unidad de tiempo. Paralelamente, el flujo de E a través de una superficie cerrada debe ser independiente de la

* Sin duda, la segunda superficie rodeaba a la esfera, realmente no era preciso. Además, la esfera puede tomarse tan pequeña como queramos.

forma y tamaño. El aspecto común responsable de esto es el comportamiento, inverso del cuadrado, de la intensidad.

La situación está ya preparada para la superposición. Todo campo eléctrico es igual a la suma de los campos de sus manantiales individuales. Esta propiedad se manifestó al establecer la ley de Coulomb en la Ec. 13. El flujo es una magnitud aditiva en el mismo sentido, pues si tenemos cierto número de manantiales q_1, $q_2 \ldots, q_N$, cuyos campos respectivos, si cada uno de ellos estuviese solo, serían $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_N$, el flujo Φ a través de una superficie S en el campo actual puede escribirse

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a} \qquad (20)$$

Hemos visto que $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{a}$ es igual a $\frac{1}{\varepsilon_0} q_n$ si la carga q_n está dentro de S y si no es igual a cero. Así pues, cada carga q en el interior de la superficie contribuye exactamente en $\frac{1}{\varepsilon_0} q$ a la integral de superficie de la Ec. 20 y todas las cargas en el exterior no contribuyen en nada. Hemos llegado a la ley de Gauss:

> El flujo del campo eléctrico **E** a través de una superficie cerrada cualquiera, es decir, la integral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ extendida a la superficie, es igual a $\frac{1}{\varepsilon_0}$ por la carga total encerrada por la superficie: (21)
>
> $$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dv$$

A lo establecido se le llama *ley* por ser equivalente a la ley de Coulomb y puede servir igualmente como ley básica de las interacciones electrostáticas, una vez definido el campo y la carga. La ley de Gauss y la ley de Coulomb no son dos leyes físicas independientes, sino la misma ley expresada de manera distinta *.

Reflexionando acerca de nuestra demostración, vemos que ésta dependía de la naturaleza de la interacción, inversa del cuadrado, y por supuesto de la aditividad de las interacciones, o superposición. Así que el teorema es aplicable en la física a todo campo inverso del cuadrado, por ejemplo, al campo gravitatorio.

Es fácil ver que la ley de Gauss *no* se cumpliría si, por ejemplo, la ley de la fuerza fuese inversa al cubo. Pues en este caso el flujo del

---

* Existe una diferencia, sin consecuencias aquí, pero apropiada para nuestro estudio posterior de los campos de las cargas móviles. Obedecen a la ley de Gauss un tipo de campos más amplio que los representados por el campo electrostático. En particular, un campo que sea inversamente proporcional al cuadrado de r pero sin simetría esférica, puede satisfacer a la ley de Gauss. Dicho de otro modo, la ley de Gauss en sí no implica la simetría del campo de un manantial puntiforme que está implícita en la ley de Coulomb.

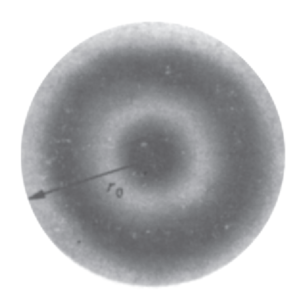
campo eléctrico de una carga puntiforme q a través de una esfera de radio R con el centro en la carga sería

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 R} \tag{22}$$

Haciendo la esfera suficientemente grande podemos hacer el flujo a través de ella tan pequeño como queramos, mientras que la carga total en el interior permanezca constante.

Este notable teorema aumenta nuestro alcance de dos maneras. Primero, revela una conexión entre el campo y sus fuentes que es inversa a la ley de Coulomb. La ley de Coulomb nos indica cómo deducir el campo eléctrico si se dan las cargas; con la ley de Gauss podemos determinar qué cantidad de carga existe en una región si conocemos el campo. Segundo, la relación matemática que se ha demostrado es una poderosa herramienta analítica, que, como veremos, puede facilitar la resolución de problemas complicados.

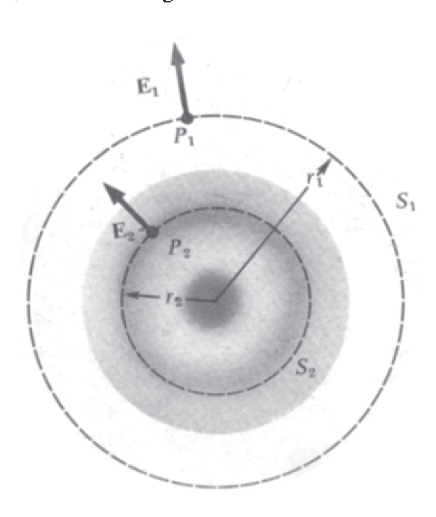
Fig. 1.18 Distribución de carga con simetría esférica.



1.11 *Campo de una distribución esférica de carga*

Podemos utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico de una distribución de carga con simetría esférica, es decir, una distribución en la cual la densidad de carga ρ depende solamente del radio desde un punto central. La Fig. 1.18 representa la sección recta de una distribución de este tipo. En ésta la densidad de carga es grande en el centro, disminuye y luego aumenta de nuevo al aumentar la distancia al centro, y es nula para distancias mayores que r_0. ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto tal como P_1, en el exterior de la distribución, o en P_2, dentro de ella (Fig. 1.19)? Si operamos solamente a partir de la ley de Coulomb, tendríamos que efectuar una integración que sumase los vectores campo eléctrico en P_1 debidos a cada volumen elemental en la distribución de carga. Elijamos un método distinto que aproveche a la vez la simetría del sistema y la ley de Gauss.

Fig. 1.19 Campo eléctrico de una distribución esférica de carga.



A causa de la simetría esférica, el campo eléctrico en cualquier punto debe estar dirigido radialmente — no es posible otra dirección. Además, el módulo E del campo debe ser el mismo en todos los puntos de una superficie esférica S_1 de radio r_1, pues todos estos puntos son equivalentes. Llamemos E_1 al módulo de este campo. El flujo a través de esta superficie S_1 es por lo tanto $4\pi r_1^2 E_1$, y por la ley de Gauss debe ser igual a $1/\varepsilon_0$ veces la carga encerrada por la superficie. Es decir, $\frac{1}{\varepsilon_0} r^2{}_1 E_1 = 1/\varepsilon_0$ (carga dentro de S_1) o bien

$$E_1 = \frac{\text{carga dentro de } S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}} \tag{23}$$

Comparándolo con el campo de una carga puntiforme, vemos que el *campo en todo punto de S_1 es el mismo que si toda la carga dentro de S_1 estuviera concentrada en el centro.* El mismo razonamiento se

aplica a una esfera trazada *dentro* de la distribución de carga. El campo en todo punto de S_2 es el mismo que si toda la carga dentro de S_2 estuviera en el centro, y toda carga *externa* a S_2, ausente. Evidentemente el campo en el interior de una distribución esférica de carga « hueca » es nulo (Fig. 1.20).

El mismo razonamiento aplicado al campo gravitatorio nos expresaría que la tierra, suponiendo que es simétricamente esférica en su distribución de masa, atrae a los cuerpos exteriores como si su masa estuviese concentrada en el centro. Esta manifestación es bien conocida. El que esté inclinado a pensar que el principio expresa una propiedad evidente del centro de masa, debe tener presente que el teorema, en general, no es completamente cierto para cuerpos de otra forma. Un cubo perfecto de densidad uniforme *no* atrae a los cuerpos exteriores como si su masa estuviera concentrada en su centro geométrico.

Newton no consideró que el teorema fuera evidente. Necesitó como clave de su demostración que la luna en su órbita en torno a la tierra y un cuerpo que cae sobre la tierra corresponden a fuerzas similares. La demora de cerca de veinte años en la publicación de la teoría de la gravitación de Newton fue debida al parecer, al menos en parte, a los inconvenientes que halló para probar este teorema a su satisfacción. La demostración que finalmente ideó, publicada en su *Principia* en 1686 (Libro I, Sec. XII, Teorema XXXI) es un prodigio de ingenio en la cual, vulgarmente hablando, efectuó una integración cúbica tramposa sin la ayuda del calculo integral tal como lo conocemos nosotros. La demostración es bastante más larga que todo nuestro estudio precedente de la ley de Gauss, y razonada de manera más complicada. Vemos que, a pesar de todo su amplio recurso matemático y originalidad, le faltó a Newton el teorema de Gauss; una relación que, una vez demostrada, nos parece tan evidente como para ser casi trivial.

Fig. 1.20 El campo es nulo en el interior de una capa esférica de carga.

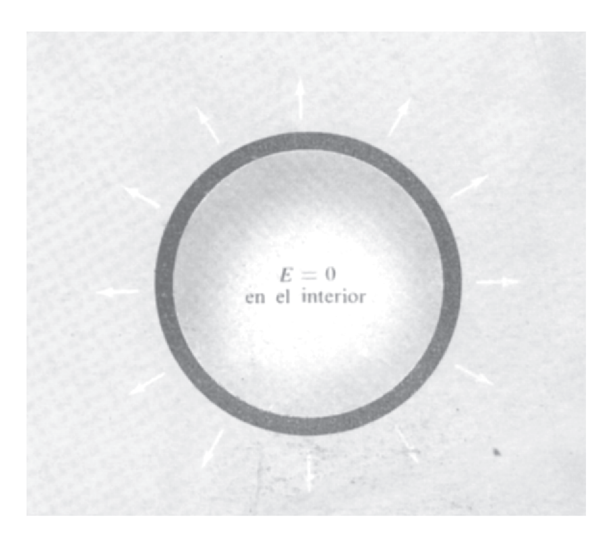
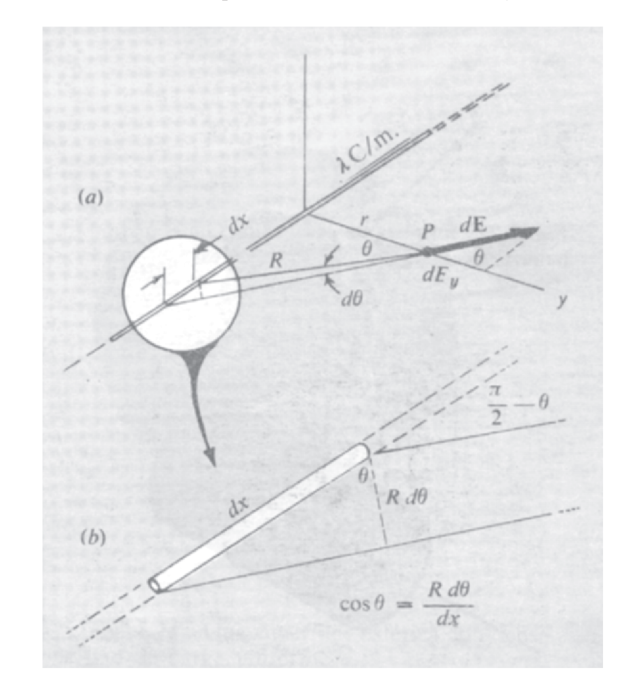


Fig. 1.21 (a) El campo en *P* es la suma vectorial de las contribuciones de cada elemento de carga lineal. (*b*) Detalle de (*a*).



1.12 *Campo de una carga lineal*

Un hilo recto largo cargado puede caracterizarse, si despreciamos su espesor, por la cantidad de carga contenida en la unidad de longitud. Designemos esta *densidad lineal de carga* por λ, medida en C/m. ¿Cuál es el campo eléctrico de tal línea cargada, supuesta indefinida y con densidad constante λ? Resolveremos el problema de dos maneras; primero, por integración, partiendo de la ley de Coulomb.

Para calcular el campo en un punto *P*, representado en la Fig. 1.21, debemos sumar las contribuciones de todos los segmentos de línea cargada, uno de los cuales está indicado por un segmento de longitud dx. La carga dq en este elemento vale $dq = \lambda\, dx$. Tomamos como dirección del eje x la de la línea cargada, hacemos pasar el eje y por el punto *P*, el cual dista r cm de la línea. Es provechoso

valernos de la simetría desde el principio. Es evidente que el campo eléctrico en P debe dirigirse según el eje y, así que E_x y E_z son nulas. La contribución de la carga dq a la componente y del campo eléctrico en P es

$$dE_y = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\theta \tag{24}$$

en donde θ es el ángulo que forma el vector campo debido a dq con la dirección y. La componente total según y es pues

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, dx \tag{25}$$

Es conveniente utilizar θ como variable de integración. Ya que $R = r/\cos\theta$ y $dx = R\, d\theta/\cos\theta$, la integral se convierte en:

$$E_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \gamma} \tag{26}$$

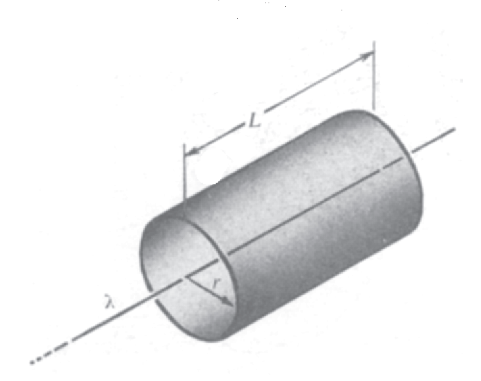
Vemos que el campo de una línea cargada infinitamente larga y con densidad lineal de carga constante, es proporcional al recíproco de la distancia a la línea. Su dirección es radial y el sentido hacia fuera si la línea contiene carga positiva y hacia ella si es negativa.

La ley de Gauss conduce directamente al mismo resultado. Rodeando un segmento de la línea cargada con un cilindro circular de longitud L y radio r, como en la Fig. 1.22, consideremos el flujo a través de esta superficie. Como ya hemos advertido, la simetría garantiza que el campo sea radial, así que el flujo a través de las bases del cilindro es nulo. El flujo a través de la superficie lateral es igual al área, $2\pi rL$, por E_r, el campo en la superficie. Por otro lado, la carga encerrada en la superficie es λL, así que la ley de Gauss nos da $2\pi rLE_r = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L$, o sea

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \gamma} \tag{27}$$

que concuerda con la Ec. 26.

Fig. 1.22 Empleo de la ley de Gauss para hallar el campo de una carga lineal.



1.13 *Campo de una distribución de carga plana e indefinida*

Se llama *distribución superficial de carga* a la carga eléctrica distribuida de manera continua en una lámina delgada. Consideremos

una lámina plana indefinida, con densidad superficial σ constante. El campo eléctrico a cada lado de la lámina, sea cual fuere su módulo, indudablemente debe estar dirigido perpendicularmente al plano de la lámina; es la única dirección posible en el sistema. También a causa de la simetría, el campo debe tener el mismo módulo y sentidos contrarios en dos puntos P y P' equidistantes de la lámina en lados opuestos. Establecido esto, la ley de Gauss nos da inmediatamente la intensidad de campo, operando como sigue: dibujemos un cilindro, como en la Fig. 1.23, con P a un lado y P' en el otro, cuya sección recta tiene área A. El flujo saliente solamente se halla en los extremos, así que si E_P denota el módulo del campo en P, y E_p' el módulo en P', el flujo saliente es $AE_P + AE_{P'} = 2AE_P$. La carga en el interior es σA. De donde $2AE_P = \sigma A/\varepsilon_0$, o bien

$$E_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{28}$$

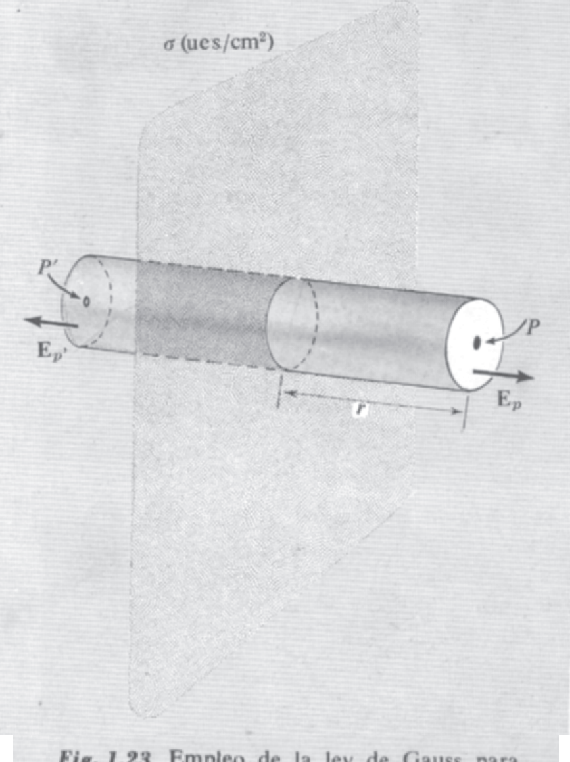


Fig. 1.23 Empleo de la ley de Gauss para hallar el campo de una lámina plana e indefinida de carga.

Vemos que la intensidad del campo es independiente de r, la distancia a la lámina. La ecuación 28 podría deducirse de manera más laboriosa calculando el vector suma de las contribuciones al campo en P de todos los pequeños elementos de carga en la lámina.

El campo de una línea cargada indefinida, varía inversamente a la distancia a la línea, mientras que el campo de una lámina indefinida tiene la misma intensidad a cualquier distancia. Hablando de manera aproximada, la parte de la línea cargada que es principalmente responsable del campo en P, en la Fig. 1.21, es la parte próxima — la carga dentro de una distancia del orden de magnitud r. Si las agrupamos y no tenemos en cuenta las demás, tenemos una carga concentrada de valor $q \approx \lambda r$, la cual debe producir un campo proporcional a $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, o a $\lambda/4\pi\varepsilon_0 r$. En este caso de la lámina, la cantidad de carga que es «efectiva» en este sentido, aumenta proporcionalmente a r^2 cuando nos separamos de la lámina, lo cual compensa precisamente la disminución $1/r^2$ en el campo de cualquier elemento dado de carga.

1.14 Fuerza sobre una capa de carga

La esfera de la Fig. 1.24 tiene una carga distribuida sobre su superficie con la densidad uniforme σ c/m². Dentro de la esfera, como ya hemos aprendido, el campo eléctrico de tal distribución de carga es nulo. Fuera de la esfera el campo es $Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, donde Q es la carga total de la esfera, igual a $4\pi r_0^2\sigma$. Justo fuera de la esfera, muy próximo a su superficie, la intensidad del campo es σ/ε_0. Comparemos esto con la Ec. 28 y la Fig. 1.23. En ambos casos se cumple la ley de Gauss: la *variación* de E, de un lado al otro de la capa, es igual a σ/ε_0.

¿Cuál es la fuerza eléctrica experimentada por las cargas que constituyen esta distribución? Al principio la cuestión puede parecer desconcertante debido a que el campo E se debe a estas mismas cargas. Lo que debemos considerar es la fuerza sobre cierta carga ele-

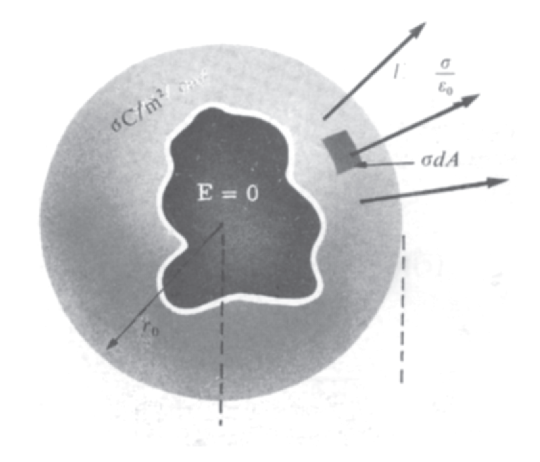
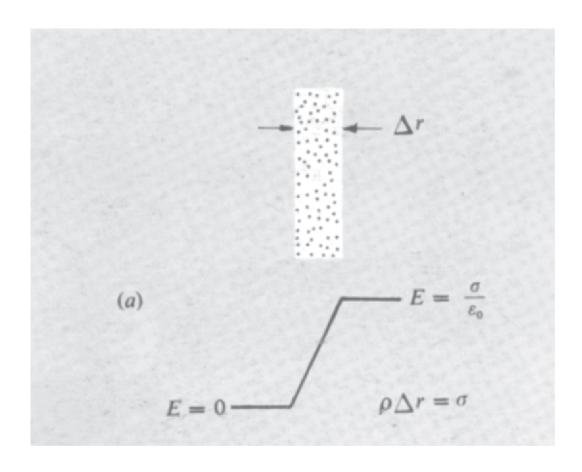
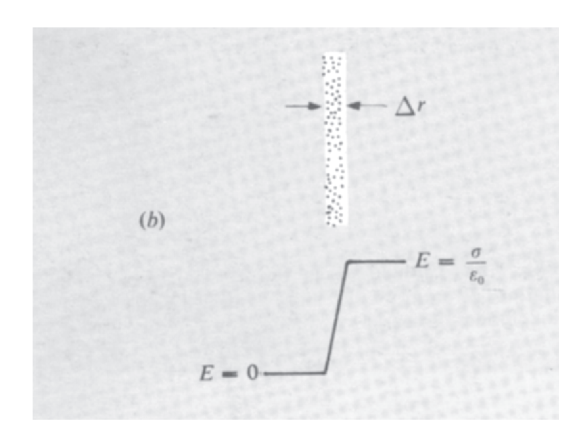


Fig. 1.24 Una superficie esférica con densidad de carga uniforme σ.





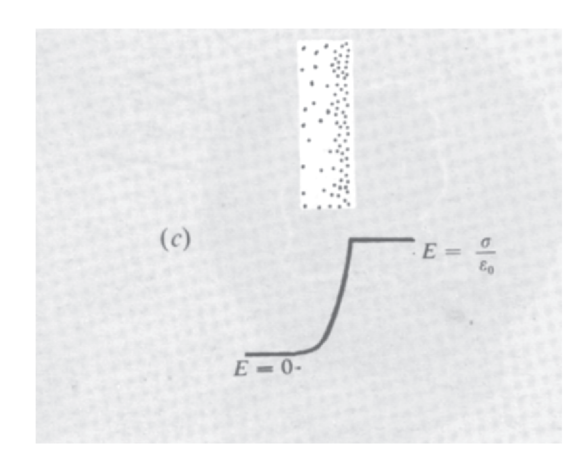


Fig. 1.25 La variación del campo resultante en una capa de la carga depende solamente de la carga total por unidad de superficie.

mental dq, tal como un trocito de superficie dA con carga $dq = \sigma\, dA$. Consideremos, separadamente, las fuerza sobre dq debida a todas las demás cargas de la distribución, y la fuerza sobre el trocito debido a las cargas del propio trozo. Esta última fuerza seguramente es nula. La repulsión de Coulomb entre las cargas dentro del trozo es otro ejemplo de la tercera ley de Newton; el trozo en conjunto no puede empujarse a sí mismo. Esto simplifica nuestro problema, pues nos permite usar el campo eléctrico **E** entero, *incluyendo* el campo debido a todas las cargas del trozo, al calcular la fuerza dF sobre el elemento de carga dq:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}\, dq = \mathbf{E}\, \sigma\, dA \tag{29}$$

¿Pero qué campo E usaremos, el campo $E = \sigma/\varepsilon_0$ fuera de la esfera o el campo $E = 0$ dentro? La contestación correcta, como demostraremos pronto, es el *promedio* de los dos campos.

$$dF = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + 0\right)\sigma\, dA = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, dA \tag{30}$$

Para justificar esto consideremos un caso más general, uno que introducirá un cuadro más real de la carga superficial. Las capas reales de carga no tienen espesor nulo. La Figura 1.25 presenta algunas maneras en que la carga puede distribuirse a lo largo del espesor de una capa. En cada ejemplo el valor de σ, la carga total por unidad de superficie de la capa, es la misma. Estas pueden ser secciones rectas de una pequeña porción de la superficie esférica en la Fig. 1.24 a una escala tal que la curvatura no sea apreciable. Sin embargo, para hacerlo más general, haremos que el campo a la izquierda sea E_1 (en vez de 0, como ocurre en el interior de la esfera), con E_2 la intensidad del campo a la derecha. La condición impuesta por la ley de Gauss, para un σ dada, es en cada caso

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{31}$$

Ahora examinemos cuidadosamente la capa donde el campo va cambiando continuamente de E_1 a E_2 y hay una densidad cúbica de carga $\rho(x)$ que se extiende desde $x = 0$ a $x = x_0$, el espesor de la capa (Fig. 1.26). Consideremos una lámina mucho más delgada, de espesor $dx \ll x_0$, que contiene por unidad de superficie una carga $\rho\, dx$. La fuerza sobre ella es

$$dF = E\rho\, dx \tag{32}$$

Así que la fuerza total por unidad de superficie de nuestra capa es

$$F = \int_0^{x_0} E\rho\, dx \tag{33}$$

Pero la ley de Gauss nos dice que dE, la variación de E a través de una lámina delgada, es precisamente $\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho\, dx$. De donde $\rho\, dx$ en la Ec. 33 puede sustituirse por $\varepsilon_0\, dE$, y la integral se convierte en

$$F = \varepsilon_0 \int_{E_1}^{E_2} E dE = \frac{\varepsilon_0}{2}\,(E_2^2 - E_1^2) \tag{34}$$

Ya que $E_2 - E_1 = \sigma/\varepsilon_0$, el resultado de la Ec. 34, una vez simplificado puede expresarse como

$$F = \tfrac{1}{2}(E_1 + E_2)\sigma \tag{35}$$

Hemos demostrado, como prometimos, que para una σ dada la fuerza por unidad de superficie en una capa de carga está determinada por la media del campo externo a un lado y otro de la capa*. Esto es independiente del espesor de la capa, mientras sea pequeño comparado con la superficie total, y de la variación $\rho(x)$ de la densidad de carga dentro de la capa.

El sentido de la fuerza eléctrica sobre un elemento de carga sobre la esfera es, por supuesto, hacia fuera tanto si la carga superficial es positiva como negativa. Si las cargas no escapan de la esfera, esta fuerza hacia fuera debe estar equilibrada por alguna fuerza hacia dentro, no incluida en nuestras ecuaciones, que puede mantener los portadores de carga en su sitio. Llamar a esta fuerza «no eléctrica» sería falso, pues las atracciones y repulsiones eléctricas son las fuerzas dominantes en la estructura de los átomos y en la cohesión de la materia en general. La diferencia es que estas fuerzas solamente son efectivas a cortas distancias, de átomo a átomo, o de electrón a electrón. La Física a esta escala es una historia de partículas individuales. Imaginemos un globo de goma cargado, de 0,10 m de radio, con $6 \cdot 10^{-9}$ C de carga negativa distribuida tan uniformemente como sea posible sobre su superficie externa. Forma una carga superficial de densidad $\sigma = 6 \cdot 10^{-9}/0{,}04\pi = 4{,}77 \cdot 10^{-8}$ C/m^2. La fuerza resultante hacia fuera por m^2 de carga superficial es $\sigma^2/2\varepsilon_0$, o, 1,289 N/m^2. En realidad nuestra carga consta de unos $37 \cdot 10^9$ electrones prendidos en la película de goma. Como hay unos $30 \cdot 10^{10}$ electrones extra por m^2, la «granulación» en distribución de carga es difícilmente evidente. Sin embargo, si pudiésemos contemplar uno de estos electrones extra, lo hallaríamos a unos 10^{-6} m (una distancia enorme a escala atómica) de su vecino más próximo. Este electrón estaría fijado, fijado eléctricamente, a una molécula local de la goma. La molécula de goma estaría ligada a las moléculas de goma adyacentes, y así sucesivamente. Si empujamos un electrón, la fuerza se transmite de esta manera a toda la pieza de goma. Por supuesto que, a menos que se empuje suficientemente fuerte para separar al electrón de la molécula a la que está ligado. Esto tendría lugar en un campo eléctrico muchos miles de veces más intenso que el campo de nuestro ejemplo.

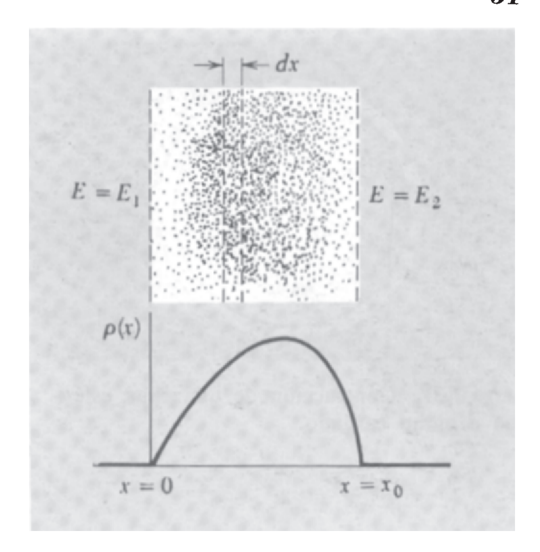


Fig. 1.26 Dentro de la capa de carga de densidad $\rho(x)$; $E(x + dx) - E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho\, dx$.

* Adviértase que esto *no* es necesariamente lo mismo que el campo medio dentro de la capa, una cantidad que no tiene interés ni importancia.

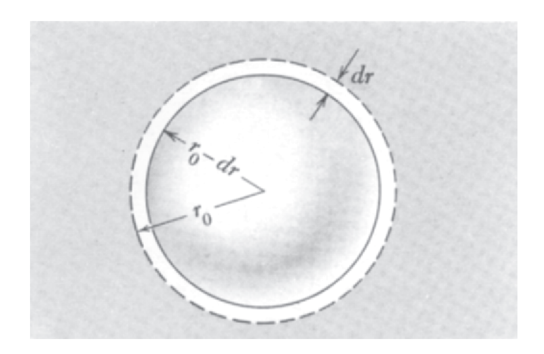


Fig. 1.27 Contracción de una capa esférica o globo cargado.

1.15 Energía asociada a un campo eléctrico

Supongamos que nuestra capa de carga esférica se comprime ligeramente, desde un radio inicial r_0 a otro más pequeño, como en la Fig. 1.27. Esto requiere efectuar trabajo contra la fuerza repulsiva, $\sigma^2/2\varepsilon_0$ dinas por cm² de superficie. Siendo el desplazamiento dr, el trabajo total es $(4\pi r_0^2)(\sigma^2/2\varepsilon_0)\, dr$, o bien, $2\pi/\varepsilon_0\, r_0^2\, \sigma^2\, dr$. Esto representa un *aumento* en la energía necesaria para reunir el sistema de cargas, la energía U citada en la Sección 1.5:

$$dU = \frac{2\pi}{\varepsilon_0} r_0^2 \sigma^2\, dr \tag{36}$$

Adviértase cómo ha cambiado el campo E. Dentro de la capa de espesor dr el campo era nulo y ahora es σ/ε_0. Más allá de r_0 el campo no ha cambiado. Hemos creado efectivamente un campo de intensidad $E = \sigma/\varepsilon_0$ que llena una región de volumen $4\pi r_0^2\, dr$. Lo hemos hecho así empleando una cantidad de energía dada por la Ec. 36, la cual, si sustituimos σ por $\varepsilon_0 E$, puede escribirse:

$$dU = \frac{E^2}{2\varepsilon_0} 4\pi r_0^2\, dr \tag{37}$$

Éste es un ejemplo de un teorema general, que ahora no demostraremos: *La energía potencial U de un sistema de cargas, la cual es el trabajo total requerido para formar el sistema, puede calcularse a partir del campo eléctrico propio simplemente asignando una cantidad de energía* $(E^2/8\pi)\, dv$ *a cada elemento de volumen* dv *e integrando para todo el espacio donde existe el campo eléctrico.*

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{Todo el}\\ \text{campo}}} E^2\, dv} \tag{38}$$

por descontado que E^2 es una magnitud escalar $E^2 \equiv \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$.

Puede imaginarse que esta energía está «almacenada» en el campo. Siendo el sistema conservativo, esta cantidad de energía puede, desde luego, ser recuperada permitiendo a las cargas separarse, de esta manera es cómodo pensar entre tanto que la energía « existe en alguna parte ». Nuestra consideración aparece correcta si imaginamos que está almacenada en el espacio con una densidad $E^2/8\pi$, en erg/cm³. No hay mal en ello, pero de hecho no hay manera de identificar, completamente independiente de cualquier cosa, la energía almacenada en un centímetro cúbico determinado del espacio. Solamente es físicamente medible la energía total, es decir, el trabajo requerido para trasladar la carga a determinada configuración, partiendo de alguna otra configuración distinta. Lo mismo que el concepto de campo eléctrico se utiliza en vez de la ley de Coulomb para explicar el comportamiento de las cargas eléctricas cuando usamos la Ec. 38 en vez de la Ec. 9 para expresar la energía potencial total de un sistema electrostático, estamos simplemente usando otra forma de contabilidad. Algunas veces un cambio de punto de vista, incluso si éste es al principio sólo un cambio de contabilidad, puede estimular nuevas ideas y un conocimiento más profundo. La noción de campo eléctrico, como un ente independiente, adquirirá personalidad propia cuando estudiemos el comportamiento dinámico de la materia cargada y la radiación electromagnética.

Nos encontramos con un inconveniente si intentamos aplicar la Ec. 38 a un sistema que contenga una carga puntiforme, es decir, una carga finita q de tamaño nulo. Localicemos a q en el origen de coordenadas. Cerca del origen, E^2 tiende a $q^2/(4\pi\varepsilon_0)^2r^4$. Con $dv = 4\pi\, r^2\, dr$, el integrando $E^2\, dv$ se comporta como $dr/4\pi\varepsilon_0\, r^2$, y nuestra integral se hace infinitamente grande para $r = 0$. Esto nos indica simplemente que se emplearía energía infinita para empaquetar una carga finita en un volumen nulo —lo cual es cierto pero no útil. En el mundo real tratamos con partículas como electrones y protones. Son tan pequeños para la mayoría de propósitos que podemos ignorar sus dimensiones y considerarlas como cargas puntiformes al considerar su interacción eléctrica mutua. Cuánta energía se ha empleado en formar tales partículas es una cuestión que va más allá del electromagnetismo clásico. Hemos de considerar las partículas como suministradas ya hechas. La energía que nos interesa es el trabajo efectuado al moverlas de un lado a otro.

La distinción es corrientemente clara. Consideremos dos partículas cargadas, un protón y un pión negativo, por ejemplo. Sea $\mathbf{E}_p$ el campo eléctrico del protón, $\mathbf{E}_\pi$ el del pión. El campo total es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_\pi$, y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E_p^2 + E_\pi^2 + 2\mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_\pi$. Según la Ec. 38 la energía total en el campo eléctrico de un sistema de dos partículas es

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_p^2\, dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_\pi^2\, dv + \varepsilon_0\int \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_\pi\, dv \qquad (39)$$

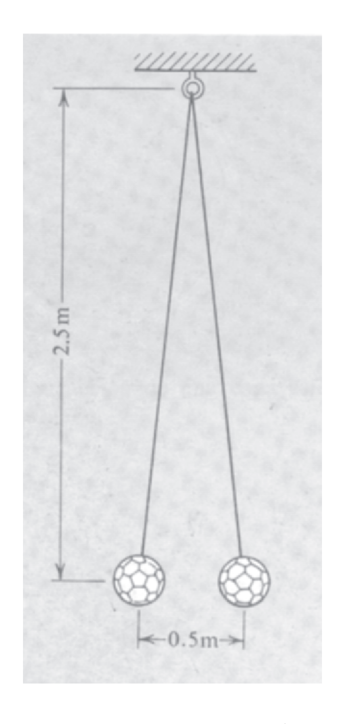
El valor de la primera integral es una propiedad de un protón aislado. Es una constante de la naturaleza que no cambia al moverse el protón de un lado a otro. Lo mismo le ocurre a la segunda, implicando solamente al campo eléctrico del pión. Es la tercera integral la que nos concierne directamente, pues expresa la energía requerida para reunir el sistema *dados* un protón y un pión como constituyentes.

La distinción falla si las dos partículas interactuasen tan fuertemente que la estructura eléctrica de una se distorsionase por la presencia de la otra. Sabiendo que ambas partículas son compuestas, en cierto sentido (el protón consta de tres quarks y el pión de dos), podemos esperar que esto ocurra en una estrecha aproximación. En realidad, no ocurre por debajo de 10^{-13} cm. A distancias más cortas, para las partículas que interaccionan fuertemente como el protón y el pión, dominan otras fuerzas no eléctricas.

Esto explica por qué no necesitamos incluir los términos de la «autoenergía» como las dos primeras integrales de la Ec. 39 en nuestro cómputo de energía en un sistema de partículas elementales cargadas. En realidad, deseamos omitirlas. En efecto, estamos haciendo igual que cuando reemplazamos la distribución real de cargas discretas (los electrones en el globo de goma) por una distribución de carga perfectamente continua.

Problemas

1.1 En el dominio de las partículas elementales, una unidad natural de masa es la masa de un *nucleón,* es decir, un protón o un neutrón, los mate-



Prob. 1.3

riales macizos para construir la materia ordinaria. Dada la masa del nucleón como $1{,}6 \times 10^{-24}$ g y la constante de gravitación $G = 6{,}7 \times 10^{-8}$ cm^3/gs^2, comparar la atracción gravitatoria de dos protones con su repulsión electrostática. Esto demuestra por qué a la gravitación la llamamos fuerza muy *débil*. La distancia entre dos protones en el núcleo del helio puede ser en cierto instante de unos 10^{-13} cm. ¿Cuál es la fuerza de repulsión eléctrica entre dos protones a esta distancia? Expresarla en newton. Incluso es más intensa la fuerza ***nuclear*** que actúa entre un par de hadrones (incluyendo protones y neutrones) cuando están tan próximos.

1.2 ¿En la hipótesis enteramente irreal de que no hubiese ninguna otra partícula en las proximidades, a qué distancia debajo de un protón la fuerza sobre un electrón hacia arriba sería igual al peso del electrón? (Masa del electrón, 10^{-30} kg).

1.3 Dos balones de volea, de masa 0,3 kilogramos cada uno, sujetos por hilos de nilon y cargados con un generador electrostático, penden como indica la figura. ¿Cuál es la carga de cada uno, en coulombs, suponiendo que las cargas son iguales? (***Recuérdese:*** el peso de la masa de 1 kg en la tierra es de 9,8 N, tal como el de 1 g masa es de 980 dinas.)

1.4 En cada vértice de un cuadrado hay una partícula con la carga q. En el centro del cuadrado está fija una carga puntiforme de signo contrario, de valor Q. ¿Cuál debe ser el valor de Q para que la fuerza total sobre cada una de las cuatro partículas sea nula? Dando a Q este valor, el sistema en ausencia de otras fuerzas, está en equilibrio. ¿El equilibrio es estable?

Solución: $Q = 0{,}957\, q$.

1.5 Una delgada varilla de plástico encorvada en una semicircunferencia de radio R tiene una carga Q, en ues, distribuida uniformemente sobre su longitud. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el centro de la semicircunferencia.

1.6 Tres cargas positivas A, B y C, de $3 \cdot 10^{-6}$, $2 \cdot 10^{-6}$ y $2 \cdot 10^{-6}$ coulombs, respectivamente, están localizadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado 0,2 m.

(a) Hallar, en newton, el módulo de la fuerza sobre cada carga.

(b) Hallar, en newton/coulomb, el módulo del campo eléctrico en el centro del triángulo.

Solución: *(a)* 2,34 N en A, 1,96 N en B y C.
(b) $6{,}74 \cdot 10^5$ N/C.

1.7 Determínese una disposición geométrica de un protón y dos electrones tal que la energía potencial del sistema sea exactamente igual a cero. ¿Cuántas de estas disposiciones existen con las tres partículas alineadas?

1.8 Calcular la energía potencial, por ion, en un cristal iónico unidimensional indefinido, es decir, una fila de cargas equidistantes de valor e y alternando el signo. (***Sugerencia:*** Puede usarse el desarrollo en serie de log $(1 + x)$).

1.9 Un volumen esférico de radio a está lleno con carga de densidad uniforme ρ. Deseamos saber la energía potencial U de esta distribución esférica de cargas, es decir, el trabajo efectuado al reunirla. Calcularlo formando la esfera capa a capa, usando el hecho de que el campo exterior a una distribución esférica de cargas es el mismo que si toda la carga estuviese en el centro. Supongamos que el radio de la esfera construida es r. ¿Cuál es la carga total en este estado? Ahora añadamos una capa infinitamente delgada de espesor dr; ¿cuánto vale el trabajo dU efectuado para trasladar la carga de esta capa desde el infinito al radio r? Integremos ahora desde $r = 0$ a $r = a$. Expresar el resultado en función de la carga total Q en la esfera.

Solución: $U = \frac{3}{5}(Q^2/a)$.

1.10 A principios de siglo, la idea de que la masa en reposo de un electrón pueda tener un origen puramente eléctrico, fue muy atractiva, especialmente cuando la relatividad restringida reveló la equivalencia de masa y

energía. Imaginemos al electrón como una distribución esférica de carga, de densidad cúbica constante, con un radio máximo r_0. Utilizando el resultado del problema 1.9, considerando que la energía potencial de este sistema es igual a mc^2, veamos que valor hallamos para r_0. Este modelo tiene un defecto manifiesto: Nada se ha previsto para que las cargas se mantengan juntas.

1.11 Una carga de $10^{-9}/3$ C está en el origen. Una carga de $-2 \cdot 10^{-9}/3$ C está en $x = 1$ sobre el eje.

(a) Hallar un punto sobre el eje x donde el campo eléctrico sea nulo.

(b) Localizar, al menos aproximadamente, un punto del eje y donde el campo eléctrico sea paralelo al eje x. [Una calculadora ayudaría en *(b)*.]

1.12 Otro problema para la calculadora: Dos iones positivos y otro negativo están fijos en los vértices de un triángulo equilátero. ¿Dónde colocaremos un cuarto ión para que la fuerza sobre él sea nula? ¿Hay más de un lugar?

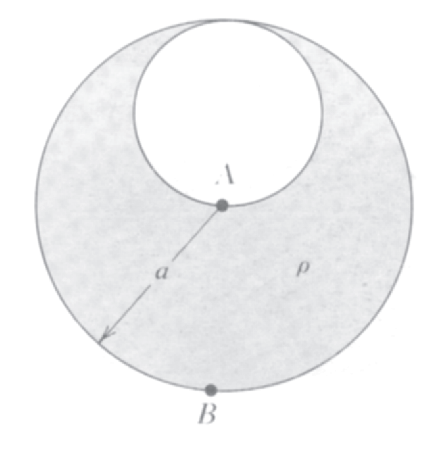
1.13 El paso de una nube tormentosa recalentada hace que la intensidad del campo eléctrico en la atmósfera, medido en la tierra, aumente en $3 \cdot 10^3$ N/C.

(a) ¿Qué carga contiene la nube, en C por m² de área horizontal?

(b) Supongamos que la nube contenga suficiente agua en la forma de gotas de 1 milímetro de diámetro para producir 0,25 cm de lluvia, siendo las gotas las que transportan la carga. ¿Cual era la intensidad del campo eléctrico en la superficie de una de las gotas?

1.14 Una carga Q se distribuye uniformemente en un anillo delgado de radio b que está en el plano xy con su centro en el origen. Hallar el punto sobre el eje z positivo en donde el campo eléctrico sea más intenso.

1.15 Consideremos una distribución esférica de carga que tiene una densidad constante ρ desde $r = 0$ a $r = a$ y es nula más allá. Hallar el campo eléctrico para todos los valores de r, tanto menores como mayores que a. ¿Hay una variación discontinua en el campo cuando pasamos la superficie de la carga a $r = a$? ¿Hay discontinuidad en $r = 0$?



Prob. 1.16

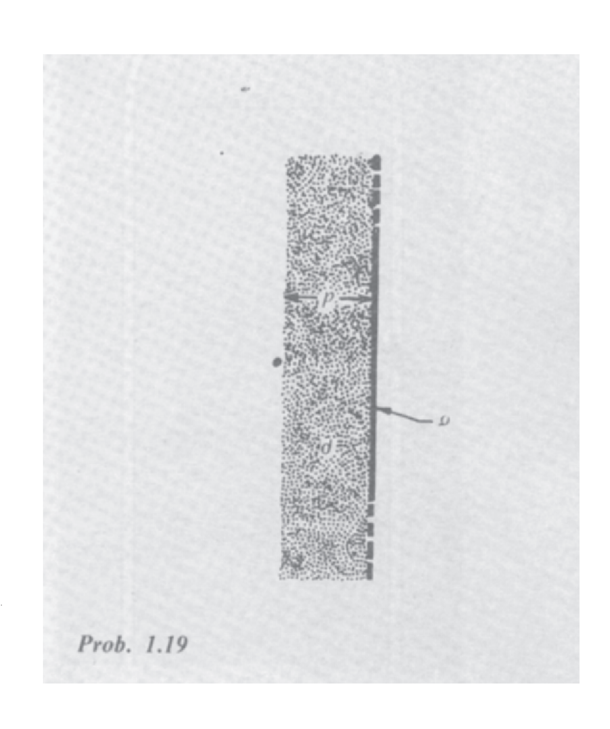
1.16 La esfera de radio a estaba llena de carga positiva y densidad uniforme ρ. Luego se practica un orificio esférico menor de radio $a/2$, como muestra la figura, y se deja vacío. ¿Cuál es el valor y la dirección del campo eléctrico en A? ¿ Y en B?

1.17 (*a*) Una carga puntiforme q está situada en el centro de un cubo cuya arista tiene una longitud d. ¿Cuál es el valor de $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ en *una cara* del cubo?

(*b*) La carga q se traslada a un vértice del cubo. ¿Cuál es el valor del flujo de **E** a través de cada una de las caras del cubo?

1.18 Dos láminas planas, paralelas e indefinidas, cargadas con una densidad $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}/3$ C/m² y $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ C/m², distan 2 cm. Estudiar el campo eléctrico de este sistema. Supongamos que dichos planos en vez de ser paralelos se cortan perpendicularmente. Demostrar que el campo es el mismo en las cuatro regiones que ellos determinan en el espacio.

1.19 Un plano indefinido tiene una distribución superficial de carga uniforme σ en su superficie. Inmediatamente a la derecha existe una capa indefinida paralela de espesor d cargada con una densidad cúbica ρ constante. Todas las cargas están fijas. Hallar **E** en cualquier punto.



Prob. 1.19

1.20 Consideremos una distribución de carga en la forma de un cilindro circular, como un tubo largo cargado. Demostrar que el campo en el interior del tubo es nulo. Demostrar que el campo en el exterior es el mismo que si toda la carga estuviese en el eje. ¿Es cierto lo mismo en el caso de un tubo de sección recta cuadrada en el cual la carga esté distribuida con densidad superficial uniforme?

1.21 Un átomo neutro de hidrógeno en su estado normal se comporta *en algunos aspectos* como una distribución de carga eléctrica que consiste en una carga puntiforme de valor $+e$ rodeada por una distribución de carga ne-

gativa cuya densidad viene dada por $-\rho(r) = Ce^{-2r/a_0}$. Siendo a_0 el «radio de Bohr», $0{,}53 \times 10^{-10}$ m, y C una constante cuyo valor es el preciso para que el valor de la carga negativa sea exactamente e. Determinar el valor de la carga eléctrica total en el interior de una esfera de radio a_0 y el valor de la intensidad del campo eléctrico a esta distancia del núcleo.

1.22 Consideremos tres láminas planas cargadas, A, B y C. Las láminas son paralelas con B debajo A y C debajo B. Sobre cada lámina existe una carga superficial de densidad uniforme: $-\frac{4}{3} \times 10^{5}$ C/m² sobre A, $\frac{7}{3} \times 10^{-5}$ C/m² sobre B, y -10^{-5} C/m² sobre C. (La densidad dada incluye carga en ambos lados de la lámina.) ¿Cuál es el valor de la fuerza eléctrica sobre cada lámina, en N/m²? Comprobar que la fuerza total sobre las tres láminas es nula.

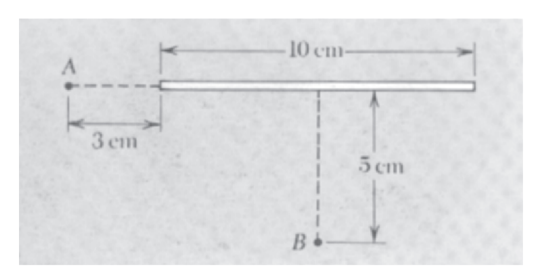
Solución: 3,2 N/m² sobre A; 1,4 N/m² sobre B; 1,8 N/m² sobre C.

1.23 Una esfera de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie. ¿Qué esfera contendrá el 90 por cien de la energía almacenada en el campo eléctrico de esta distribución de carga?

Solución: Radio $10R$.

1.24 Una varilla delgada de 10 cm de longitud tiene una carga total de $\frac{8}{3} \times 10^{-9}$ C distribuidas uniformemente a lo largo de su longitud. Hallar la intensidad del campo eléctrico en cada uno de los dos puntos A y B situados como se indica en el diagrama.

Prob. 1.24

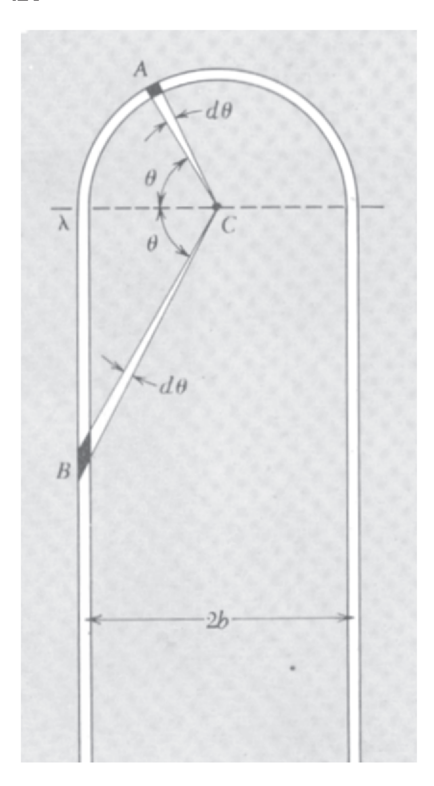


1.25 Recordemos la relación de la Ec. 27 $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}$

donde r va en metros, λ en coulomb/metro, y E en N/C. Consideremos una línea de corriente continua de alto voltaje que consta de dos conductores paralelos separados 3 metros. Las líneas están cargadas de signo opuesto. ¿Si la intensidad del campo eléctrico en el punto medio entre ellos es de 15 000 newton/coulomb, qué exceso de carga positiva existe en 1 km de longitud del conductor positivo?

1.26 Dos varillas largas, paralelas, separadas la distancia $2b$, se unen por una semicircunferencia de radio b, como se indica. Se deposita carga de densidad lineal uniforme λ a lo largo de todo el hilo. Demostrar que el campo $\mathbf{E}$ de esta distribución de carga se anula en el punto C. Para hacerlo compárese la contribución del elemento en A al del elemento en B definido por los mismos valores de θ y $d\theta$.

Prob. 1.26

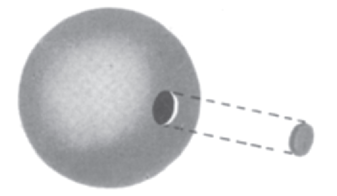


1.27 Un tablero de ajedrez infinito con cuadrados de lado s tiene una carga e en el centro de cada cuadrado blanco y la carga $-e$ en el centro de cada cuadrado negro. Nos interesa el trabajo W necesario para transportar una carga desde su posición en el tablero a una distancia infinita del mismo, a lo largo de un camino perpendicular al plano del tablero. Dado que W es finito (lo cual es plausible pero no fácil de probar), ¿será positivo o negativo? Para calcular un valor aproximado de W, consideremos que se quita la carga del cuadrado central de un tablero de 7 × 7. (En esta suma solamente intervienen 9 términos diferentes). O escribir un programa y calcular el trabajo para sacar la carga central de una distribución mucho mayor, por ejemplo, un tablero de 101 × 101. Comparando el resultado del tablero citado con uno de 99 × 99, y con uno de 103 × 103, podremos tener una idea de la razón de convergencia hacia el valor para la distribución infinita.

1.28 Tres protones y tres electrones están situados en los vértices de un octaedro regular de arista a. Deseamos hallar la energía del sistema, es decir, el trabajo necesario para reunirlos partiendo de las partículas muy separadas. Hay dos distribuciones esencialmente diferentes. ¿Cuál es la energía en cada caso?

Solución: $-0{,}03879/4\pi\varepsilon_0\, e^2/a$; $-0{,}02121/4\pi\varepsilon_0\, e^2/a$, *J*.

1.29 La figura presenta una capa esférica de carga, de radio a y densidad superficial σ, de la cual se quita una pequeña pieza circular de radio $b \ll a$. ¿Cuál es el módulo y la dirección del campo en la abertura? Hay dos maneras de obtener el resultado. Se puede integrar la distribución de carga que queda, para sumar las contribuciones de todos los elementos al campo en el punto en cuestión. O, recordando el principio de superposición, puede razonarse acerca del efecto de sustituir la pieza quitada, que es prácticamente un pequeño disco. Adviértase la conexión de este resultado con nuestra discusión de la fuerza sobre una carga superficial —quizá haya una tercera manera en que se pueda llegar al resultado.



Prob. 1.29

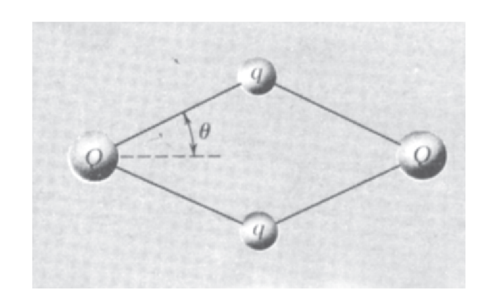
1.30 Capas esféricas concéntricas de radios a y b, con $b > a$, tienen la carga Q y $-Q$, respectivamente, cada carga uniformemente distribuida. Hallar la energía almacenada en el campo eléctrico de este sistema.

1.31 Como el globo de goma cargado descrito en la página 31, una pompa de jabón cargada experimenta una fuerza eléctrica hacia fuera en cada elemento de su superficie. Dada la carga total Q sobre la pompa de radio R, hallar el valor de la fuerza resultante que tiende a separar cualquier hemisferio, mitad de la pompa, de la otra mitad. (Cuando esta fuerza dividida por $2\pi R$ superase la tensión superficial de la película de jabón podría esperarse un interesante comportamiento.)

Solución: $Q^2/8R^2$.

1.32 Supongamos que tres partículas cargadas positivamente están constreñidas a moverse en una línea circular fija. Si todas las cargas fuesen iguales, una distribución de equilibrio sería, evidentemente, la simétrica con las partículas separadas 120° en torno a la circunferencia. Supongamos que dos de las cargas son iguales y la distribución de equilibrio es tal que estas dos cargas forman 90° en vez de 120°. ¿Cuál es el valor relativo de la tercera carga?

Solución: 3,154.



Prob. 1.34

1.33 Imaginemos una esfera de radio a llena de carga negativa de densidad uniforme, siendo la carga total equivalente a la de dos electrones. Embutidos en esta jalea de carga negativa hay dos protones y suponemos que a pesar de su presencia la distribución de carga negativa permanece uniforme. ¿Dónde debemos situar los protones para que la fuerza sobre cada uno de ellos sea nula? (Ésta es una caricatura sorprendentemente realista de una molécula de hidrógeno; la magia que evita que la nube de electrones en la molécula se colapse en torno los protones se explica por mecánica cuántica.)

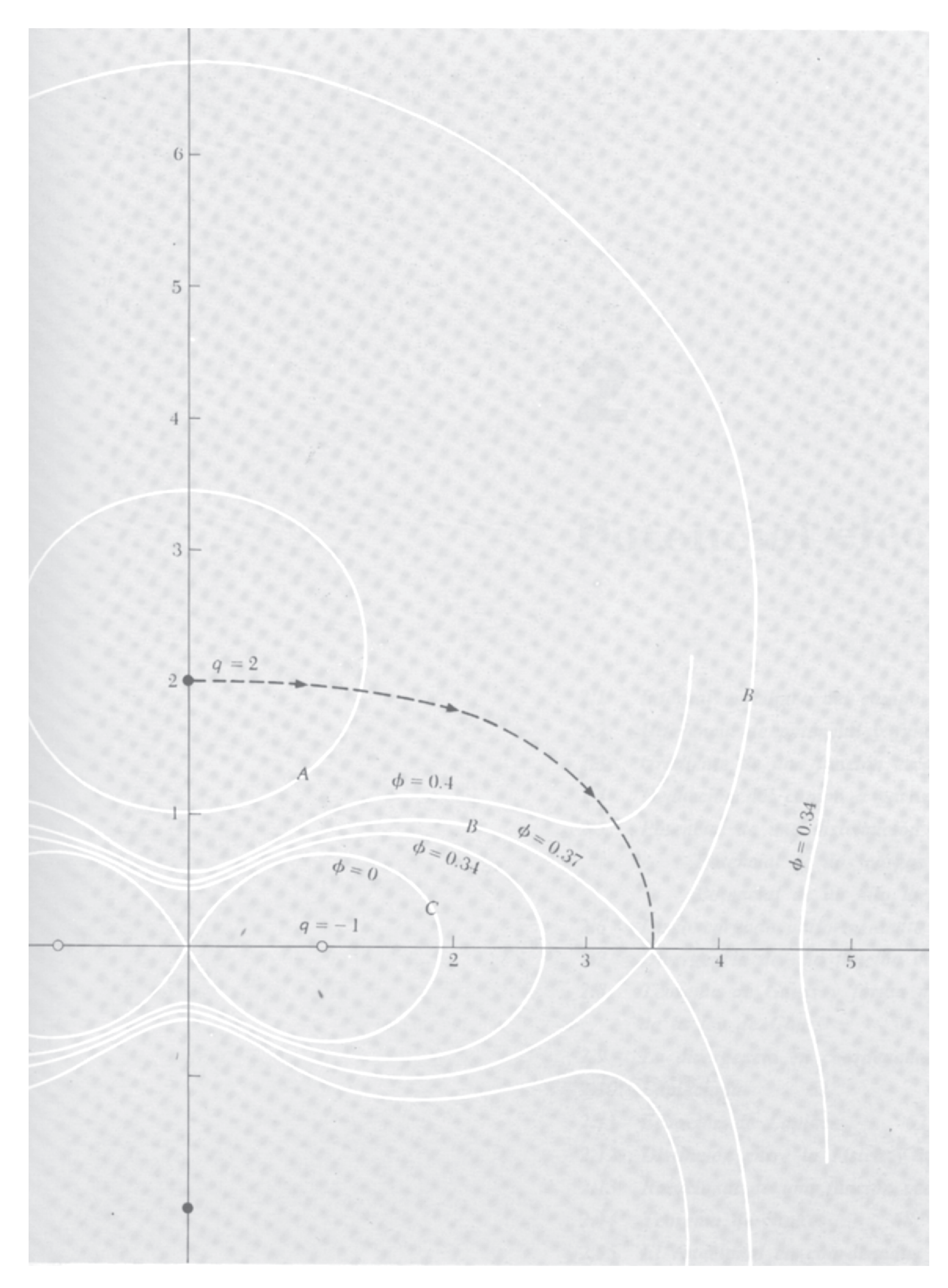
1.34 Cuatro cuerpos cargados positivamente, dos con carga Q y dos con carga q, están conectados mediante cuatro hilos inextensibles de la misma longitud. En ausencia de fuerzas externas adoptan la configuración de equilibrio mostrada en el diagrama. Demostrar que $\text{tg}^3\,\theta = Q^2/q^2$. Puede hacerse de dos maneras. Podría demostrarse que esta relación debe cumplirse si la fuerza total sobre cada cuerpo, el vector suma de la tensión del hilo y la repulsión eléctrica es nula. O podría escribirse la expresión de la energía U del sistema (como la Ec. 7 pero para cuatro cargas en vez de tres) y minimizarla.

1.35 Consideremos el campo eléctrico de dos protones separados b cm. Según la Ec. 1.38 (que hemos establecido pero no probado) la energía potencial del sistema debe venir dada por

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathbf{E}^2\,dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\,dv$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathbf{E}_1^2\,dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathbf{E}_2^2\,dv + \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\,dv$$

donde $\mathbf{E}_1$ es el campo de una sola partícula y $\mathbf{E}_2$ de la otra. La primera de las tres integrales del segundo miembro puede llamarse «autoenergía eléctrica» de un protón; una propiedad intrínseca de la partícula, que depende del tamaño y estructura del protón. Siempre lo hemos omitido en el cálculo de la energía potencial de un sistema de cargas, suponiendo que permanece constante; lo mismo ocurre con la segunda integral. La tercera integral implica la distancia entre las cargas. Esta integral no es difícil de evaluar, tomando coordenadas polares esféricas con uno de los protones en el origen y el otro sobre el eje polar, y efectuando la integración primero respecto a r. Así, por cálculo directo, puede demostrarse que la tercera integral tiene el valor $e^2/4\pi\varepsilon_0 b$, que ya sabemos que es el trabajo necesario para llevar los dos protones desde una distancia infinita a las posiciones separadas b. Hemos demostrado que la Ec. 38 es correcta en este caso, y teniendo en cuenta la superposición podemos razonar que la Ec. 38 debe dar la energía necesaria para reunir cualquier sistema de cargas.



Prob. 1.35

2

Potencial eléctrico

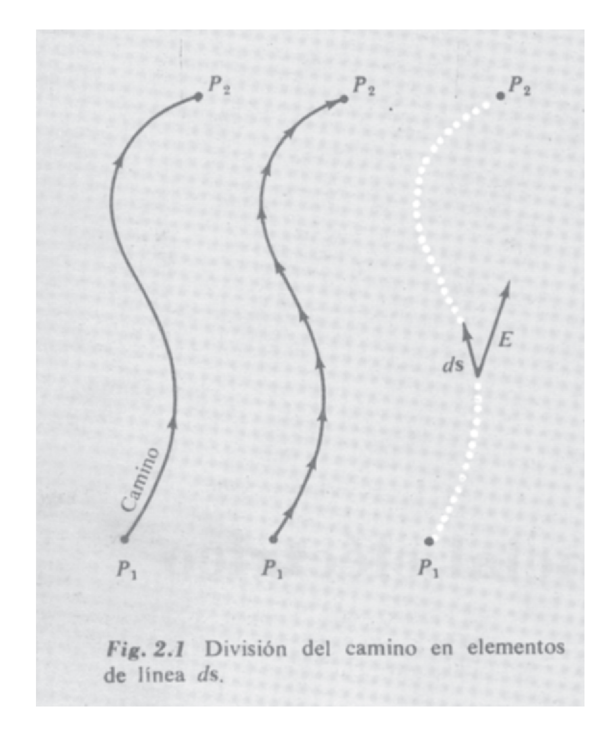


Fig. 2.1 División del camino en elementos de línea *ds*.

2.1 *Integral curvilínea del campo eléctrico*

Supongamos que **E** es el campo de cierta distribución estacionaria de cargas eléctricas. Designemos por P_1 y P_2 dos posiciones cualesquiera en el campo. La integral curvilínea de **E** entre los dos puntos dados es $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de cierto camino que va de P_1 a P_2, como en la Fig. 2.1. Esto significa: Dividir el camino en pequeños segmentos, representar cada segmento por un vector que una sus extremos; efectuar el producto escalar del vector segmento de camino por el campo **E** en este lugar; sumar estos productos para todo el camino. Corrientemente la integral se considera que es el límite de esta suma al hacer los segmentos cada vez más pequeños y numerosos.

Consideremos el campo de una carga puntiforme q y ciertos caminos que vayan del punto P_1 al punto P_2 en el campo. En la Fig. 2.2 se muestran dos caminos diferentes. Es fácil calcular la integral curvilínea de **E** a lo largo del camino A, que consta de un segmento radial que parte de P_1 y un arco de radio r_2. A lo largo del segmento radial del camino A, **E** y $d\mathbf{s}$ son paralelos, el módulo de **E** es $q4\pi\varepsilon_0 r^2$, y $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (q4\pi\varepsilon_0 r^2)ds$. Así que la integral curvilínea sobre tal segmento es

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,dr}{r^2} = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{1}$$

El segundo brazo del camino A, el segmento circular, da cero, pues **E** es perpendicular a $d\mathbf{s}$ en todo punto del arco. La integral curvilínea total es por tanto

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{2}$$

Ahora veamos el camino $B \cdot A$ causa de que **E** es radial con módulo $q4\pi\varepsilon_0 r^2$, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (q4\pi\varepsilon_0 r^2)dr$ incluso cuando $d\mathbf{s}$ no esté orientado radialmente. Los trozos correspondientes de camino A y camino B indicados en el diagrama aportan idénticas contribuciones a la integral. La parte de camino B que forma bucle más allá de r_2 aporta una contribución neta nula; las contribuciones de las partes salientes y entrantes se anulan. Para la integral curvilínea total, el camino B dará el mismo resultado que el camino A. Como no hay nada especial en el camino B, ·la Ec.1 debe cumplirse para *cualquier* camino que vaya de P_1 a P_2.

Aquí hemos repetido esencialmente, en diferente lenguaje, el razonamiento de la Sec. 1.5, ilustrado en la Fig. 1.5, respecto al trabajo efectuado al acercar una carga puntiforme a otra. Pero ahora estamos implicados en el campo eléctrico total producido por cualquier distribución de cargas. Un paso más nos conducirá a una importante conclusión. La integral curvilínea de la suma de campos es igual a la suma de las integrales curvilíneas de los campos calculados separada-

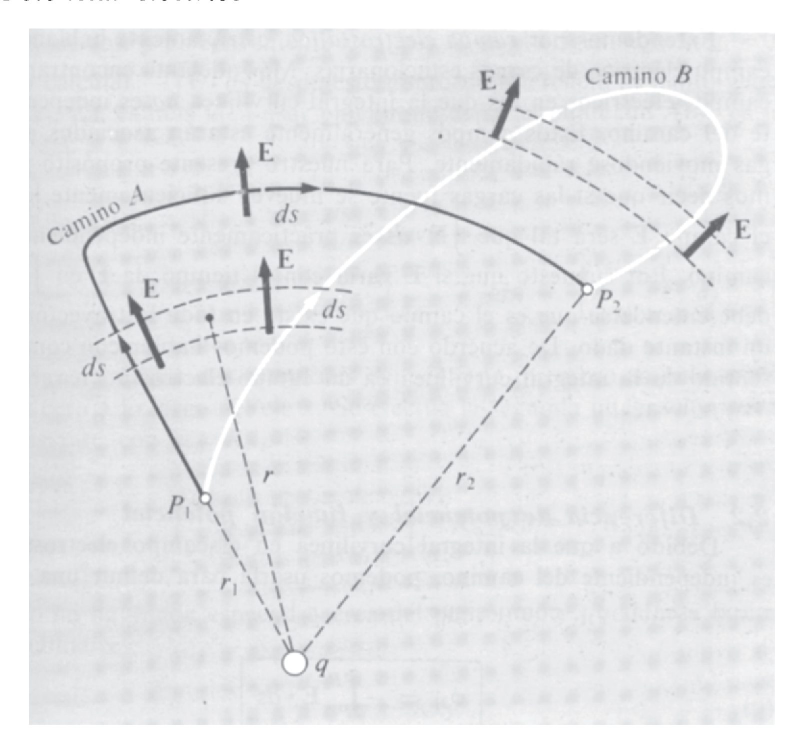


Fig. 2.2 El campo eléctrico **E** es el de una carga puntiforme positiva q. La integral curvilínea de **E** desde P_1 a P_2 a lo largo del camino A tiene el valor $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q(1/r_1 - 1/r_2)$. Tenemos exactamente el mismo valor si la calculamos para el camino B, o para cualquier otro camino de P_1 a P_2.

mente. O, expresado más cuidadosamente, si $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots$, entonces

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E_1} \cdot d\mathbf{s} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E_2} \cdot d\mathbf{s} + \ldots \qquad (3)$$

donde se ha utilizado el mismo camino para todas las integraciones. Cualquier campo electrostático puede considerarse como la suma de cierto número de campos de cargas puntiformes (posiblemente enorme), como se expresa en la Ec. 1.14 ó 1.15. Por tanto si la integral curvilínea de P_1 a P_2 es independiente del camino para cada uno de los campos $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$... de las cargas puntiformes, el campo total **E** debe tener esta propiedad:

> La integral curvilínea $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ para cualquier campo electrostático **E** tiene el mismo valor para todos los caminos de P_1 a P_2. (4)

Los puntos P_1 y P_2 pueden coincidir. En este caso todos los caminos son curvas cerradas, entre ellos, caminos de longitud nula. Esto conduce al corolario:

> La integral curvilínea $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ en torno de cualquier camino cerrado en un campo electrostático es nula. (5)

Entendemos por *campo electrostático,* estrictamente hablando, el campo eléctrico de cargas estacionarias. Más adelante encontraremos campos eléctricos en los que la integral curvilínea *no* es independiente del camino. Estos campos generalmente estarán asociados a cargas moviéndose rápidamente. Para nuestro presente propósito podemos decir que si las cargas fuente se mueven suficientemente lentas, el campo **E** será tal que $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es prácticamente independiente del camino. Por supuesto que si **E** varía con el tiempo, la **E** en $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ debe entenderse que es el campo que existe en toda la trayectoria en un instante dado. De acuerdo con esto podemos hablar con completo sentido de la integral curvilínea en un campo electrostático variable.

2.2 Diferencia de potencial y función potencial

Debido a que la integral curvilínea en el campo electrostático es independiente del camino, podemos usarla para definir una magnitud escalar ϕ_{21}, como sigue:

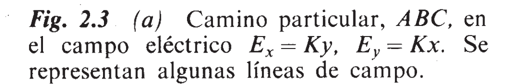
$$\boxed{\phi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \tag{6}$$

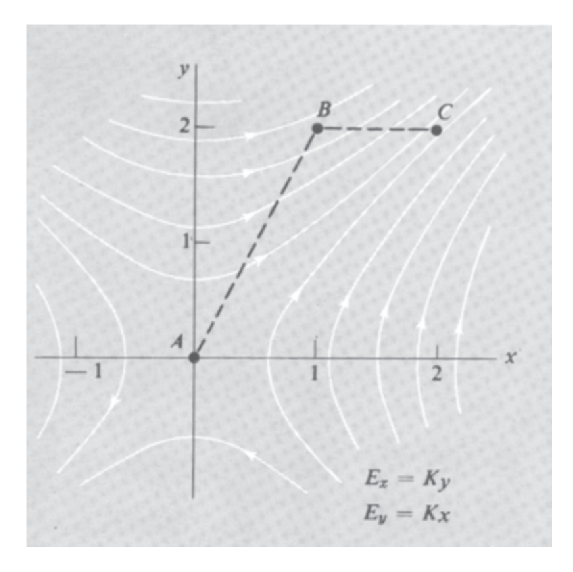
Así que ϕ_{21} es el *trabajo por unidad de carga* efectuado al mover una carga positiva desde P_1 a P_2 en el campo **E.** Así pues, ϕ_{21} es una función escalar unívoca de las dos posiciones P_1 y P_2. Nosotros la llamamos *diferencia de potencial* entre los dos puntos.

El *volt* es la unidad de diferencia de potencial en unidades SI. Un joule es el trabajo necesario para trasladar la carga de un coulomb de un punto a otro entre los cuales la diferencia de potencial es de un volt.

Supongamos que mantenemos P_1 fijo en cierta posición de referencia. Entonces ϕ_{21} es función solamente de P_2, es decir, función de las coordenadas espaciales x, y, z. Podemos escribir esto simplemente $\phi(x, y, z)$, sin los subíndices, si recordamos que su definición siempre implica convenio de un punto de referencia P_1. Podemos decir que ϕ es el *potencial* asociado con el vector campo **E.** Es una función escalar de la posición, o un campo de escalares (significan la misma cosa). Su valor en un punto es simplemente un número (en unidades de trabajo por unidad de carga) y no tiene dirección asociada a él. Una vez dado el vector campo **E,** la función potencial ϕ está determinada, salvo una constante arbitraria aditiva debida a la arbitrariedad en nuestra elección de P_1.

Como ejemplo, hallemos el potencial asociado con el campo eléctrico representado en la Fig. 2.3, las componentes del cual son: $E_x = Ky$, $E_y = Kx$, $E_z = 0$, siendo K una constante. Éste es un posible campo electrostático. Se han representado algunas líneas de campo. Ya que $E_z = 0$, el potencial será independiente de z, solamente necesitaremos considerar el plano xy. Sean x_1, y_1 las coordenadas de P_1,


Fig. 2.3 *(a)* Camino particular, *ABC,* en el campo eléctrico $E_x = Ky$, $E_y = Kx$. Se representan algunas líneas de campo.



x_2, y_2 las de P_2. Es conveniente localizar P_1 en el origen: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Para calcular $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ desde este punto de referencia al punto general (x_2, y_2), es más fácil usar un camino como el punteado ABC en la Fig. 2.3.

$$\phi(x_2, y_2) = -\int_{(0,0)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\int_{(0,0)}^{(x_2,0)} E_x\, dx - \int_{(x_2,0)}^{(x_2,y_2)} E_y\, dy \qquad (7)$$

La primera de las dos integrales del segundo miembro es nula, pues E_x es cero a lo largo del eje x. Se efectúa la segunda integración para x constante, con $E_y = Kx_2$:

$$-\int_{(x_2,0)}^{(x_2,y_2)} E_y\, dy = -\int_0^{y_2} Kx_2\, dy = -Kx_2y_2 \qquad (8)$$

Como no hay nada especial acerca del punto (x_2, y_2) podemos quitar los subíndices:

$$\phi = -Kxy \qquad (9)$$

para el potencial en cualquier punto (x, y) en este campo, con potencial cero en el origen. A esto puede sumarse una constante cualquiera. Esto solamente indicaría que el punto de referencia al cual se asigna el potencial cero se ha localizado en cualquier otra parte.

Debemos tener cuidado en no confundir el *potencial* φ, asociado con un campo dado **E**, con la *energía potencial* de un sistema de cargas. La energía potencial de un sistema de cargas es el trabajo total requerido para reunirlas. En la Ec. 1.8, por ejemplo, hemos expresado por U la energía potencial del sistema de cargas de la Fig. 1.6. El *potencial* eléctrico $\varphi(x, y, z)$ asociado con el campo en la Fig. 1.6 sería el trabajo por unidad de carga requerido para traer una carga de prueba positiva unidad desde el infinito al punto (x, y, z) en el campo de dicha estructura de ocho cargas.

2.3 *Gradiente de una función escalar*

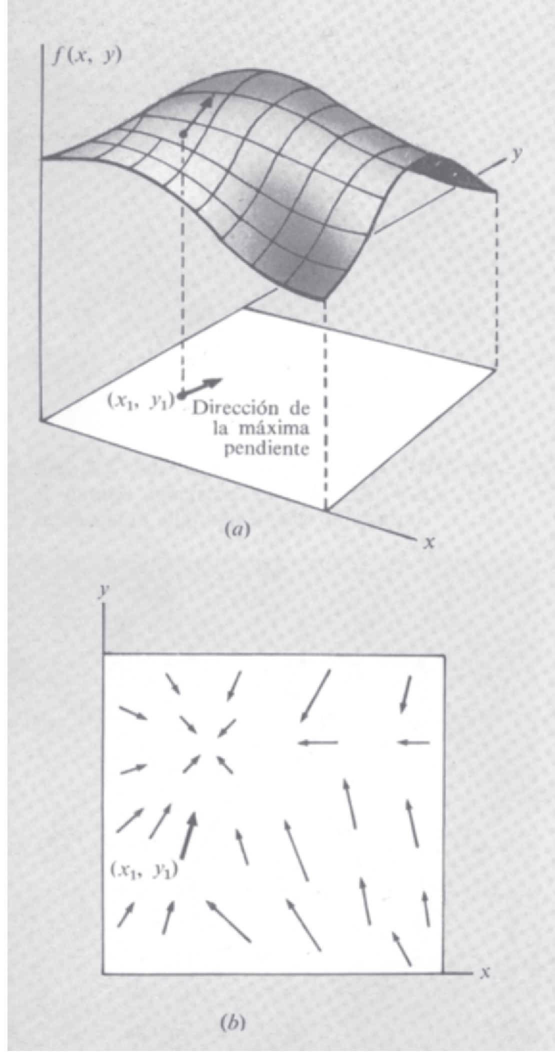
Dado el campo eléctrico, podemos hallar la función potencial eléctrico. Pero también podemos proceder en sentido contrario; del potencial podemos deducir el campo. De la Ec. 7 parecería que el campo es en algún sentido la *derivada* de la función potencial. Para precisar esta idea introducimos el *gradiente* de una función escalar de la posición. Sea $f(x, y, z)$ cierta función continua y derivable de las coordenadas. Con sus derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ podemos definir en cada punto del espacio un vector, cuyas componentes x, y, z

son iguales a las respectivas derivadas parciales *. Llamamos a este vector *gradiente* de f, escrito grad f, o ∇f.

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{10}$$

∇f es un vector que expresa cómo varía la función f en la proximidad de un punto. Su componente x es la derivada parcial de f con respecto a x, o sea una medida de la razón de variación de f al moverse en la dirección x. El sentido del vector ∇f en un punto es el sentido en que debemos movernos a partir del punto para hallar el incremento más rápido de la función f. Supongamos que tratamos con una función de dos variables solamente, x e y, con lo que la función puede representarse por una superficie en tres dimensiones. Colocándonos sobre cierto punto de esta superficie, vemos que la superficie se eleva en cierta dirección y sentido, descendiendo en el sentido opuesto. Hay una dirección en la cual un pequeño incremento nos dará mayor elevación que un incremento de la misma longitud en cualquier otra dirección. El gradiente de la función es un vector en la dirección de la máxima pendiente y sentido ascendente y su módulo es la pendiente, medida en aquella dirección.

Fig. 2.4 La función escalar $f(x, y)$ está representada por la superficie en (*a*). Las flechas en (*b*) representan la función vectorial grad f.



La Fig. 2.4 puede ayudarnos a hacer esto visible. Supongamos cierta función particular de dos coordenadas x e y representada por la superficie $f(x, y)$ dibujada en la Fig. 2.4*a*. En la posición (x_1, y_1) la superficie se eleva más bruscamente en una dirección que forma unos 80° con la dirección positiva de x. El gradiente de $f(x, y)$ ∇f, es una función vectorial de x e y. Su comportamiento está indicado en la Fig. 2.4*b* por cierto número de vectores en distintos puntos del espacio bidimensional, incluyendo el punto (x_1, y_1). La función vectorial ∇f definida en la Ec. 10 es simplemente una extensión de esta idea al espacio tridimensional. [Téngase cuidado en no confundir la Fig. 2.4*a* con el espacio real tridimensional xyz; la tercera coordenada es el valor de la función $f(x, y)$.]

Como ejemplo de una función en el espacio tridimensional, supongamos que f es función sólo de r donde r es la distancia desde un punto fijo O. Sobre una esfera de centro O y radio r_0, $f = f(r_0)$ es constante. Sobre una esfera ligeramente mayor de radio $r_0 + dr$ es también constante, con el valor $f = f(r_0 + dr)$. Si queremos efectuar la variación de $f(r_0)$ a $f(r_0 + dr)$, el menor incremento que podemos tomar es radial

---

* Recordamos al lector que una derivada parcial con respecto a x, de una función de x, y, z, escrita simplemente $\frac{\partial f}{\partial x}$, significa la razón de la variación de la función con respecto a x manteniendo constantes las otras variables y y z. De manera más precisa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Como ejemplo, si $f = x^2 y z^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2 y z^2$$

(como de A a B) en vez de A a C, en la Fig. 2.5. La « pendiente » de f es pues mayor en la dirección radial, así pues ∇f en cualquier punto es un vector dirigido radialmente. En realidad $\nabla f = \hat{\mathbf{r}}(df/dr)$ en este caso, designando por $\hat{\mathbf{r}}$, para cualquier punto, un vector unitario de dirección radial.

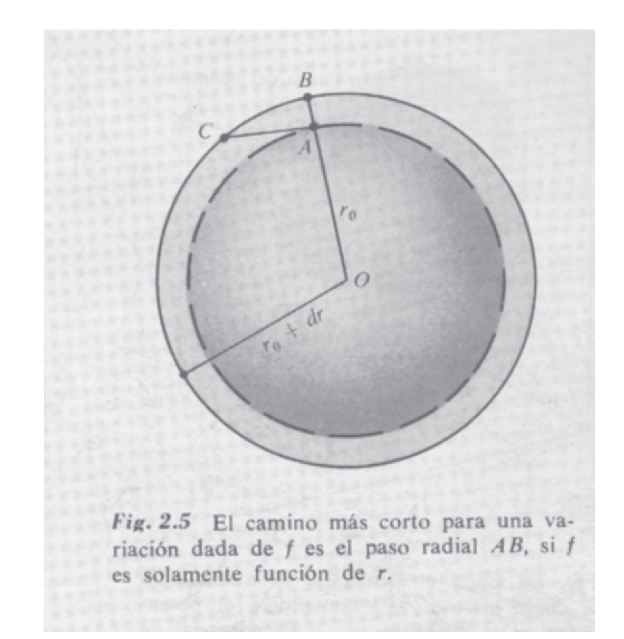


Fig. 2.5 El camino más corto para una variación dada de f es el paso radial AB, si f es solamente función de r.

2.4 *Deducción del campo a partir del potencial*

Ahora es fácil ver que la relación de la función escalar f a la función vectorial ∇f es la misma, salvo un signo menos, que la relación del potencial φ al campo $\mathbf{E}$. Consideremos el valor de φ en dos puntos próximos (x, y, z) y $(x + dx, y + dy, z + dz)$. La variación de φ al pasar del primer punto al segundo es

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz \tag{11}$$

Por otra parte, de la definición de φ, la variación puede también expresarse

$$d\varphi = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{12}$$

El vector desplazamiento elemental $d\mathbf{s}$ es precisamente $\hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}dz$. Así que si identificamos $\mathbf{E}$ con $-\nabla\varphi$, las Ecs. 11 y 12 se hacen idénticas. Por tanto el campo eléctrico es el gradiente, cambiado de signo, del potencial:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi} \tag{13}$$

El signo menos proviene a causa de que el campo eléctrico está dirigido de una región de potencial positivo hacia una región de potencial negativo, mientras que el vector $\nabla\varphi$ se define de manera que se dirija en el sentido de φ creciente.

Para hacer ver como ocurre esto, volvemos al ejemplo del campo en la Fig. 2.3. A partir del potencial dado por la Ec. 9, $\varphi = -Kxy$, podemos encontrar el campo eléctrico del que partimos:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x) \tag{14}$$

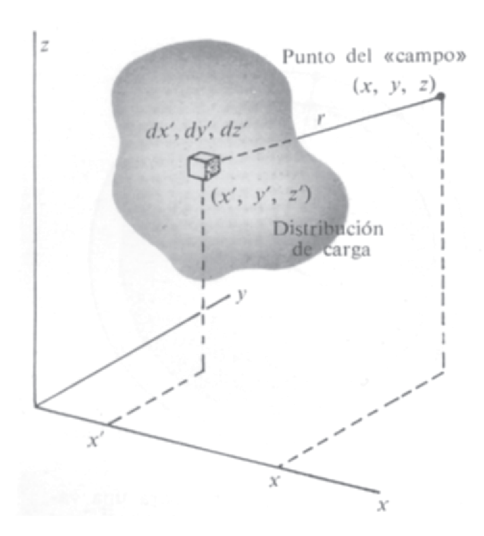


Fig. 2.6 Cada elemento de la distribución de carga $\rho(x', y', z')$ contribuye al potencial φ en el punto (x, y, z). El potencial en este punto es la suma de todas las contribuciones de este tipo (Ec. 15).

2.5 *Potencial de una distribución de cargas*

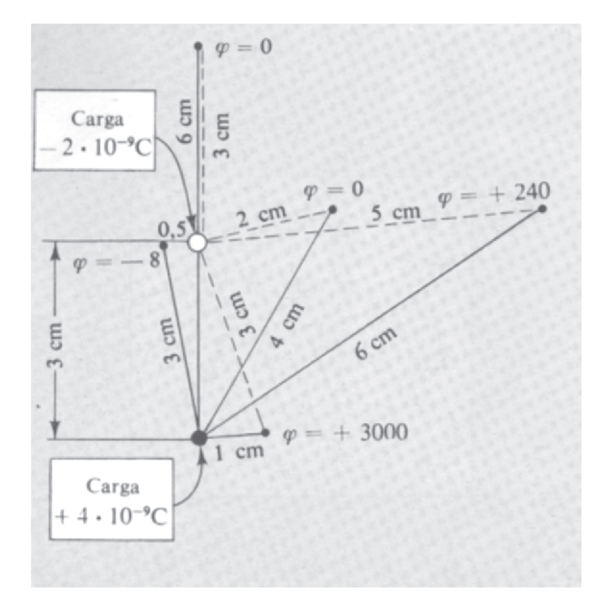
Ya conocemos el potencial que acompaña a una sola carga puntiforme, porque hemos calculado el trabajo requerido para llevar una carga a las proximidades de otra en la Ec. 3 del capítulo 1. El potencial en un punto del campo de una carga puntiforme aislada q, es precisamente q/r, donde r es la distancia del punto en cuestión al manantial q, habiendo asignado potencial cero a los puntos infinitamente alejados del manantial.

La superposición debe operar para los potenciales lo mismo que con los campos. Si tenemos varios manantiales, la función potencial es simplemente la suma de las funciones potencial que tendríamos para cada una de las fuentes por separado — *con tal que* sea compatible la elección del cero de potencial en todos los casos. Si todos los manantiales están contenidos en cierta región finita, es siempre posible, y generalmente es lo más sencillo, tomar el potencial cero a distancia infinita. Si adoptamos este convenio, el potencial de una distribución de cargas puede darse por la integral:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\substack{\text{Todas las}\\ \text{fuentes}}} \frac{\rho(x',y',z')\, dx'\, dy'\, dz'}{r} \qquad (15)$$

donde r es la distancia desde el elemento de volumen $dx'\,dy'\,dz'$ al punto (x, y, z), en el cual se calcula el potencial (Fig. 2.6). Es decir, $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$. Adviértase la diferencia entre esto y la integral que da el campo eléctrico de una distribución de cargas, Ec. 15 del capítulo 1. Aquí tenemos r en el denominador, no r^2, y la integral es un escalar, no un vector. A partir de la función potencial escalar $\varphi(x, y, z)$ siempre podemos hallar el campo eléctrico tomando el gradiente negativo de φ, según la Ec. 13.

Fig. 2.7 Potencial eléctrico φ de un sistema de dos cargas puntiformes en varios puntos. φ tiende a cero a distancia infinita. φ se da en volt o joules por unidad de carga.



Potencial de dos cargas puntiformes. Consideremos un ejemplo muy simple, el potencial de dos cargas puntiformes representado en la Figura 2.7. Una carga positiva de $4 \cdot 10^{-9}$C está situada a 3 cm de una carga negativa, $-2 \cdot 10^{-9}$C. El potencial en un punto cualquiera del espacio es la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas por separado. En el gráfico se dan los potenciales en algunos puntos escogidos del espacio. Aquí no intervienen la suma vectorial, solamente la suma algebraica de magnitudes escalares. Por ejemplo, en el punto de la derecha que dista 6 cm de la carga positiva y 5 cm de la carga negativa, el potencial tiene el valor $+ 600 + - 360 = + 240$. La unidad aquí es *volt*. El potencial tiende a cero a distancia infinita. Requeriría un trabajo de 240 J llevar la unidad positiva de carga desde el infinito al punto donde $\varphi = 240$ volt. Obsérvese que dos de los puntos representados en el diagrama tienen $\varphi = 0$. El trabajo total efectuado al llevar una carga cualquiera a uno de estos puntos sería nulo. Puede verse que deben de haber un número infinito de tales puntos, constituyendo una superficie en el espacio que rodea la carga negativa. De hecho el lugar geométrico de los puntos con un valor particular de φ es

una superficie, llamada ***superficie equipotencial,*** la cual se representaría en nuestro diagrama bidimensional, como una curva.

Potencial de un hilo largo cargado. Existe una restricción para el uso de la Ec. 15: No puede operar a menos que todos los manantiales estén confinados en una región finita del espacio. Un ejemplo simple, de la dificultad que aparece con cargas distribuidas a distancia infinita, se encuentra en el hilo largo cargado, cuyo campo **E** se estudió en la Sección 1.12. Si intentamos asignar potencial cero a puntos lejanos del sistema, y efectuar la integración a lo largo de la distribución de cargas indicada en la Ec. 15, hallamos que la integral diverge — obtenemos resultado infinito. Eran de esperar dificultades, porque en este caso el « infinito », es decir, todos los puntos del espacio que estén muy alejados de la región en la cual queremos definir una función potencial, no contiene solamente puntos alejados del alambre sino muchos del mismo hilo. Tales dificultades no aparecían al hallar el *campo* eléctrico de un hilo infinitamente largo, porque las contribuciones al campo de los elementos de línea cargados disminuyen muy rápidamente con la distancia. Evidentemente, habríamos situado mejor el cero de potencial en algún lugar cercano, en un sistema que tiene cargas distribuidas hasta el infinito. Entonces es cuestión, simplemente, de calcular la diferencia de potencial φ_{21}, entre el punto genérico (x, y, z) y el punto de referencia escogido, utilizando la relación fundamental, Ec. 6.

Para ver como encaja esto en el caso de un hilo infinitamente largo cargado, localicemos arbitrariamente el punto de referencia P_1 a una distancia r_1 del hilo, luego para trasladar una carga desde P_1 a cualquier otro punto P_2 que dista r_2 se requiere un trabajo por unidad de carga

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right) dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 \tag{16}$$

Esto demuestra que el potencial eléctrico para un hilo cargado puede tomarse

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \text{const} \tag{17}$$

La constante, $\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1$ en este caso, desaparece cuando tomamos $-\operatorname{grad} \varphi$ para deducir el campo **E.** en este caso,

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\lambda\hat{\mathbf{r}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{18}$$

2.6 Disco cargado uniformemente

Como un ejemplo completo, estudiemos el potencial y el campo en torno a un disco cargado uniformemente. Es una distribución de cargas parecida a la considerada en la Sec. 1.13, excepto que ésta

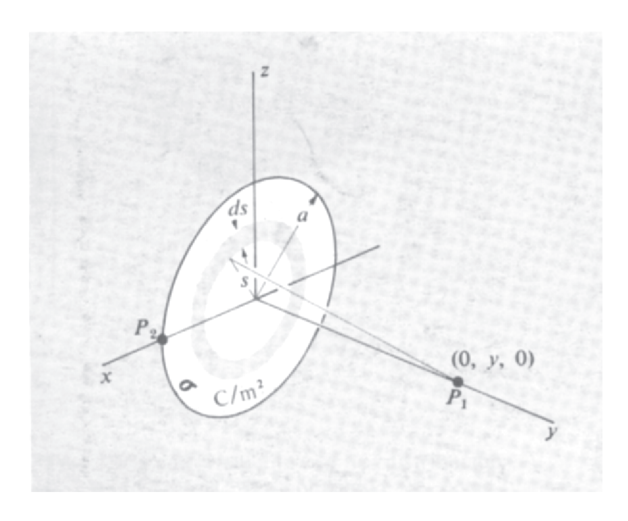


Fig. 2.8 Cálculo del potencial en un punto P_1 sobre el eje de un disco uniformemente cargado.

tiene una extensión limitada. El disco plano de radio a en la Fig. 2.8 contiene carga positiva extendida sobre su superficie con densidad constante σ, en C/m^2. (Es una capa simple de carga de espesor infinitesimal, no dos capas de carga, una a cada lado. Es decir, la carga total en el sistema es $\pi a^2\sigma$.) Encontraremos a menudo distribuciones superficiales de carga en el futuro, especialmente en los conductores metálicos. Sin embargo, el objeto descrito *no* es un conductor; si lo fuera, como pronto veremos, la carga no permanecería uniformemente distribuida sino que se redistribuiría por sí misma, acumulándose más hacia el borde del disco. Lo que tenemos es un disco aislante, como una lámina de plástico, sobre la cual se ha « extendido » la carga de manera que cada centímetro cuadrado del disco haya recibido, y mantenga fija, la misma cantidad de carga.

Como principio, hallemos el potencial en un punto P_1 del eje de simetría, el cual hemos tomado como eje y. Todos los elementos de carga en un segmento anular estrecho del disco están a la misma distancia de P_1. Llamando s al radio de tal segmento anular y ds a su espesor, su área es $2\pi s\, ds$. La cantidad de carga que contiene, dq, es por lo tanto $dq = \sigma \cdot 2\pi s\, ds$. Todos los fragmentos de este anillo están a la misma distancia de P_1, a saber $r = \sqrt{y^2 + s^2}$, con lo que la contribución del anillo al potencial en P_1 es dq/r, o bien $2\pi\sigma s\, ds/\sqrt{y^2 + s^2}$. Para obtener el potencial debido a todo el disco, tenemos que integrar para todos los anillos:

$$\varphi(0,y,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \int_{2\varepsilon_0}\frac{\sigma s\, ds}{\sqrt{y^2+s^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+s^2}\right]_{s=0}^{s=a} \qquad (19)$$

La integral resulta ser elemental; haciendo el cambio $u = y^2 + s^2$ toma la forma $\int u^{-1/2}du$. Introduciendo los límites, obtenemos: para

$$\varphi(0,y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{y^2 + a^2} - y] \qquad \text{para } y > 0 \qquad (20)$$

Convendrá comentar un hecho secundario: El resultado que hemos escrito antes en la Ec. 20 vale para todos los puntos del eje *y positivo*. Es evidente de la simetría física del sistema (no hay diferencia entre una y otra cara del disco) que el potencial debe tener el mismo valor para la parte positiva y negativa del eje y, y esto está reflejado en la Ec. 19, donde sólo aparece y^2. Pero al escribir la Ec. 20 hemos hecho una elección de signo al extraer la raíz cuadrada de y^2, con la conclusión que vale *solamente* para y positiva. La expresión correcta $y < 0$ se obtiene por la otra elección de raíz y es

$$\varphi(0,y,0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{y^2 + a^2} + y] \qquad \text{para } y < 0 \qquad (21)$$

En vista de esto, no nos sorprendería hallar una singularidad en $\varphi(0, y, 0)$ para $y = 0$. En realidad, la función tiene un cambio brusco

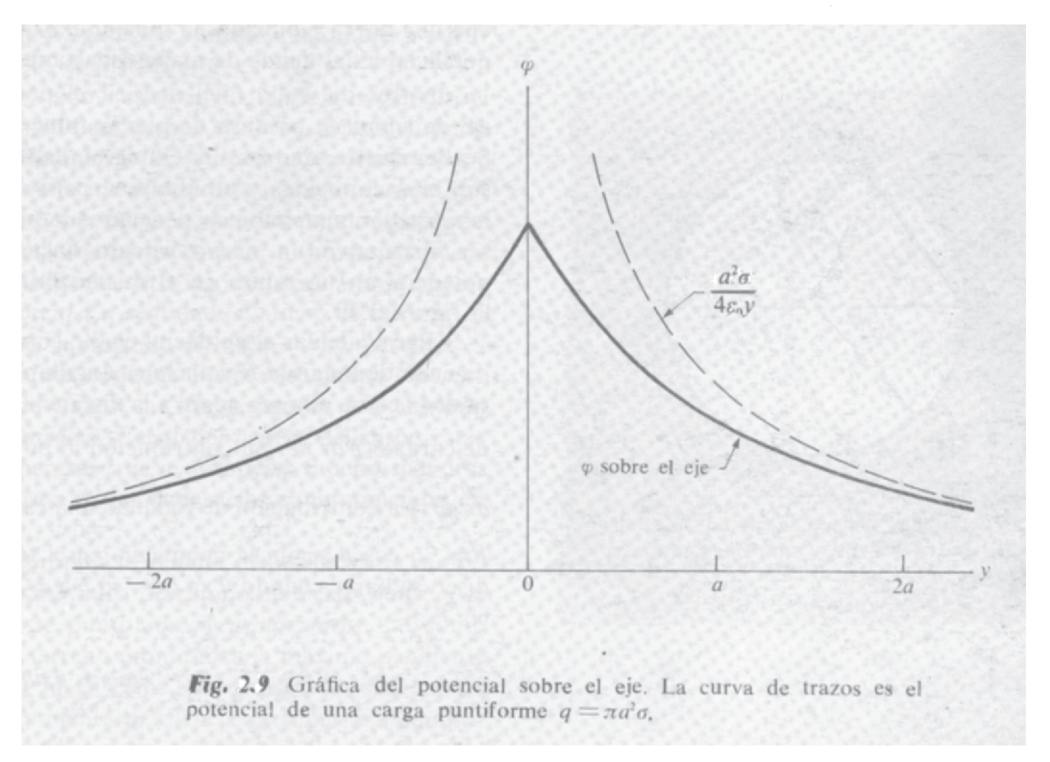


Fig. 2.9 Gráfica del potencial sobre el eje. La curva de trazos es el potencial de una carga puntiforme $q = \pi a^2\sigma$.

de pendiente en este punto, como vemos en la Fig. 2.8, en donde hemos representado el potencial sobre el eje en función de y. El potencial en el centro del disco es $(0, 0, 0) = \sigma a/2\varepsilon_0$. Esto sería el trabajo necesario para trasladar la unidad positiva de carga desde el infinito, por cualquier camino, para dejarla situada en el centro del disco.

El comportamiento de $\varphi(0,y,0)$ para valores muy grandes de y es interesante. Para $y \gg a$ podemos aproximar la Ec. 22 como sigue:

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y\left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1\right]$$
$$= y\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) \cdots - 1\right] \approx \frac{a^2}{2y} \qquad (22)$$

De aquí

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\varepsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y} \text{ para } y \gg a \qquad (23)$$

Ahora bien $\pi a^2\sigma$ es la carga total q del disco, y la Ec. 23 es precisamente la expresión para el potencial debido a una carga puntiforme de este valor. Como era de esperar, a una distancia grande del disco (frente a su diámetro) no importa como está dispuesta la carga; solamente la carga total, en primera aproximación. En la Fig. 2.9 hemos dibujado,

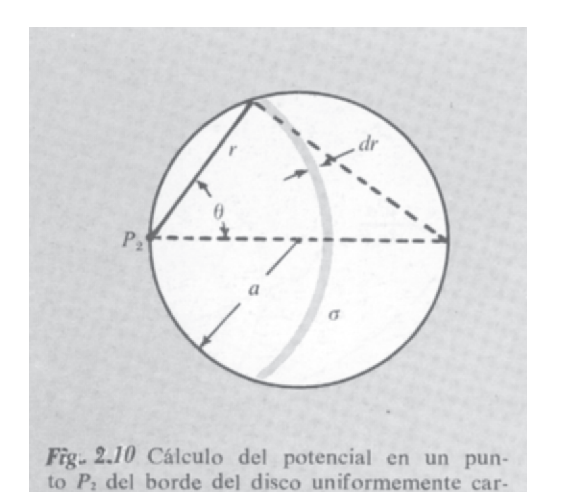


Fig. 2.10 Cálculo del potencial en un punto P_2 del borde del disco uniformemente cargado.

con una curva punteada, la función $a^2\sigma/4y$. Puede verse que la función potencial axial tiende de manera bastante rápida a su forma asintótica.

No es del todo fácil deducir el potencial para puntos fuera del eje de simetría, a causa de que la integral definida no es tan sencilla. Se demuestra que es una integral llamada *elíptica*. Estas funciones son bien conocidas y tabuladas , pero aquí no tiene objeto proseguir los detalles matemáticos peculiares a un problema particular. Puede ser instructivo un nuevo cálculo bastante fácil. Podemos hallar el potencial en un punto en el mismo borde del disco, tal como P_2 en la figura 2.10.

Para calcular el potencial en P_2, consideraremos primero la delgada cuña de longitud R y anchura angular $d\theta$ en la Fig. 2.10. Un elemento de la cuña, el trozo negro a la distancia r de P_2, contiene una cantidad de carga $\sigma\, r\, dr\, d\theta$. Su contribución al potencial en P_2 es por tanto $\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} dr\, d\theta$. La contribución de toda la cuña es $\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\, d\theta \int_0^R dr = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} R d\theta$. Pero $R = 2a\cos\theta$ según la geometría en el triángulo rectángulo, y todo el disco se barre cuando θ va de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Así calculamos el potencial en P_2:

$$\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma a \cos\theta\, d\theta}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \tag{24}$$

Comparando esto con $\sigma a/2\varepsilon_0$, el potencial en el centro del disco, vemos que, como era de esperar, el potencial disminuye del centro al borde del disco. El campo eléctrico, por tanto, debe tener una componente, situada en el plano del disco, hacia fuera. Es por esto que anteriormente advertimos que si la carga se moviese libremente, se redistribuiría por sí misma hacia el borde. Expresado de otra manera, nuestro disco cargado no es una superficie de potencial constante, como lo sería cualquier superficie conductora a menos que la carga se mueva* .

El campo eléctrico en el eje de simetría puede calcularse directamente de la función potencial:

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - y\right] \tag{25}$$

dando

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\right] \qquad y > 0 \tag{26}$$

* El hecho que las superficies conductoras deben ser equipotenciales se tratará en el Cap. 3.

(Sin duda, el cálculo directo de E_y para los puntos sobre el eje, a partir de la distribución de cargas, no es difícil.)

Al tender y a cero por el lado positivo, E_y tiende a $\sigma/2\varepsilon_0$. En el lado y negativo del disco, al cual llamaremos el dorso, **E** está dirigido en el otro sentido y su componente y, E_y, vale $-\sigma/2\varepsilon_0$. Este campo es el mismo que el de una lámina indefinida cargada con densidad σ, deducida en la Sec. 1.13. Esto debe ser para puntos cercanos al centro del disco, la presencia o ausencia de carga exterior al borde no puede ocasionar mucha diferencia. Dicho de otro modo, una lámina parece indefinida vista desde muy cerca. En realidad, E_y tiene el valor $\sigma/2\varepsilon_0$ no solamente en el centro sino sobre todo el disco.

En la Fig. 2.11 presentamos algunas líneas de campo de este sistema y también, dibujado de trazos, las intersecciones con el plano yz de las superficies equipotenciales. Cerca del centro del disco estas superficies son lenticulares, mientras que a distancias mucho mayores que a tienden a la forma esférica de las superficies equipotenciales en torno a una carga puntiforme.

La Fig. 2.11 muestra una propiedad general de las líneas de campo y superficies equipotenciales. Una línea de campo en cierto punto y la superficie equipotencial por este punto *son perpendiculares*, tal como en un mapa topográfico de un terreno montañoso la máxima pendiente es perpendicular a las curvas de nivel. Debe ocurrir así, pues si el campo en un punto tuviese una componente paralela a la superficie equipotencial en este punto, se requeriría cierto trabajo para desplazar una carga de prueba cualquiera a lo largo de una superficie equipotencial.

La energía asociada con este campo eléctrico podría expresarse como la integral, extendida a todo el espacio, de $\varepsilon_0 E^2\, dv/2$. Es igual al trabajo efectuado al reunir esta distribución, partiendo de cargas alejadas indefinidamente. En este ejemplo particular, como en el Problema 2.27 demostraremos, este trabajo no es difícil de calcular directamente si conocemos el potencial en el borde de un disco uniformemente cargado.

Hay una relación general entre el trabajo U necesario para reunir una distribución de carga $\rho(x, y, z)$ y el potencial $\phi\,(x, y, z)$ de tal distribución.

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi\, dv \tag{27}$$

La ecuación 9 del Capítulo 1, para la energía de cargas puntiformes discretas, podría haberse escrito de esta manera:

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\sum q_j \sum \frac{q_k}{r_{jk}} \tag{28}$$

La segunda suma es el potencial en la posición de la carga j-ésima, debido a todas las demás cargas. Para adaptar esto a una distribución continua, simplemente sustituimos q_j por $\rho\, dv$ y la suma respecto a j, por una integral, y así obtenemos la Ec. 27.

Superficie de potencial constante

Línea de campo

y

Fig. 2.11 Campo eléctrico de un disco uniformemente cargado. Las líneas de trazo continuo son líneas de campo. Las líneas de trazos son las intersecciones, con el plano de la figura, de las superficies equipotenciales.

2.7 *Divergencia de una función vectorial*

El campo eléctrico tiene en cada punto un módulo, una dirección y un sentido definidos. Es una función vectorial de las coordenadas, lo cual hemos indicado a menudo escribiendo $\mathbf{E}(x, y, z)$. Lo que vamos a decir puede aplicarse a cualquier función vectorial, no sólo al campo eléctrico; usaremos otro símbolo, $\mathbf{F}(x, y, z)$, para tener presente esto. En otras palabras de momento razonaremos matemáticamente mejor que físicamente y llamaremos $\mathbf{F}$ simplemente a una función vectorial general. Sin embargo, persistiremos en tres dimensiones.

Consideremos un volumen finito V de cierta forma, la superficie del cual designaremos por S. Estamos ya familiarizados con la noción de flujo total Φ saliente de S. Éste es el valor de la integral de superficie de $\mathbf{F}$ extendida a toda la superficie S:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \tag{29}$$

En la cantidad subintegral $d\mathbf{a}$ es un vector infinitésimo, indicado en la Fig. 2.12*a*, cuyo módulo es el área de un pequeño elemento de S, su dirección la de la normal a esta pequeña porción de superficie, dirigida hacia el exterior.

Imaginemos ahora V dividido en dos partes por una superficie, o diafragma D que corta el « globo » S, como en la Fig. 2.12*b*. Designemos a las dos partes de V por V_1 y V_2 y tratándolas como volúmenes distintos, calculemos la integral de superficie para cada uno por separado. La superficie del contorno S_1 de V_1 incluye D y también S_2. Es casi evidente que la suma de las dos integrales de superficie

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \tag{30}$$

será igual a la integral original extendida a toda la superficie, expresada en la Ec. 29. La razón de ello es que cualquier porción dada sobre D contribuye con un signo a la primera integral y la misma cantidad con signo contrario a la segunda, el sentido « hacia fuera » en un caso es el sentido « hacia dentro » en el otro. En otras palabras, el flujo *saliente de* V_1, a través de la superficie D, es el flujo *entrante* para V_2. El resto de la superficie considerada es idéntica a la del volumen original total.

Podemos proseguir subdiviendo hasta que nuestras particiones internas hayan dividido V en un gran número de partes, $V_1 \ldots$, $V_i \ldots$, V_N, con superficies $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_N$. Independientemente de como se realiza esto, podemos afirmar que

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi \tag{31}$$

A continuación consideremos lo siguiente: En el límite cuando N se hace muy grande identificamos algo característico de una pe-

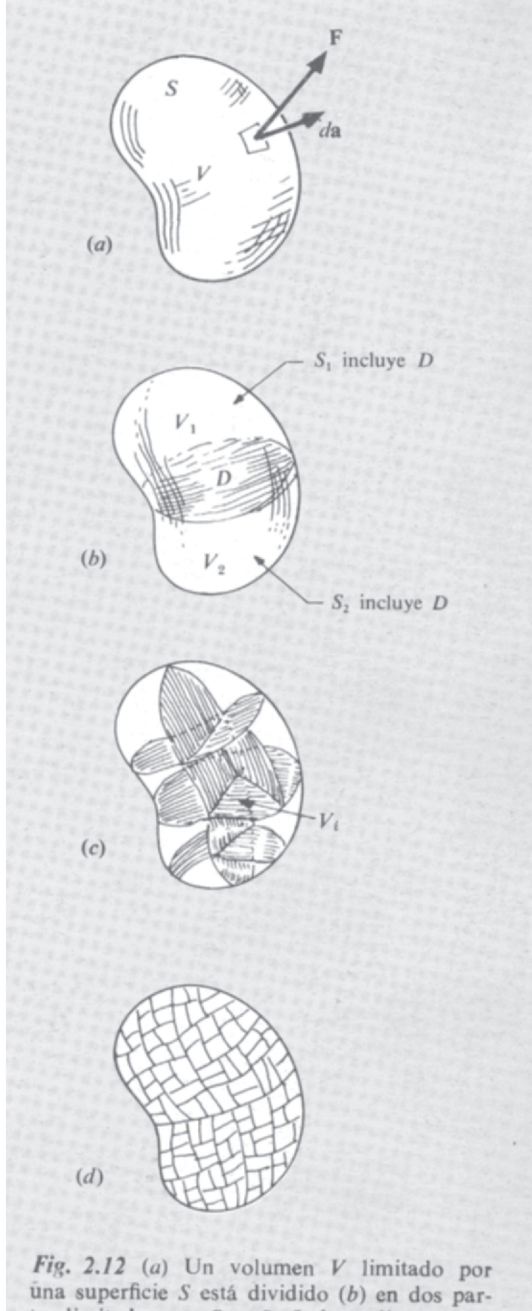


Fig. 2.12 (*a*) Un volumen V limitado por una superficie S está dividido (*b*) en dos partes limitadas por S_1 y S_2. Independientemente de como se haga, como en (*c*) y (*d*), la suma de las integrales de superficie extendidas a todas las piezas es igual a la integral de superficie inicial sobre S, para cualquier función vectorial $\mathbf{F}$.

queña región particular, que llega a convertirse en el entorno de un punto. La integral de superficie

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{32}$$

extendida a una de estas pequeñas regiones, *no* es tal magnitud, pues si volvemos a dividir de manera que N sea $2N$, esta integral se divide en dos términos, cada uno menor que antes ya que su suma es constante. En otras palabras, al considerar volúmenes cada vez más pequeños en la misma situación, la integral de superficie extendida a un tal volumen se hace invariablemente más pequeña. Pero téngase en cuenta que al dividir, el volumen también se divide en dos partes cuya suma es el volumen original. Esto sugiere que consideremos la relación de la integral de superficie al volumen para un elemento en el espacio subdividido:

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \tag{33}$$

Parece plausible que para N suficientemente grande, es decir, para una subdivisión suficientemente menuda podemos dividir por dos el volumen cada vez que dividimos por dos la integral de superficie de manera que, continuando la subdivisión en una región particular, hallaremos que esta relación tiende a un límite. Si es así, este límite es una propiedad característica de la función vectorial **F** en dichas proximidades. Le llamamos *divergencia* de **F**, que se escribe div **F**. Es decir, el valor de div **F** en cada punto se define como:

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{34}$$

donde V_i es un volumen que incluye el punto en cuestión, y S_2, la superficie donde se extiende la integral, es la superficie de V_i. Debemos incluir la condición de que este límite exista y que es independiente de nuestro método de subdivisión. De momento lo daremos por supuesto.

El significado de div **F** puede expresarse de esta manera: div **F** es el flujo saliente de V_i por unidad de volumen, en el límite de V_i infinitésimo. Es evidentemente una magnitud escalar. Puede variar de un lugar a otro, su valor en una posición determinada (x, y, z) es el límite expresado en la Ec. 34 cuando V_i se hace cada vez más pequeño mientras incluya siempre el punto (x, y, z). Así pues div **F** es simplemente una función escalar de las coordenadas.

2.8 Teorema de Gauss y forma diferencial de la ley de Gauss

Si conocemos esta función escalar de posición div **F**, podemos encaminarnos directamente de nuevo a la integral de superficie ex-

tendida a un volumen grande: Primero escribiremos la Ec. 31 de esta manera:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right] \tag{35}$$

En el límite $N \to \infty$, $V_i \to 0$, el término entre corchetes se convierte en la divergencia de **F** y la suma en una integral de volumen:

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv} \tag{36}$$

La ecuación 36 recibe el nombre de teorema de Gauss o teorema de la divergencia. Se cumple en todo campo vectorial para el cual exista el límite que interviene en la Ec. 34.

Veamos que entraña esto para el campo eléctrico **E**. Tenemos la ley de Gauss que nos afirma que

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dv \tag{37}$$

Si el teorema de la divergencia se cumple para todo campo vectorial se cumple ciertamente para **E**:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dv \tag{38}$$

Ambas ecuaciones 37 y 38 se cumplen para *cualquier* volumen que queramos elegir — de cualquier forma, tamaño o posición. Comparándolas, vemos que esto sólo puede ser cierto si en cada punto,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho} \tag{39}$$

Si adoptamos el teorema de la divergencia como parte de nuestro equipo matemático regular de ahora en adelante, podemos considerar la Ec. 34 simplemente como otra manera de exponer la ley de Gauss. Ésta es la ley de Gauss en forma diferencial, es decir, establecida en función de una relación local entre la densidad de carga y el campo eléctrico.

2.9 La divergencia en coordenadas cartesianas

Mientras la Ec. 34 es la definición fundamental de *divergencia*, independiente de toda sistema de coordenadas, es conveniente saber

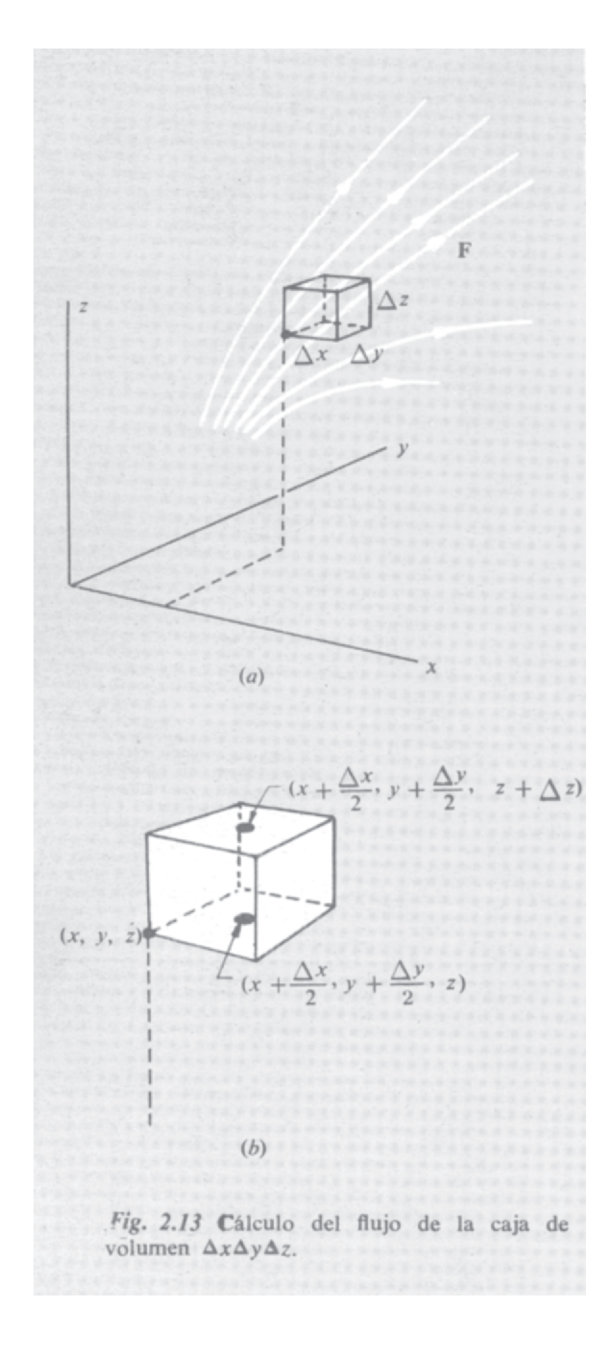


Fig. 2.13 Cálculo del flujo de la caja de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$.

cómo calcular la divergencia de una función vectorial cuando nos la dan en su forma explícita. Supongamos una función vectorial **F** que está expresada en función de las coordenadas cartesianas x, y, z. Esto significa que tenemos tres funciones escalares $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ y $F_z(x, y, z)$. Tomaremos la región V_i en la forma de una pequeña caja rectangular, con un vértice en el punto (x, y, z) y aristas Δx, Δy y Δz, como en la Fig. 2.13*a*. Si alguna otra forma diera el mismo límite es una cuestión que debemos afrontar más adelante.

Consideremos dos caras opuestas de la caja, la parte superior y el fondo, por ejemplo, las cuales pueden representarse por los vectores $\hat{\mathbf{z}}\Delta x\Delta y$ y $-\hat{\mathbf{z}}\Delta x\Delta y$. En el flujo a través de estas dos caras interviene solamente la componente z de **F**, y la contribución total depende de la *diferencia* entre F_z en la cima y F_z en la base, o de manera más precisa, de la diferencia del valor medio de F_z en la cara superior y el valor medio de F_z en la cara inferior de la caja. Para una aproximación de primer orden en pequeñas cantidades esta diferencia es $(\partial F_z/\partial z)\ \Delta z$. La Fig. 2.13*b* ayudará a explicar esto. El valor medio de F_z en la superficie inferior de la caja, si consideramos solamente variaciones de primer orden en F_2 sobre este pequeño rectángulo, es su valor en el centro del rectángulo. Este valor es, para una aproximación de primer orden * en Δx y en Δy,

$$F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} \tag{40}$$

Para el valor medio de F_z sobre la cara superior tomamos el valor en el centro de la cara superior, el cual, considerando de nuevo aproximación solamente de primer orden en los desplazamientos, es

$$F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{41}$$

El flujo saliente total de la caja a través de estas dos cargas, cada una de las cuales tiene un área $\Delta x\Delta y$, es por tanto

$$\underbrace{\Delta x\,\Delta y\left[F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]}_{\text{(Flujo saliente de la caja en la cima)}}$$
$$- \underbrace{\Delta x\,\Delta y\left[F_z(x,y,z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\right]}_{\text{(Flujo entrante en la caja por la base)}} \tag{42}$$

---

* Esto no es más que el principio de un desarrollo de Taylor de la función escalar F_z, en las proximidades de (x, y, z). Es decir,
$$F_z(x+a,\ y+b,\ z+c) = F_z(x, y, z) + \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_z + \cdots + \left(\frac{1}{n!}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_z + \cdots.$$
Todas las derivadas deben calcularse en (x, y, z). En nuestro caso $a = \Delta x/2$, $b = \Delta y/2$, $c = 0$, y omitimos los términos de orden superior en el desarrollo.

que se reduce a $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial F_z/\partial z)$. Evidentemente, debemos aplicar un método similar a los otros pares de caras. Es decir, el flujo total saliente de la caja a través de caras paralelas al plano yz es $\Delta y \Delta z \Delta x (\partial F_x/\partial x)$. Adviértase que también en este caso aparece el producto $\Delta x \Delta y \Delta z$. Así pues el flujo total saliente de la pequeña caja es:

$$\Phi = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \tag{43}$$

El volumen de la caja es $\Delta x \Delta y \Delta z$ por lo que la razón del flujo al volumen es $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$, y como esta expresión no contiene las dimensiones de la caja en absoluto, queda como límite al contraerse la caja. [Habiendo mantenido los términos proporcionales a $(\Delta x)^2$, $(\Delta x \Delta y)$, etc., en el cálculo del flujo, se anularían, por supuesto, en el paso a límite.]

Ahora podemos empezar a ver por qué este límite va a ser independiente de la forma de la caja. Evidentemente es independiente de las proporciones de la caja rectangular, pero esto no es decir mucho. Es fácil ver que será el mismo para cualquier volumen que podamos construir adosando pequeñas cajas rectangulares de cualquier forma o tamaño. Consideremos las dos cajas en la Fig. 2.14. La suma del flujo Φ_1 saliente de la caja 1 y Φ_2 saliente de la caja 2 no varía al quitar las paredes lindantes para construir una caja, pues sea cual fuere el flujo que atraviesa este plano era flujo negativo para una y positivo para la otra. Así que podríamos tener una forma caprichosa como la Fig. 2.14*c* sin afectar el resultado. Dejamos al lector la ulterior generalización. Pueden tenerse en cuenta superficies inclinadas si se quiere demostrar de antemano que es nula la suma vectorial de las cuatro superficies del tetraedro de la Fig. 2.15.

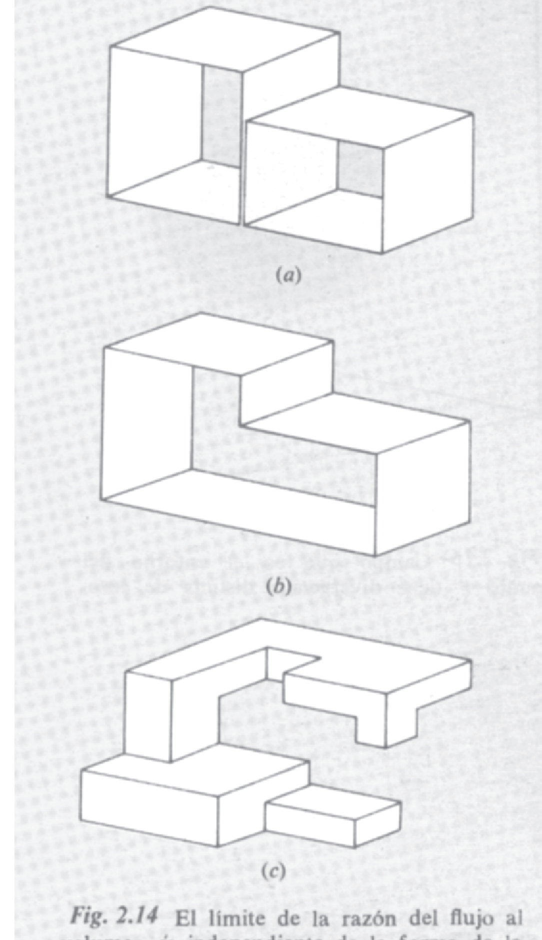


Fig. 2.14 El límite de la razón del flujo al volumen es independiente de la forma de la caja.

Deducimos que, suponiendo solamente que las funciones F_x, F_y y F_z son derivables, el límite existe y está dado por

$$\text{div}\, \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{44}$$

Si div **F** tiene un valor positivo en cierto punto, hallamos — considerando **F** como un campo de velocidades — un « flujo saliente » total en este lugar. Por ejemplo, si las tres derivadas parciales de la Ec. 44 son positivas en un punto P, puede haber un campo vectorial en sus proximidades algo parecido a lo que se sugiere en la Fig. 2.16. Pero el campo parecería completamente distinto y tendría aún divergencia positiva superponiendo una función vectorial cualquiera **G** tal que div **G** $= 0$. Así que una o dos de las tres derivadas parciales podrían ser negativas y podíamos tener aún div $\mathbf{F} > 0$. La divergencia es una magnitud que expresa solamente un aspecto de la variación espacial de un campo vectorial.

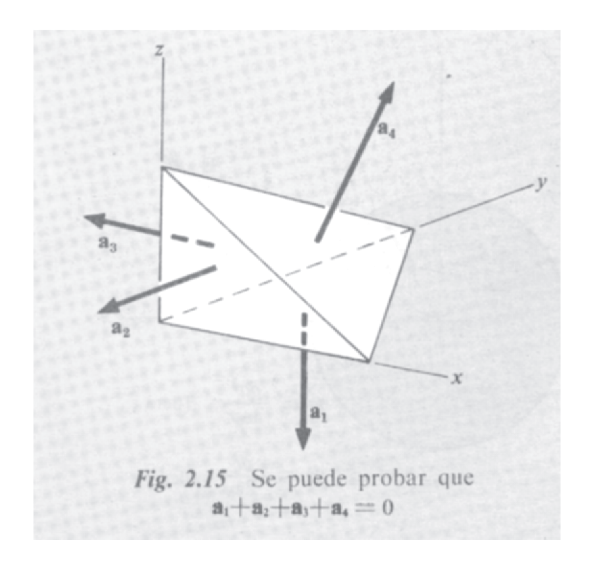


Fig. 2.15 Se puede probar que $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = 0$

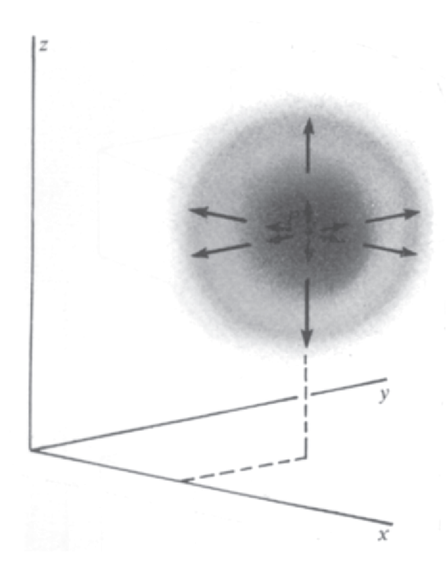


Fig. 2.16 Campo que en el entorno del punto P tiene divergencia distinta de cero

Apliquemos esto a un campo eléctrico que sea más fácil de visualizar. Un cilindro de revolución infinitamente largo de radio a se llena con una distribución de carga positiva de densidad ϱ. En el exterior del cilindro el campo eléctrico es el mismo que el de una línea cargada sobre el eje. Es un campo radial con módulo proporcional a $1/r$. El campo en el interior se halla aplicando la ley de Gauss a un cilindro de radio $r < a$. Puede hacerse como problema fácil. Se hallará que el campo es directamente proporcional a r, y desde luego, también radial. Los valores exactos son:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad \text{para } r > a \\ E &= \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \qquad \text{para } r < a \end{aligned} \tag{45}$$

La Fig. 2.17 es una sección perpendicular al eje del cilindro. En este caso, las coordenadas rectangulares no constituyen la elección más sencilla, pero las usaremos, a pesar de todo, para practicar con la Ec. 44. Con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, las componentes del campo se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{x}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 x}{2\varepsilon_0 (x^2 + y^2)} && \text{para } r > a \\ &= 2\pi\rho x && \text{para } r < a \\ E_y &= \left(\frac{y}{r}\right) E = \frac{\rho a^2 y}{2\varepsilon_0 (x^2 + y^2)} && \text{para } r > a \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho y && \text{para } r < a. \end{aligned} \tag{46}$$

E_z es, desde luego, nula.

En el exterior de la carga cilíndrica, div $\mathbf{E}$ tiene el valor dado por

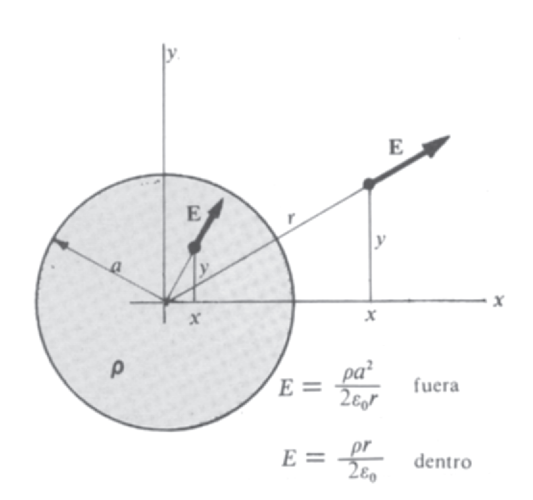
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\rho a^2 \left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] = 0 \tag{47}$$

Dentro del cilindro, div $\mathbf{E}$ es

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\ \rho\,(1 + 1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{48}$$

Contábamos con ambos resultados. Fuera del cilindro donde no hay carga, el flujo total saliente de cualquier volumen — grande o pequeño — es nulo, así que el límite de la relación *flujo/volumen* es indudablemente cero. Dentro del cilindro hallamos el resultado requerido por la relación fundamental Ec. 39.

Fig. 2.17 Campo en el interior y en el exterior de una distribución de carga uniforme cilíndrica.



2.10 Laplaciana

Acabamos de hallar dos funciones escalares relacionadas con el campo eléctrico, la función potencial φ y la divergencia, div **E**. En coordenadas cartesianas las relaciones se expresan en la forma:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\ \varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad (49)$$

$$\text{div}\ \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (50)$$

La Ec. 49 muestra que la componente x de **E** es $E_x = -\partial\varphi/\partial x$. Sustituyendo ésta y las expresiones correspondientes para E_y y E_z en la Ec. 50, encontramos una relación entre div **E** y φ:

$$\text{div}\ \mathbf{E} = -\text{div grad}\ \varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \qquad (51)$$

A la operación realizada con φ indicada por la Ec. 66, salvo el signo menos, se le puede llamar « div grad » o « tomando la divergencia del gradiente de ... ». El símbolo utilizado para representar esta operación es ∇^2, llamado *operador laplaciana* o simplemente *laplaciana.* La expresión

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es la transcripción en coordenadas cartesianas de la laplaciana.

La notación ∇^2 se explica como sigue. El operador gradiente se simboliza frecuentemente por $\boldsymbol{\nabla}$, llamado « nabla ». Escribiéndolo en coordenadas cartesianas,

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (52)$$

Si lo tratamos como un vector, su cuadrado sería entonces

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (53)$$

el mismo que la laplaciana en coordenadas cartesianas. Por ello a la laplacina se le llama frecuentemente « nabla cuadrado » y decimos « nabla cuadrado φ » para indicar « div grad φ ». *Advertencia:* En otros sistemas coordenados, por ejemplo, en coordenadas polares esféricas, la forma explícita del operador gradiente y el operador laplaciana no están relacionadas tan simplemente. Es conveniente recordar

que la definición fundamental de la operación laplaciana es « divergencia del gradiente de ».

Podemos ahora expresar una relación *local* entre la densidad de carga en un punto y la función potencial en su inmediata proximidad. De la ley de Gauss en forma diferencial, div $\mathbf{E} = 1\ \rho/\varepsilon_0$, tenemos

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \tag{54}$$

La Ec. 54, es la llamada *ecuación de Poisson* y relaciona la densidad de carga con las derivadas segundas del potencial. Escrita en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{55}$$

Esto puede considerarse como la expresión diferencial de la relación dada por una integral en la Ec. 15, la cual nos indica cómo hallar el potencial en un punto sumando las contribuciones de todos los manantiales próximos y remotos *.

2.11 Ecuación de Laplace

Dondequiera que $\rho = 0$, es decir, en todas las regiones del espacio que no contengan carga eléctrica, el potencial eléctrico tiene que satisfacer la ecuación

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0} \tag{56}$$

Ésta se llama *ecuación de Laplace*. La encontramos en muchas ramas de la física. En realidad puede decirse que, desde un punto de vista matemático, la teoría clásica de los campos es en su mayor parte un estudio de las soluciones de esta ecuación. El tipo de funciones que satisfacen a la ecuación de Laplace se llaman *funciones armónicas*. Tienen algunas propiedades notables, una de las cuales es: *Si $\varphi(x, y, z)$ satisface a la ecuación de Laplace, el valor medio de φ sobre la superficie de una esfera cualquiera (no necesariamente pequeña) es igual al valor de φ en el centro de la esfera.* Podemos demostrar fácilmente que esto es cierto para el potencial eléctrico φ, en regiones que no contienen carga. Consideremos una esfera S en el campo de una carga puntiforme q situada fuera de la esfera, como en la Fig. 2.18. Imagine-



Fig. 2.18 El trabajo necesario para traer a q' y distribuirla sobre la esfera es q' veces el *valor medio*, sobre la esfera, del potencial φ debido a q.

---

* De hecho, puede demostrarse que la Ec. 55 es el equivalente matemático de la Ec. 15. Esto significa que si se aplica el operador laplaciana a la integral en la Ec. 15, se hallará $-l/\varepsilon_0$. No nos detendremos a demostrar cómo se hace esto; tendrá que aceptarse o calcularlo.

mos ahora una carga de prueba de valor q' distribuida uniformemente sobre esta esfera. El trabajo necesario para traer a q' y distribuirla sobre la esfera de esta manera sería q' veces, el valor medio sobre la esfera, del potencial debido a q. Pero sabemos que este trabajo sería el mismo que si hubiésemos tenido primero la carga de prueba y luego traer a q desde el infinito, y sabemos que en *este* caso el trabajo sería el mismo que si q' estuviese concentrada en el centro de la esfera en lugar de estar distribuida sobre la superficie. Esto prueba la afirmación en este caso. Como los potenciales de varios manantiales son simplemente aditivos, debe también ser cierto para *todo* sistema de manantiales situados todos ellos en el exterior de la esfera S.

Esta propiedad del potencial está estrechamente relacionada con un hecho que puede parecer discordante: no puede construirse un campo electrostático que mantenga una partícula cargada en equilibrio *estable* en el vacío. Este « teorema de imposibilidad » como otros en la física, es útil para evitar una especulación y un esfuerzo infructuosos. Veamos por qué es cierto esto. Supongamos que tenemos un campo eléctrico en el cual, contrariamente al teorema, exista un punto P en el cual una partícula cargada positivamente estuviese en equilibrio estable. Esto significa que *cualquier* pequeño desplazamiento de la partícula a partir de P debe llevarla a un lugar donde actúe un campo eléctrico que la empuje hacia P. Pero esto significa que una pequeña esfera alrededor de P debe tener un $\mathbf{E}$ dirigido hacia el interior en *todo* punto de su superficie. Esto contradice la ley de Gauss, ya que no hay cargas negativas dentro de la región. (Nuestra carga de prueba no cuenta; además es positiva.) En otras palabras, no se puede tener una región vacía donde el campo eléctrico esté dirigido todo hacia el interior o todo hacia el exterior, y esto es lo que se necesitaría para equilibrio *estable*. Para expresar el mismo hecho en función del potencial eléctrico, una posición estable para una partícula cargada debe ser tal que el potencial φ sea menor que el de todos los puntos próximos (si la partícula está cargada positivamente) o mayor que el de todos los puntos próximos (si la partícula está cargada negativamente). Evidentemente ninguno de los dos es posible para una función cuyo valor medio sobre la esfera es siempre igual a su valor en el centro.

Por descontado que se puede tener una partícula cargada en *equilibrio* en un campo electrostático en el sentido que la fuerza sobre ella es nula. El punto donde $\mathbf{E} = 0$ en la Fig. 1.10 es una posición de ese tipo. La posición media entre dos cargas positivas iguales es una posición de equilibrio para una tercera carga, tanto positiva como negativa. Pero el equilibrio no es estable. (Pensemos qué ocurre cuando la tercera carga se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio.) Dicho sea de paso, es posible atrapar y mantener estable una partícula cargada eléctricamente por un campo eléctrico que varía con el tiempo.

2.12 *Distinción entre la Física y las Matemáticas*

En las últimas secciones anteriores nos hemos ocupado de relaciones matemáticas y nuevas maneras de expresar hechos familiares.

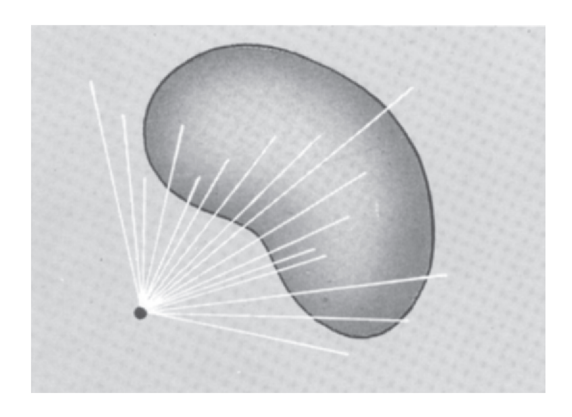


Fig. 2.19 En un campo no inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, el flujo a través de una superficie cerrada no es cero.

Puede ayudar a separar la física de las matemáticas, y la ley de la definición, si intentamos imaginar cómo serían las cosas si la fuerza eléctrica *no* fuese una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia sino una fuerza de alcance finito, por ejemplo, una fuerza del tipo

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2} \tag{57}$$

Entonces la ley de Gauss en la forma integral, expresada en la Ec. 37, seguramente fallaría, pues tomando una superficie muy grande que encierra algunos manantiales, hallaríamos un pequeño campo que se anularía sobre esta superficie. El flujo tendería a cero al aumentar la superficie, en vez de permanecer constante. Sin embargo, aún podríamos definir un campo en cada punto del espacio. Podríamos calcular la divergencia de tal campo, y la Ec. 38, que describe una propiedad matemática de *todo* campo vectorial, aún sería cierta. ¿Existe aquí una contradicción? No, porque la Ec. 39 también fallaría. La divergencia del campo no sería lo mismo que la densidad de manantial. Podemos comprender esto notando que un pequeño volumen que no contuviera manantiales aun podría tener un flujo neto a través de él, debido al efecto de un manantial *exterior* al volumen, si el campo tuviera alcance finito. Como se sugiere en la Fig. 2.19 entraría más flujo por la parte cercana al manantial que el que abandinaría el volumen.

Así podemos decir que las ecuaciones 37 y 39 expresan la misma *ley física*, la ley inversa del cuadrado que Coulomb estableció por medida directa de las fuerzas entre cuerpos cargados, mientras que la Ec. 38 es una expresión de un *teorema matemático* que nos permite trasladar nuestra expresión de esta ley de forma diferencial a integral o a la inversa. Las relaciones que conectan **E**, ρ y ϕ se recogen en las figuras 2.20 y 2.20′.

¿Cómo podemos justificar estas relaciones diferenciales entre manantial y campo en un mundo donde la carga eléctrica no es realmente una jalea lisa sino que está concentrada en partículas de cuyo interior conocemos muy poco? Realmente, una expresión como la Ec. 54, la ecuación de Poisson, sólo tiene significado a escala macroscópica. La densidad de la carga ρ ha de interpretarse como valor medio en una región pequeña pero finita que contenga muchas partículas. Así pues la función ρ no puede ser continua en la forma que le gustaría a un matemático. Cuando hacíamos contraer la región V_i en el curso de la demostración de la ley de Gauss, sabemos como físicos que no la debemos hacer decrecer demasiado. Esto es un tanto burdo, pero el hecho es que nos arreglamos muy bien con el modelo continuo en sistemas eléctricos a gran escala. En el mundo atómico tenemos las partículas elementales, y el vacío. Dentro de las partículas, incluso si la ley de Coulomb resulta tener alguna clase de significado, las cosas suceden de manera muy distinta. El vacío, en lo que concierne

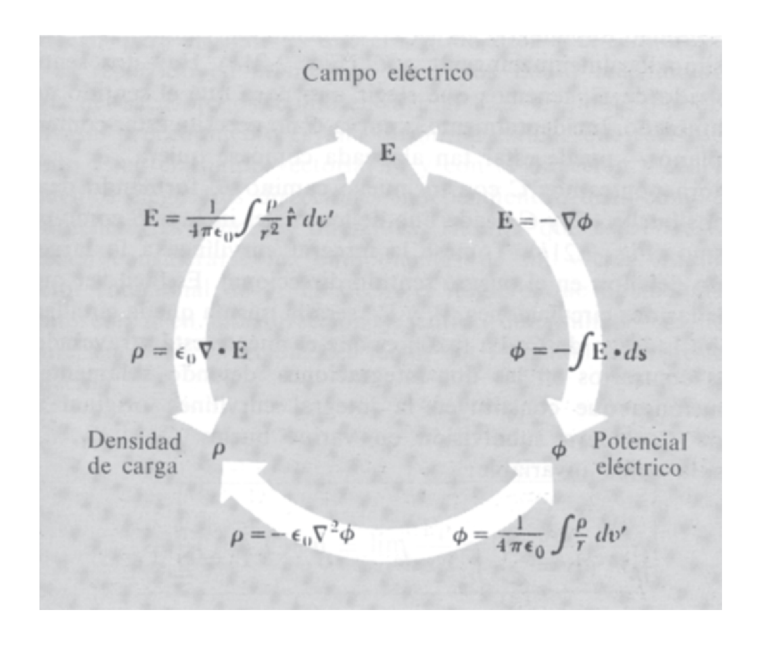


Fig. 2.20 Cómo están relacionados la densidad de carga eléctrica, potencial eléctrico y campo eléctrico. En las relaciones integrales intervienen la integral curvilínea y la integral de volumen. En las relaciones diferenciales intervienen el gradiente, la divergencia y la div · gra o ∇^2, el operador Laplaciana.

a la electrostática, está regido por la ecuación de Laplace. Aunque, no podemos afirmar que, incluso en el vacío, el paso a un límite de tamaño cero tenga significado *físico*.

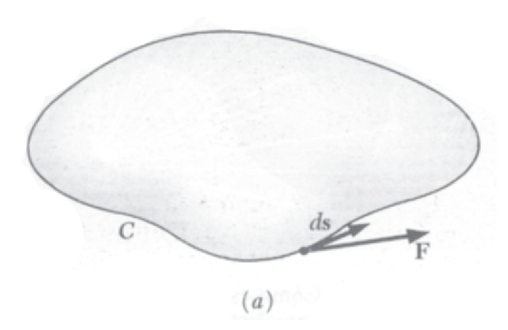
2.13 Rotacional de una función vectorial *

Desarrollamos el concepto de divergencia, una propiedad local de un campo vectorial, partiendo de la integral de superficie sobre una gran superficie cerrada. Con el mismo espíritu, consideraremos la integral curvilínea de cierto campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ tomada a lo largo de un camino cerrado, una curva C la cual se cierra sobre sí misma. La curva C puede considerarse como el contorno de cierta superficie S que la abarca. Un buen nombre para el valor de tal integral curvilínea a lo largo de una línea cerrada es el de *circulación;* usaremos Γ (gamma mayúscula) como su símbolo:

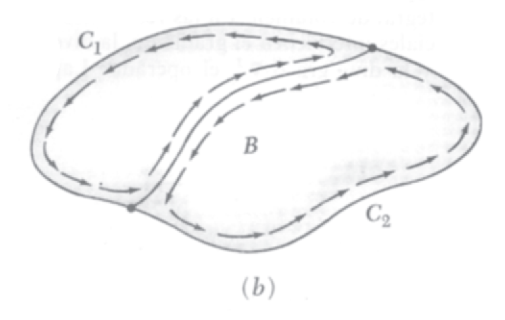
$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (58)$$

* El estudio de esta sección y lo que resta del capítulo 2 puede posponerse hasta que se alcance el capítulo 6. Hasta entonces nuestra única aplicación de esta derivada vectorial será la demostración de que un campo electrostático se caracteriza por rot $\mathbf{E} = 0$, como se explica en la sección 2.16.

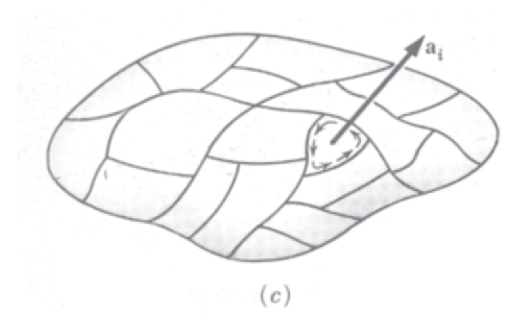
Fig. 2.21 Para el bucle subdividido, la suma de todas las circulaciones Γ_i a lo largo de las partes es igual a la circulación Γ a lo largo de la curva original C.



(a)



(b)



(c)

En la cantidad subintegral $d\mathbf{s}$ es el elemento de camino, un vector infinitésimo localmente tangente a C (Fig. 2.21*a*). Hay dos sentidos de recorrido de C; tenemos que elegir uno para que el sentido de $d\mathbf{s}$ no sea ambiguo. Incidentalmente la curva C no necesita estar contenida en un plano — puede estar tan alabeada como se quiera.

Ahora ponteamos C con un nuevo camino B, formando de este modo dos bucles, C_1 y C_2, cada uno de los cuales incluye B como parte del mismo (Fig. 2.21*b*). Tómese la integral curvilínea a lo largo de cada uno de ellos, en el mismo sentido direccional. Es fácil ver que la suma de las dos circulaciones, Γ_1 y Γ_2, será la misma que la circulación original a lo largo de C: La razón es que el puente está atravesado en sentidos contrarios en las dos integraciones, dejando solamente las contribuciones que constituyen la integral curvilínea original a lo largo de C. Nueva subdivisión en varios bucles $C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_N$ dejan a la suma invariable:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N} \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_i \qquad \text{o} \qquad \Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \tag{59}$$

Aún podemos continuar indefinidamente subdividiendo, añadiendo nuevos puentes, buscando en el límite llegar a una cantidad característica del campo $\mathbf{F}$ en un entorno local. Cuando subdividimos los bucles, hacemos bucles de menor circulación, pero también de menor área. Así que es natural considerar la relación de *circulación del bucle* a *área del bucle*, tal como hemos considerado en la Sec. 2.7, la relación del *flujo* a *volumen*. Sin embargo, las cosas son un poco distintas aquí a causa de que el área $\mathbf{a}_i$ de la porción de superficie que abarca un pequeño bucle C_1 es realmente un vector; una superficie tiene orientación en el espacio. No podemos tomar la relación de un escalar a un vector. En realidad, al hacer los bucles cada vez más pequeños en un entorno, podemos arreglarnos para tener un bucle orientado en una dirección que elijamos. (Recordemos que no estamos comprometidos con una superficie particular limitada por la curva C.) Así podemos pasar a límite de maneras esencialmente distintas y debemos esperar que el resultado lo refleje.

Elijamos una orientación particular para la porción correspondiente a las últimas etapas de subdivisión. El vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ denotará la normal al pedazo de superficie, y este vector debe permanecer constante cuando el pedazo que rodea un punto particular P disminuye tendiendo a cero. El límite del cociente de la *circulación* al *área de pedazo* se escribirá de esta manera:

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \qquad \text{o} \qquad \lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \tag{60}$$

La regla para el signo es que el sentido de $\hat{\mathbf{n}}$ y el sentido en el cual C_i es recorrido en la integral curvilínea estará relacionado por la regla del sacacorchos, como en la Fig. 2.22 El límite que obtenemos por este procedimiento es una magnitud escalar que está asociada al punto P en el campo vectorial $\mathbf{F}$, y con la dirección y sentido de $\hat{\mathbf{n}}$. Podemos elegir tres direcciones independientes, tales como $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ y obtener tres números diferentes. Resulta que estos tres números pueden considerarse los componentes de un vector. Llamamos al vector rotacional de $\mathbf{F}$. Es decir, el número que obtenemos para el límite con $\hat{\mathbf{n}}$ en una dirección y sentido determinados es la componente, en dicha dirección, del vector rot $\mathbf{F}$. Establecemos esto en una ecuación,

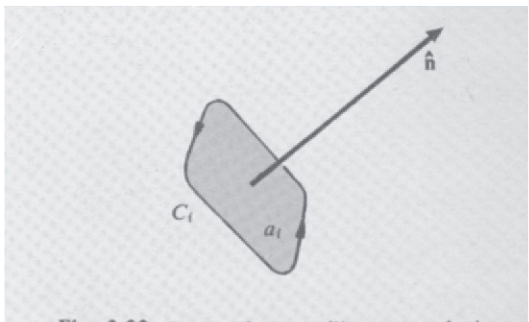


Fig. 2.22 Regla del tornillo que relaciona la normal a la superficie con el sentido que se toma en la integral curvilínea de la circulación.

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \tag{61}$$

Por ejemplo, la componente x de rot $\mathbf{F}$ se obtiene tomando $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$, como en la Fig. 2.23. Cuando el bucle se estrecha alrededor del punto P, lo mantendremos en un plano perpendicular al eje x. En general el vector rot $\mathbf{F}$ variará de un lugar a otro. Si reducimos la porción alrededor de algún otro punto, la relación de la circulación al área puede tener un valor diferente, dependiendo de la naturaleza de la función vectorial $\mathbf{F}$. Es decir, rot $\mathbf{F}$ es él mismo un vector función de las coordenadas. La dirección en cada punto es normal al plano que pasa por este punto en el cual la circulación es máxima. Su módulo es el valor límite de la circulación por unidad de superficie, en este plano, alrededor del punto en cuestión.

Estas dos últimas frases pueden tomarse como definición de rot $\mathbf{F}$. Como en la Ec. 61, no se hace referencia a un sistema coordenado. No hemos demostrado que esto así llamado y definido sea un vector; solamente lo hemos afirmado. El que tenga módulo y dirección no es suficiente para hacerle vector. Las componentes, tal como se han definido, deben comportarse como las componentes de un vector. Supongamos que hemos determinado ciertos valores para las componentes x, y, z de rot $\mathbf{F}$ y aplicando la Ec. 61 con $\hat{\mathbf{n}}$ elegido, sucesivamente, como $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, y $\hat{\mathbf{z}}$. Si rot $\mathbf{F}$ es un vector, estará determinado unívocamente por estas tres componentes. Si ahora elegimos una cuarta dirección para $\hat{\mathbf{n}}$, el primer miembro de la Ec. 61 es fijo y la cantidad en el segundo miembro, la circulación en el plano perpendicular a la nueva $\hat{\mathbf{n}}$ tiene que concordar mejor con ella. En realidad, hasta que no se esté seguro de que rot $\mathbf{F}$ es un vector, aún no es evidente que pueda haber a lo sumo una dirección para la que la circulación por unidad de superficie en P sea máxima —como se suponía tácitamente en la última

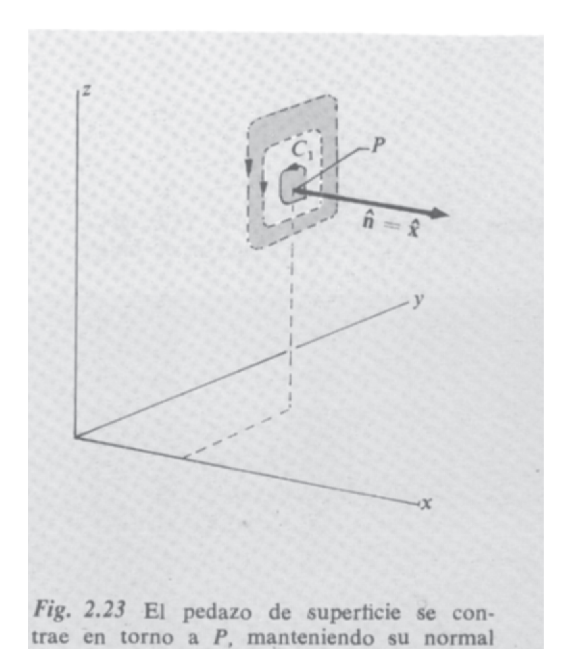


Fig. 2.23 El pedazo de superficie se contrae en torno a P, manteniendo su normal en la dirección del eje x.

definición. De hecho, la Ec. 61 define un vector pero no daremos una demostración de esto.

2.14 Teorema de Stokes

De la circulación alrededor de una porción de superficie infinitésima podemos volver a la circulación a lo largo del bucle original C:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i} \right] \tag{62}$$

En este último paso simplemente multiplicamos y dividimos por a_i. Observemos ahora qué ocurre en el segundo miembro al hacerse N muy grande y todos los a_i pequeños. La cantidad entre corchetes se convierte en (rot $\mathbf{F}$) $\cdot$ $\hat{\mathbf{n}}_i$, donde $\hat{\mathbf{n}}_i$ es el vector unitario normal al i-ésimo trozo. Así pues tenemos a la derecha la suma, extendida a todos los trozos que constituyen la superficie total S que abarca a C, del producto « área de la porción multiplicada por la componente normal de (rot $\mathbf{F}$) ». Esto no es más que la integral de superficie, extendida a S, del vector

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i} \right] = \sum_{i=1}^{N} a_i (\text{ rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \rightarrow \int_S d\mathbf{a} \cdot \text{ rot } \mathbf{F} \tag{63}$$

Así pues hallamos que:

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{ rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}} \tag{64}$$

La relación expresada por la Ec. 64 es un teorema matemático llamado teorema de Stokes. Adviértase como se parece en estructura al teorema de Gauss, el teorema de la divergencia. El teorema de Stokes relaciona la integral curvilínea de un vector con la integral de superficie del rotacional del vector. El teorema de Gauss (Ec. 36) relaciona la integral de superficie de un vector con la integral de volumen de la divergencia del vector. El teorema de Stokes implica una

superficie y la curva que la abarca. En el teorema de Gauss intervienen un volumen y la superficie que lo limita.

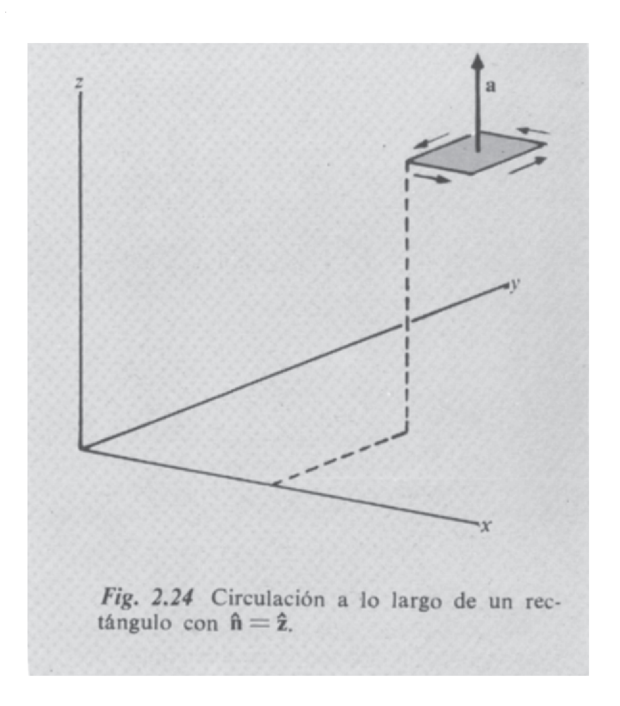


Fig. 2.24 Circulación a lo largo de un rectángulo con $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$.

2.15 El rotacional en coordenadas cartesianas

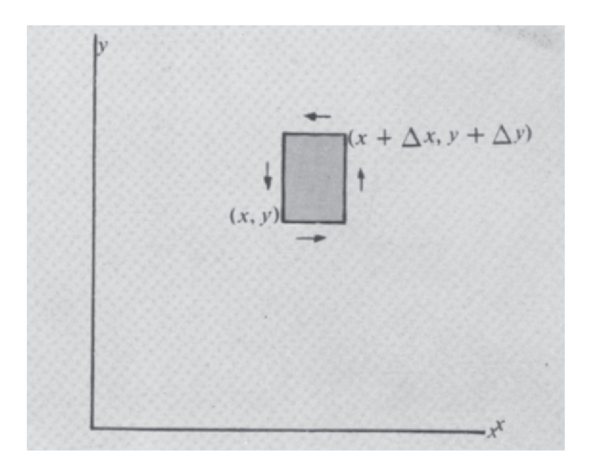
La Ec. 61 es la definición fundamental de rot **F**, establecida sin hacer referencia a un sistema de coordenadas particular. En este aspecto es como nuestra definición fundamental de divergencia, Ec. 34. Como en aquel caso, nos gustaría conocer cómo calcular rot **F** cuando la función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ está dada explícitamente. Para hallar el método, efectuamos la integración requerida en la Ec. 61, pero lo hacemos a lo largo de un camino de forma muy simple, uno que contenga una porción rectangular de superficie paralela al plano xy (Fig. 2.24). Es decir, tomamos $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. De acuerdo con nuestra regla de los signos, el sentido de la integración alrededor del borde debe ser el de las agujas del reloj visto por alguien situado en el sentido de $\hat{\mathbf{n}}$. En la Fig. 2.25 miramos hacia abajo al rectángulo desde arriba.

La integral curvilínea de **A** a lo largo de tal camino depende de la variación de A_x con y y de la variación de A_y con x. Pues si A_x tuviese el mismo valor medio a lo largo de la parte superior del cuadro de la Fig. 2.25, como a lo largo de la parte inferior, la contribución de estas dos partes a la integral curvilínea total se anulará evidentemente. Para los miembros laterales vale una observación similar. La diferencia entre el valor medio de A_x sobre el segmento superior del camino en $y + \Delta y$ y su valor medio en el segmento inferior en y es,

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \Delta y \qquad (65)$$

El argumento es como el que usamos en la Fig. 2.13*b*.

Fig. 2.25 Vista desde encima del rectángulo de la Fig. 2.24.



$$A_x = A_x(x,y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x} \qquad \left(\begin{matrix}\text{en el punto medio de la}\\ \text{parte inferior del cuadrado}\end{matrix}\right)$$

$$(66)$$

$$A_x = A_x(x,y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad \left(\begin{matrix}\text{en el punto medio de la}\\ \text{parte superior del cuadrado}\end{matrix}\right)$$

Estos son los valores medios aludidos, para el primer orden en el desarrollo de Taylor. Es su diferencia multiplicada por la longitud del segmento de camino Δx, la que determina su contribución neta a la circulación. Esta contribución es $-\Delta x \Delta y(\partial A_x/\partial y)$. El signo menos se debe a que estamos integrando hacia la izquierda en la parte superior con lo cual, si A_x es más positivo en la parte superior resulta una contribución negativa para la circulación. La contribución de los lados es $\Delta y \Delta x(\partial A_y/\partial x)$ y aquí el signo es positivo, porque si A_y es más

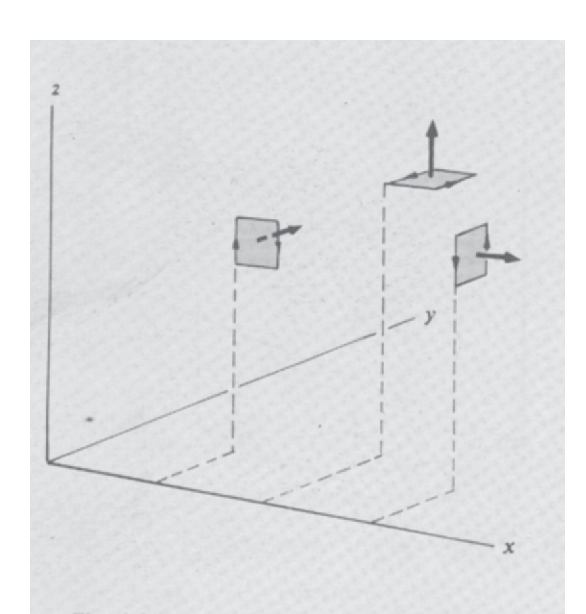


Fig. 2.26 Para cada orientación, el límite de la relación *circulación/área* determina una componente de rot **A** en este punto. Para determinar todas las componentes del vector rot **A** en cada punto, las superficies se reunirán en torno al punto; aquí se han separado para mayor claridad.

positivo a la derecha el resultado es una contribución positiva a la circulación.

Así pues, despreciando los términos de orden superior de Δx y de Δy, la integral a lo largo de todo el rectángulo es

$$\begin{aligned}\int_{\square} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= (-\Delta x)\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta y + (\Delta y)\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\Delta x \\ &= \Delta x\, \Delta y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \qquad (67)$$

Ahora bien $\Delta x \Delta y$ es el valor del área del rectángulo contenido la cual hemos representado por un vector en la dirección z. Evidentemente la cantidad

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (68)$$

es el límite del cociente

$$\frac{\text{Integral curvilínea alrededor del trozo}}{\text{Área de la porción}} \qquad (69)$$

cuando la porción tiende a cero. Si la figura rectangular se ha orientado con su normal en el sentido positivo de y, hallaríamos la expresión

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad (70)$$

para el límite del cociente correspondiente, y si el cuadro se ha orientado con su normal en la dirección x, como en el cuadro de la derecha en la Fig. 2.26, habríamos obtenido

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad (71)$$

Aunque hemos considerado solamente rectángulos, nuestro resultado es realmente independiente de la forma del pequeño trozo y su contorno, por las mismas razones que en el caso de las integrales que intervienen en el teorema de la divergencia. Por ejemplo, es claro que podemos reunir libremente diferentes rectángulos para formar otras figuras, debido a que las integrales curvilíneas a lo largo de las partes comunes del contorno se anulan entre sí (Fig. 2.27).

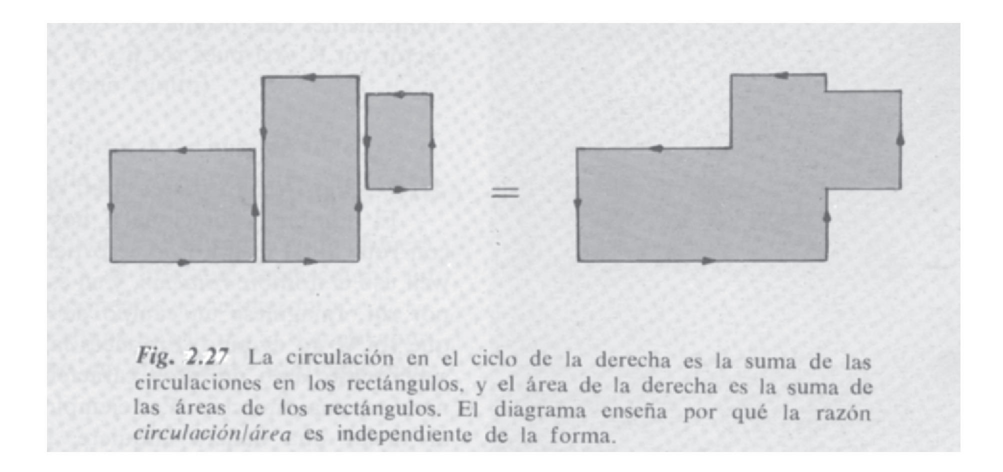


Fig. 2.27 La circulación en el ciclo de la derecha es la suma de las circulaciones en los rectángulos, y el área de la derecha es la suma de las áreas de los rectángulos. El diagrama enseña por qué la razón *circulación/área* es independiente de la forma.

Deducimos que para cualquiera de estas orientaciones el límite de la razón de la circulación al área es independiente de la forma de la porción elegida. Así pues obtenemos como fórmula general para las componentes del vector rot **F**, cuando **F** se da en función de x, y, z:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{72}$$

Podemos hallar la siguiente regla más fácil de recordar que la misma fórmula. Formemos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{73}$$

Desarrollándolo de acuerdo con la regla para los determinantes, se obtiene rot **F** en la forma indicada en la Ec. 72. Adviértase que la componente x de rot **F** depende de la velocidad de variación de F_z en la dirección y y de la variación de F_y en la dirección z cambiada de signo, y así sucesivamente.

A veces se usa en lugar del nombre rotacional el símbolo $\nabla \times$, leído « nabla multiplicado vectorialmente » donde se interpreta como el vector

$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{74}$$

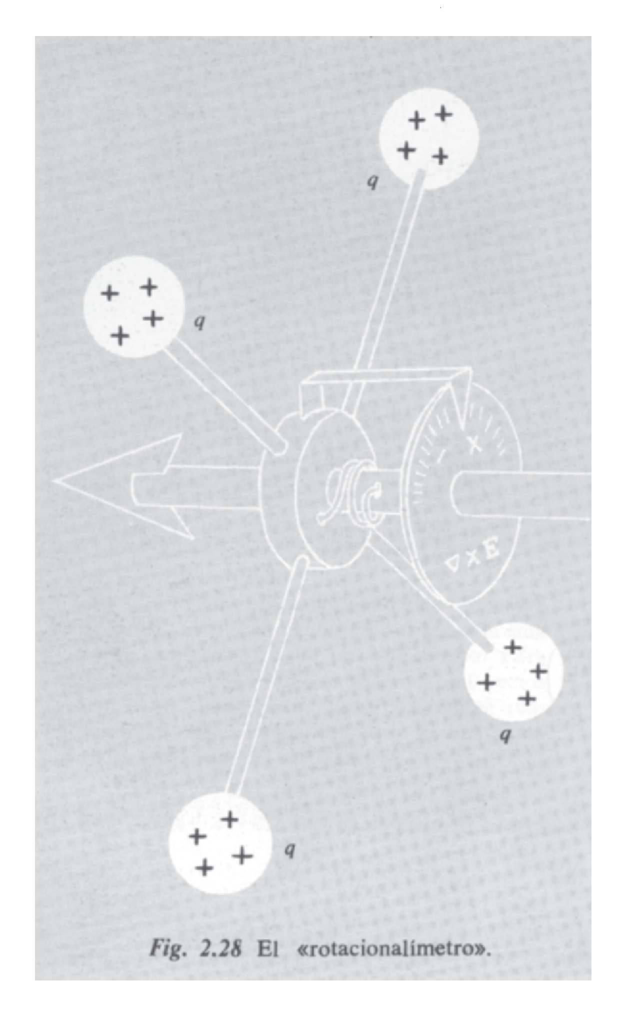


Fig. 2.28 El «rotacionalímetro».

Si escribimos $\nabla \times \mathbf{F}$ y seguimos las reglas para la obtención de las componentes del producto vectorial obtenemos automáticamente el vector rot **F**. Así pues rot **F** y $\nabla \times \mathbf{F}$ significan lo mismo.

2.16 *Significado físico del rotacional*

El nombre « rotacional » nos recuerda que un campo vectorial con rotacional distinto de cero tiene circulación, o turbulencia. Maxwell usó el nombre *rotación*, y en español se representa abreviadamente por rot. Imagínese un campo de vectores velocidad **G**, y supóngase que rot **G** no es nulo. Entonces las velocidades en este campo tienen superpuesto uno de estos caracteres: $\uparrow\rightleftarrows\downarrow$ o $\downarrow\leftrightarrows\uparrow$ a la circulación general en una dirección. Por ejemplo, el campo de velocidades del agua al vaciar una bañera adquiere, generalmente, una circulación. Su rotacional no es cero en la mayor parte de la superficie. Cualquier cosa que flote en la superficie gira mientras avanza. Este concepto es de central importancia en la Física de fluidos, hidrodinámica o aerodinámica.

Para construir un « rotacionalímetro » para un campo eléctrico — al menos en imaginación — podríamos fijar cargas positivas a un cubo de rueda mediante radios aislantes, como en la Fig. 2.28. Explorando el campo eléctrico con este dispositivo, hallaríamos dondequiera que rot **E** no sea nulo una tendencia de la rueda a girar en torno al eje. Con un resorte para frenar la rotación, podría usarse el valor de la torsión para indicar el par, el cual sería proporcional a la componente del vector rot **E** en la dirección del eje. Si podemos hallar la dirección del eje para la cual el par es máximo, y en el sentido de las agujas del reloj, ésta es la dirección del vector rot **E**. (Por supuesto que no podemos dar crédito al rotacionalímetro en un campo que varíe mucho dentro de las dimensiones de la misma rueda.)

¿Qué podemos decir, a la luz de todo esto, acerca del campo *electrostático* **E**? La conclusión que podemos deducir es muy simple: el rotacionalímetro siempre indicaría cero. Esto se deduce de un hecho que ya hemos tratado; a saber, en el campo electrostático la integral curvilínea de **E** a lo largo de *todo* camino cerrado es nula. Precisamente para recordar por qué es así, hemos visto que la integral curvilínea de **E** entre dos puntos cualesquiera tales como P_1 y P_2 en la Fig. 2.29 es independiente del camino. Al hacer que los dos puntos P_1 y P_2 sean muy próximos, la integral curvilínea a lo largo del camino más corto en la figura, evidentemente se anula — a menos que la posición final esté en una singularidad tal como una carga puntiforme, caso que podemos excluir. Así pues la integral curvilínea debe ser nula a lo largo del camino cerrado en la Fig. 2.29*d*. Pero ahora, si la circulación es nula a lo largo de *todo* camino cerrado, se sigue del teorema de Stokes que la integral de superficie de rot **E** es cero sobre una porción cualquiera en forma, tamaño o posición. Por lo tanto rot **E** debe ser cero en *todo punto*, pues si no fuera nulo en alguna parte podríamos imaginar un trozo en este lugar para infringir la conclusión.

Todo esto conduce a la simple expresión que en el campo electrostático **E**:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \qquad \text{(en todo punto)} \tag{75}$$

La recíproca también es cierta. Si rot **E** es nulo en todo punto, **E** puede describirse como gradiente de una función potencial y sería un campo electrostático.

Esta prueba es fácil de aplicar. Cuando se introdujo por primera vez la función vectorial de la Fig. 2.3, se dijo que representaba un posible campo electrostático. Las componentes se definieron por $E_x = Ky$ y $E_y = Kx$ a las cuales deberíamos añadir $E_z = 0$ para completar la determinación de un campo en un espacio tridimensional. Calculando rot **E** hallamos:

$$\begin{aligned}
(\text{rot } \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\
(\text{rot } \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \\
(\text{rot } \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0
\end{aligned} \tag{76}$$

Esto nos manifiesta que **E** es el gradiente de un potencial escalar. Casualmente este campo particular **E** tiene divergencia nula, también:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{77}$$

Representa por tanto un campo electrostático en una región *libre de carga*.

Por otro lado, la función vectorial igualmente simple definida por $F_x = Ky$, $F_y = -Kx$, $F_z = 0$, no tiene rotacional nulo. En cambio,

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = -2K \tag{78}$$

Por lo tanto ningún campo electrostático podría tener esta forma. Si se dibujara la forma de este campo se vería en seguida que tiene circulación.

Podemos entender estos aspectos de las funciones vectoriales estudiando los campos bidimensionales representados en la Fig. 2.30. En cuatro de estos campos la divergencia de la función vectorial es nula en toda la región expuesta. Inténtese identificar las cuatro. La divergencia implica un flujo neto hacia el interior, o hacia el exterior, de un entorno. Es fácil ponerlo de manifiesto en algunas figuras. En otras podemos ver en seguida que la divergencia es cero. En tres

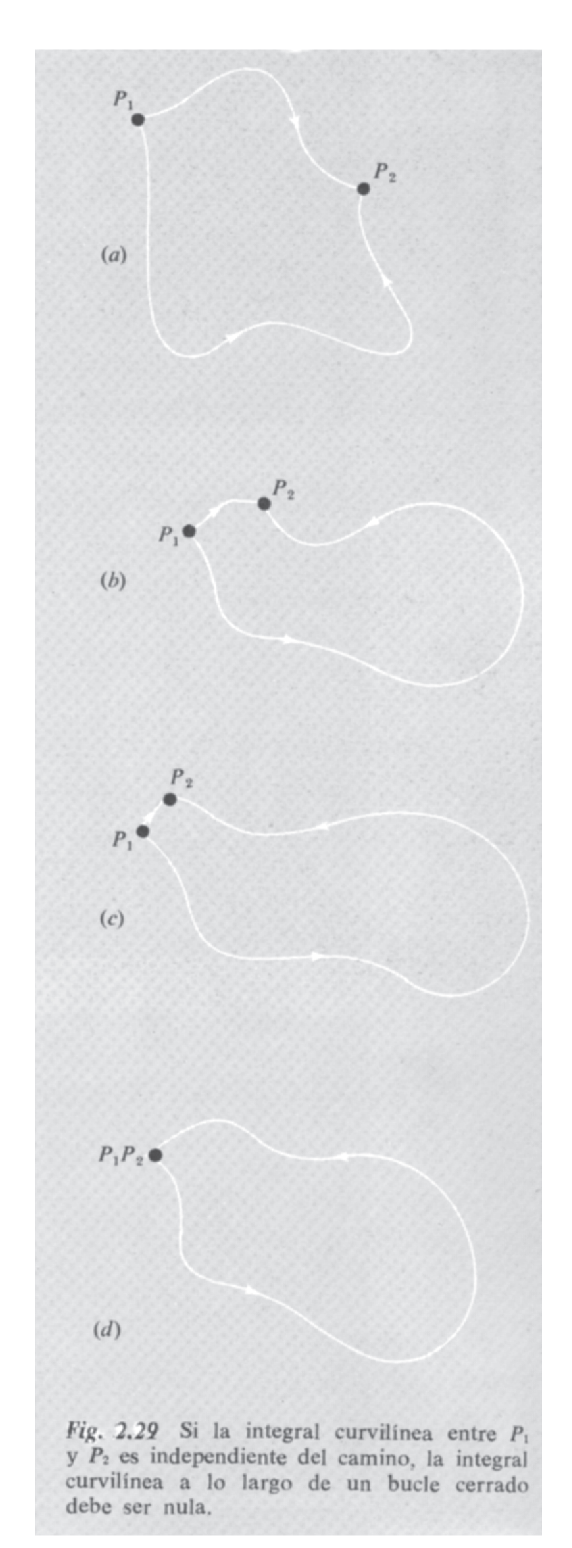


Fig. 2.29 Si la integral curvilínea entre P_1 y P_2 es independiente del camino, la integral curvilínea a lo largo de un bucle cerrado debe ser nula.

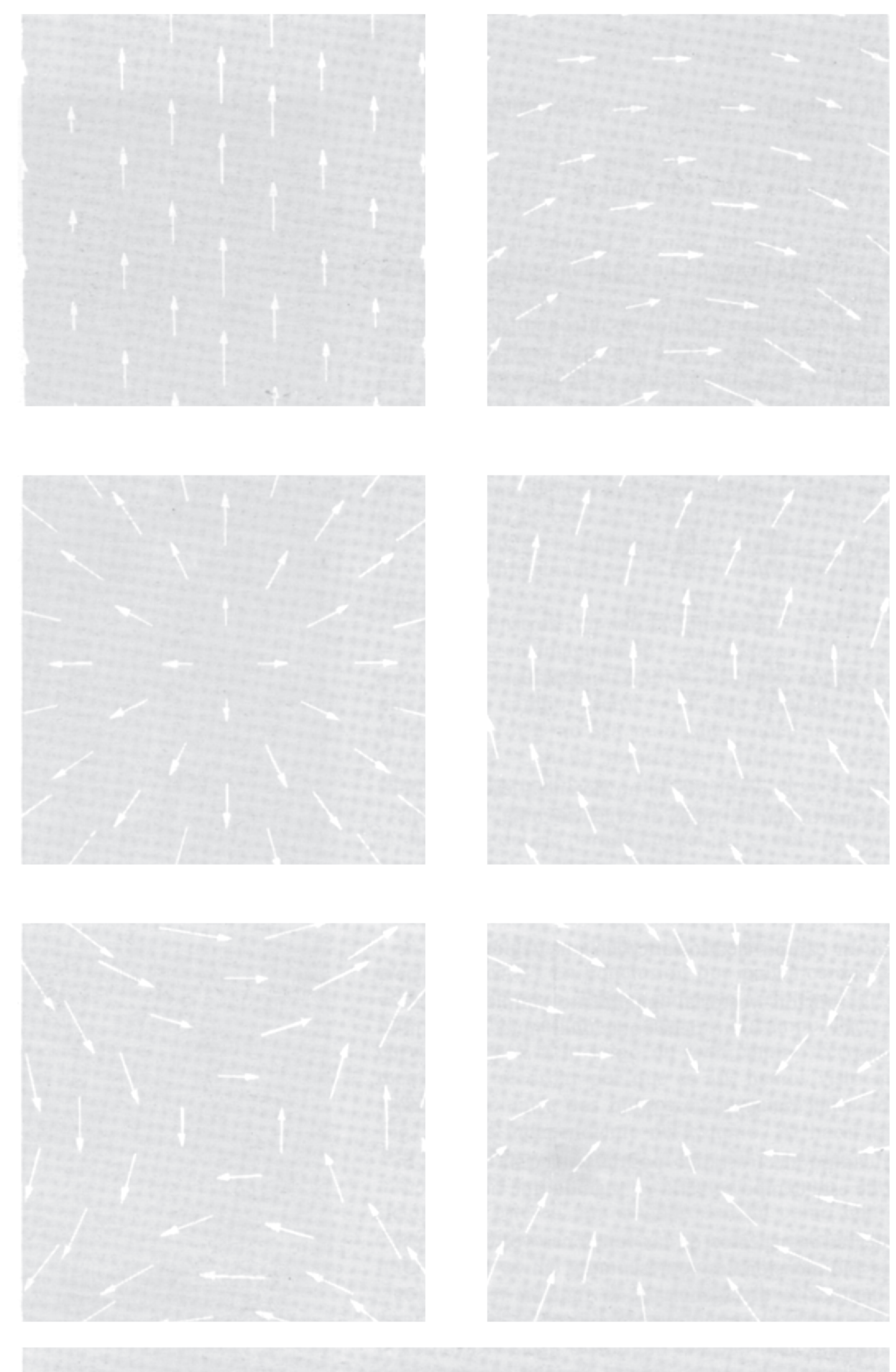
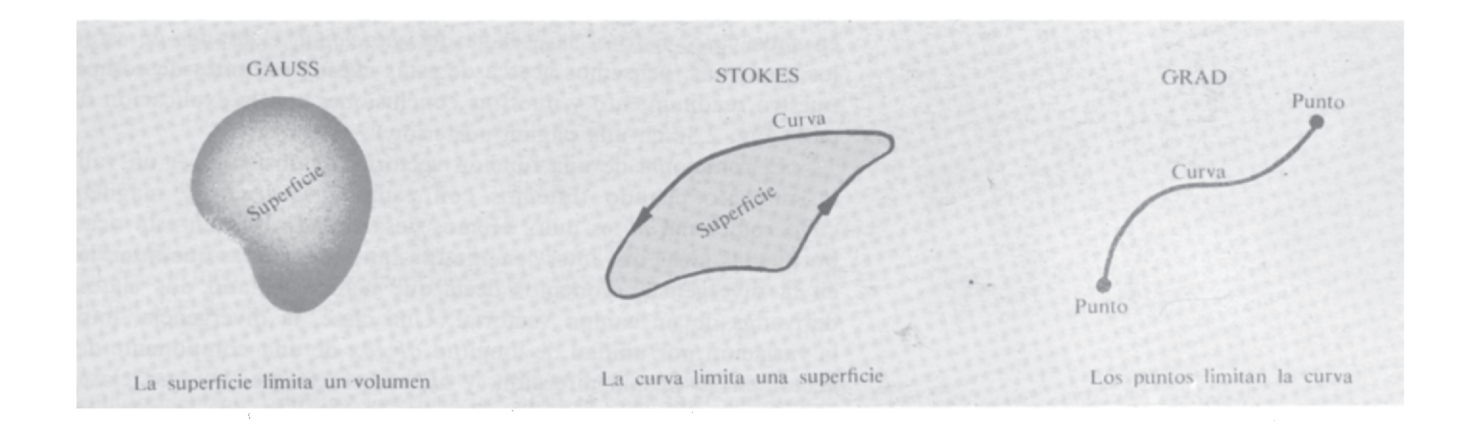


Fig. 2.30 Cuatro de estos campos vectoriales tienen divergencia nula en la presente región. Tres tienen rotacional cero. ¿Puede señalarlos?

Fig. 2.31 Algunas relaciones vectoriales resumidas.



$$\int_{\text{superficie}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{volumen}} \text{div}\,\mathbf{F}\,dv \qquad \int_{\text{curva}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{superficie}} \text{rot}\;\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{curva}} \text{grad}\;\varphi\cdot d\mathbf{s}$$

EN COORDENADAS CARTESIANAS

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{F}$$

$$\text{rot}\;\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \nabla\times\mathbf{A}$$

$$\text{grad}\;\varphi = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

de los campos el rotacional de la función vectorial es nulo, en toda la porción de campo representado. Intentemos identificar los tres decidiendo si la integral curvilínea a lo largo de un ciclo sería o no nula en cada caso. Esto es la esencia del *rotacional.* (Después de estudiar los esquemas, pensemos acerca de estas cuestiones antes de comparar nuestro razonamiento y nuestras conclusiones con la explicación dada en la Fig. 2.32 en una página posterior.)

El rotacional de una función vectorial demostrará ser un valioso instrumento cuando tratemos con campos eléctricos y magnéticos cuyo rotacional *no* es nulo. Hemos desarrollado esto en esta ocasión porque las ideas que intervienen están tan unidas a las que intervienen en la divergencia. Podemos decir que hemos hallado dos clases de derivadas de un campo vectorial. Una clase, la divergencia, implica la variación por unidad de longitud $\partial F_x/\partial x$ de una componente de un vector en su propia dirección, y así sucesivamente. La otra clase, es una especie de « derivada lateral » que implica la variación por unidad de longitud de F_x al moverse en la dirección y o z.

Las relaciones llamadas teoremas de Gauss y teorema de Stokes están resumidas en la Fig. 2.31. La conexión entre la función potencial escalar y la integral curvilínea de su gradiente puede también considerarse como un miembro de esta familia de teoremas y está incluida en la tercera columna.

Problemas

2.1 La siguiente función vectorial representa un posible campo electrostático:

$$E_x = 6xy \qquad E_y = 3x^2 - 3y^2 \qquad E_z = 0$$

Calcular la integral curvilínea de **E** desde el punto (0,0,0) al punto $(x_1,y_1,0)$ a lo largo del camino que va en línea recta de (0,0,0) a $(x_1,0,0)$ y luego a $(x_1,y_1,0)$. Efectuar un cálculo similar para el camino que va por el otro lado del rectángulo, por el punto $(0,y_1,0)$. Debe hallarse el mismo resultado si la afirmación anterior es cierta. Ahora se tiene la función potencial $\varphi(x,y,z)$. Tómese el gradiente de esta función y véase que se obtiene de nuevo las componentes del campo dado.

2.2 Considérese el sistema de dos cargas mostrado en la Fig. 2.7. Sea z la coordenada a lo largo de la recta que une las dos cargas, con $z = 0$ en la posición de la carga positiva. Represéntese gráficamente el potencial a lo largo de esta línea, en función de z en metros, desde $z = -5$ a $z = 15$.

2.3 Una carga de $2 \cdot 10^{-9}/3\ C$ está situada en el origen. Dos cargas de $-10^{-9}/3\ C$ cada una están situadas en los puntos de coordenadas x, y, z, 1, 1, 0 y − 1, 1, 0. Es fácil ver que el potencial ϕ es cero en el punto (0, 1, 0) y cero en el infinito. Se deduce que en el eje y más allá del (0, 1, 0) la función $\phi(0, y, 0)$ debe tener un mínimo o un máximo. En este punto el campo eléc-

trico **E** debe ser nulo. ¿Por qué? Localizar el punto, al menos aproximadamente.

Solución: $y = 1{,}607$.

2.4 Descríbase el campo eléctrico y la distribución de carga correspondiente al siguiente potencial:

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{para } x^2 + y^2 + z^2 < a^2$$

$$\phi = -a^2 + \frac{2a^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \qquad \text{para } a^2 < x^2 + y^2 + z^2$$

2.5 Una esfera del tamaño de una pelota de baloncesto se carga a un potencial de -1000 volts. ¿Alrededor de cuántos electrones extra hay en la misma por cm^2 de superficie?

Solución: $3 \cdot 10^7$

2.6 Una esfera del tamaño de la tierra tiene un coulomb de carga distribuida uniformemente sobre su superficie. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico justo fuera de la superficie, en volt/metro? ¿Cuál es el potencial de la esfera, en volt, con el cero de potencial en el infinito?

Solución: $2{,}5 \cdot 10^4$ volt/metro; 1500 volts.

2.7 Designemos los vértices de un cuadrado, de 5 cm de lado, en el sentido de las agujas del reloj, A, B, C, D. Colocar una carga de $2 \cdot 10^{-9}/3$ C en A, -10^{-9} C en B. Determinar el valor de la integral curvilínea de **E,** desde C a D. (No se necesita una integración real).

2.8 En la distribución de carga uniforme cilíndrica de la Fig. 2.17.

(a) Demuéstrese que la expresión dada allí para el campo en el interior del cilindro, se deduce de la ley de Gauss.

(b) Hállese el potencial ϕ en función de r, dentro y fuera del cilindro, tomando $\phi = 0$ para $\gamma = 0$.

2.9 Para el sistema de la Fig. 2.10, esquematizar la superficie equipotencial que toca el borde del disco. Hállese el punto donde corta al eje de simetría.

2.10 Una varilla delgada se extiende a lo largo del eje z desde $z = -d$ a $z = d$. La varilla posee una carga uniformemente distribuida a lo largo de la misma con una densidad de carga lineal λ. Integrando a lo largo de esta distribución de carga, calcular el potencial en el punto P_1 sobre el eje z con coordenadas 0, 0, $2d$. Mediante otra integración hallar el potencial en el punto P_2 en el eje x y localizar este punto para que el potencial sea igual al potencial en P_1.

Solución: $\lambda/4\pi\varepsilon_0 \ln 3$; $x = \sqrt{3}d$.

2.11 Los puntos P_1 y P_2 del problema precedente están situados sobre una elipse cuyos focos están en los extremos de la varilla, como puede comprobarse comparando las sumas de las distancias de P_1 y de P_2 a los extremos de la varilla. Esto sugiere que toda la elipse puede ser una equipotencial. Comprobar esta conjetura calculando el potencial en el punto $(3d/2, 0, d)$ que está en la misma elipse. En realidad es cierto, aunque no hay razón evidente, las superficies equipotenciales del sistema son una familia de elipsoides alargadas homofocales. Véase si se puede demostrar esto. Se tendría que deducir una expresión para el potencial en un punto general $(x, 0, z)$ en el plano xz. Luego demostrar que, si x y z están relacionadas por la ecuación $x^2/(a^2 - d^2) + z^2/a^2 = 1$, que es la ecuación de una elipse con focos en $z = \pm d$, el potencial dependerá solamente del parámetro a y no de x o z.

2.12 El triángulo rectángulo con el vértice P en el origen, base b, y

Obsérvese que el vector permanece constante al avanzar en el sentido que él indica. Es decir $\delta F/\delta y = 0$ con $F_x = 0$. Luego div $\mathbf{F} = 0$. Obsérvese que la integral curvilínea a lo largo de la línea de trazos no es nula.

div $\mathbf{F} = 0$ rot $\mathbf{F} \neq 0$

Obsérvese que no hay variación en el módulo de **F**, para primer orden, al avanzar en el sentido indicado por **F**. Ello es suficiente para asegurar que la divergencia es cero. Parece que la circulación podría ser cero a lo largo del camino representado, pues **F** es menos intenso en el tramo largo que en el corto. Realmente es un posible campo electrostático, con **F** proporcional a $1/r$, donde r es la distancia a un punto exterior al dibujo.

div $\mathbf{F} = 0$ rot $\mathbf{F} = 0$

Este es un campo central. Es decir, **F** es radial y para r dada su módulo es constante. Todo campo central tiene rotacional cero: la circulación es cero a lo largo del camino de trazos y cualquier otro camino. Pero la divergencia evidentemente no es nula.

div $\mathbf{F} \neq 0$ rot $\mathbf{F} = 0$

Por la misma razón anterior deducimos que div **F** es nula. Aquí el módulo de **F** es el mismo en todas partes, así que la integral curvilínea a lo largo del tramo largo del camino representado no se anula con la integral en el tramo corto, y la circulación no es cero.

div $\mathbf{F} = 0$ rot $\mathbf{F} \neq 0$

La circulación podría evidentemente ser nula a lo largo de los caminos representados. Realmente, es el mismo campo que en la figura 2.2 y es un posible campo electrostático.

De esta figura no resulta evidente que div $\mathbf{F} = 0$, pero puede verse que podría ser cero.

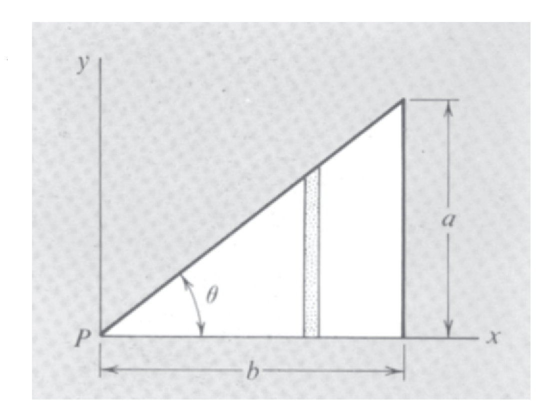
div $\mathbf{F} = 0$ rot $\mathbf{F} = 0$

Está claro que la circulación a lo largo del camino de trazos no es nula. También parece que la divergencia es distinta de cero, ya que vemos vectores que convergen hacia el centro en todas direcciones.

div $\mathbf{F} \neq 0$ rot $\mathbf{F} \neq 0$

Fig. 2.32 Examen de la Fig. 2.30.

altura a tiene una densidad uniforme de carga superficial σ. Determinar el potencial en el vértice P. Primero hallar la contribución de la franja vertical de anchura dx en x. Demostrar que el potencial en P puede expresarse: $\phi_P = (\sigma/4\pi\varepsilon_0)\, b[\ln(1 + \text{sen}\, \theta)/\cos\theta]$.



Prob. 2.12

2.13 Por el cálculo explícito de las componentes de $\nabla \times \mathbf{E}$, demostrar que la función vectorial especificada en el problema 2.1 es un posible campo electrostático. (Por supuesto si se resuelve este problema, se habrá probado de otra manera, por el cálculo de una función escalar, que ésta es el gradiente). Determinar la divergencia de este campo.

2.14 ¿La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ satisface a la ecuación de Laplace bidimensional? ¿Y la función $g(x, y) = x^2 - y^2$? Esquematizar la última función, calcular el gradiente en los puntos (0, 1); (1, 0); y (– 1, 0) e indicar por flechas las direcciones y sentidos de estos vectores.

2.15 Calcúlese el rotacional y la divergencia de cada uno de los siguientes campos vectoriales. Si el rotacional resulta ser nulo, inténtese hallar una función escalar φ de la cual el vector campo es el gradiente:

(a) $F_x = x + y;\ F_y = -x + y;\ F_y = -2z.$

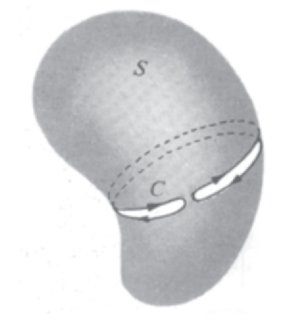
(b) $G_x = 2y;\ G_y = 2x + 3z;\ G_z = 3y.$

(c) $H_x = x^2 - z^2;\ H_y = 2;\ H_z = 2xz.$

2.16 Si $\mathbf{A}$ es un campo vectorial con derivadas continuas, div (rot $\mathbf{A}$) = 0, o usando la notación «nabla», $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Este teorema se necesitará más adelante. Ahora el problema es demostrarlo. Hay dos caminos distintos para hacerlo:

(*a*) *(Cálculo directo, no inspirado, en un sistema coordenado particular):* Utilizando la fórmula para ∇ en coordenadas cartesianas, desarróllese la fila de derivadas parciales segundas que implica $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

(*b*) *(Con el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes, no son necesarias las coordenadas):* Considérese la superficie S en la figura, un globo casi cortado en dos, que está abrazado por la curva cerrada C. Considérese la integral curvilínea, a lo largo de una curva como C, de cualquier campo vectorial. Luego utilícese los teoremas de Stokes y Gauss con argumentos adecuados.



Prob. 2.16

2.17 Utilizar la identidad $\nabla (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi$ y el teorema de la divergencia para demostrar que la Ec. 38 del capítulo 1 y la Ec. 28 del capítulo 2, son equivalentes para cualquier distribución de carga de extensión finita.

2.18 Un cilindro circular hueco de radio a y longitud b, con los extremos abiertos, tiene una carga total Q uniformemente distribuida sobre su superficie. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre un punto del eje en un extremo y el punto medio del eje? Demostrar esquematizando algunas líneas de campo cómo se imagina que debe ser el campo considerado.

2.19 Tenemos dos esferas metálicas de radios R_1 y R_2, muy separadas comparando con sus radios. ¿Dada una cantidad de carga total Q que se ha de dividir entre las dos esferas, cómo lo hará para que la energía potencial de la distribución de carga resultante sea la menor posible? Para responder a esto, primero calculamos la energía potencial del sistema para una división arbitraria de carga, q en una y $Q - q$ en la otra. Luego minimizar la energía como función de q. Puede suponerse que cualquier carga colocada en una esfera se distribuye uniformemente en tal esfera, estando la otra lo suficientemente alejada para que pueda despreciarse su influencia. Cuando se haya encontrado la división óptima de carga, demostrar que con esta división la diferencia de potencial entre las dos esferas es nula. (De aquí que pueden conectarse con un hilo, y no habrá redistribución. Éste es un ejemplo particular de un principio muy general que encontraremos en el capítulo 3: sobre un conductor, la carga se redistribuye a sí misma de forma que se minimice la energía potencial del sistema.)

2.20 Como distribución de carga eléctrica, el núcleo de oro puede describirse como una esfera de radio $6 \cdot 10^{-13}$ cm con una carga $Q = 79e$ distribuida perfectamente uniforme en su interior. ¿Cuál es el potencial ϕ_0 en el centro del núcleo, expresado en megavolts?

(Primero deducir una fórmula general para ϕ_0 en una esfera de carga Q y radio a. Hacerlo usando la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico interno y externo y luego integrar para hallar el potencial.)

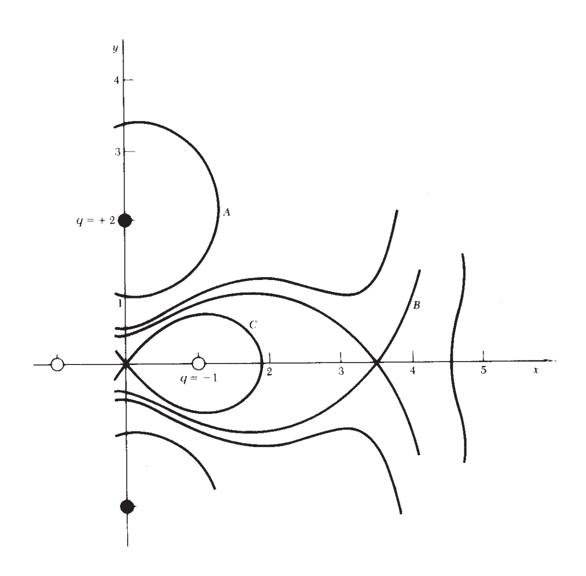
Solución: $\phi = 3Q/4\pi\varepsilon_0 2a = 28{,}44 \cdot 10^6$ volts $= 28{,}44$ megavolts.

2.21 Supongamos ocho protones que están permanentemente fijos en los vértices de un cubo. Un noveno protón flota libremente cerca del centro del cubo. No hay otras cargas en el entorno, ni gravedad. ¿Está atrapado el noveno protón? ¿Puede hallarse una ruta de escape a través de la barrera de energía potencial? La prueba es para calculadora. Se necesitará una precisión de muchos dígitos.

2.22 Un grano de polvo estelar, toscamente esférico de radio $3 \cdot 10^{-7}$ metros, ha adquirido una carga negativa tal que su potencial es de $-0{,}15$ volts. ¿Cuántos electrones extra ha tomado? ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en su superficie, expresado en volt/metro?

2.23 Por medio de un generador Van der Graff, se aceleran protones por una diferencia de potencial de $5 \cdot 10^6$ volts. El haz de protones pasa a continuación a través de una delgada lámina de plata. El número atómico de la plata es 47, y puede suponerse que el núcleo de plata es suficientemente macizo comparado con el protón de modo que pueda despreciarse su movimiento. ¿Cuál será la menor distancia de aproximación posible de cualquier protón al núcleo de plata? ¿Cuál será la intensidad del campo eléctrico que actúa sobre el protón en esta posición?

2.24 Cuál de las dos expresiones encuadradas en la sección 2.1 es arbitrario considerarla corolario de la otra. Demostrar que, si la integral curvilínea $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es nula a lo largo de cualquier camino cerrado, se deduce que la integral curvilínea entre dos puntos diferentes es independiente del camino.



Prob. 2.25

2.25 Dos cargas puntiformes de $2/3\ 10^{-9}\ C$ cada una, y dos cargas puntiformes de $-10^{-9}/3\ C$ cada una están situadas simétricamente en el plano xy como sigue: Las dos cargas positivas están en (0, 2) y (0, −2), las dos cargas negativas en (1, 0) y (− 1, 0). En la figura se han representado algunas de las líneas equipotenciales en el plano xy. (Por supuesto que estas curvas son realmente la intersección de ciertas superficies equipotenciales tridimensionales con el plano xy). Estudiar esta figura hasta que se comprenda su apariencia general. Luego hallar el valor del potencial ϕ en cada una de las curvas A, B y C; como se acostumbra, tómese $\phi = 0$ a distancia infinita. Para efectuar el cálculo del potencial en un punto de la curva hay que elegir un punto en el cual el cálculo del potencial sea lo más fácil posible. Esquematizar toscamente algunas equipotenciales intermedias.

2.26 Usar el resultado del problema 2.12 para calcular lo siguiente: Si un cuadrado con densidad de carga superficial σ y lado s tiene el mismo potencial en el centro que un disco con la misma densidad de carga y diámetro d, ¿cuál debe ser la relación s/d? ¿Es razonable la respuesta?

2.27 Usar el resultado expresado en la Ec. 24 para calcular la energía almacenada en el campo eléctrico del disco cargado descrito en la sección 2.6 (*Sugerencia:* Considerar el trabajo efectuado al construir el disco de carga desde el radio cero al radio a, añadiendo sucesivos anillos de espesor dr. Expresar la energía total en función del radio a y la carga total $Q = \pi a^2 \sigma$).

Solución: $8Q^2/4\pi\varepsilon_0 3\pi a$.

2.28 Un disco delgado, de radio 3 cm, tiene un orificio circular de radio 1 cm en su parte media (concéntrico). Hay una densidad de carga uniforme de $-4 \cdot 10^{-5}/3$ C/m^2 sobre el disco.

(*a*) ¿Cuál es el potencial en el centro del orificio? (Se supone el cero de potencial a distancia infinita.)

(*b*) Un electrón, partiendo del reposo en el centro del orificio, se mueve hacia fuera a lo largo del eje, experimentando solamente las repulsiones por parte de las cargas sobre el disco. ¿Qué velocidad adquiere? (Masa del electrón $= 9 \cdot 10^{-28}$ g.)

2.29 Una, de dos capas no conductoras esféricas de radio a, posee una carga Q distribuida uniformemente en su superficie; la otra una carga $-Q$, también uniformemente distribuida. Las esferas se acercan hasta que se toquen. ¿Cuál es el campo eléctrico considerado dentro o fuera de las capas? ¿Qué trabajo hay que hacer para separarlas lejos?

2.30 Consideremos una distribución de cargas que tiene densidad constante ρ en todo punto dentro de un cubo de arista b y nula fuera de este cubo. Siendo nulo el potencial eléctrico en el infinito, denotemos por ϕ_0 el potencial en el centro del cubo y ϕ_1 el potencial en un vértice del mismo. Determinar la relación ϕ_0/ϕ_1. El resultado puede hallarse con poco cálculo combinando un razonamiento dimensional con la superposición. (Piénsese en el potencial en el centro de un cubo con la misma densidad de carga y con arista de doble longitud.)

2.31 Una lámina plana no conductora se halla en el plano xy. Las únicas cargas del sistema son las de la lámina. En el semiespacio superior de la lámina, $z > 0$, el potencial es $\phi = \phi_0 \cos kx e^{kx}$, donde ϕ_0 y k son constantes.

(*a*) Comprobar que ϕ satisface a la ecuación de Laplace en el espacio por encima de la lámina.

(*b*) ¿Qué aspecto tienen las líneas de campo?

(*c*) Descríbase la distribución de carga en la lámina.

2.32 Para probar que se necesita más que la dirección y el módulo para definir un vector, inténtese definir un vector llamado squrl **F** por una relación como la Ec. 61 con el segundo miembro al cuadrado:

$$(\text{squrl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left[\lim_{a_i \to 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i} \right]^2$$

Demostrar que esto *no* define un vector. (*Sugerencia:* Considérese invertido el sentido de $\hat{\mathbf{n}}$.)

3

Campo eléctrico en los conductores

3.1 *Conductores y aisladores*

Los primeros experimentadores de la electricidad observaron que las substancias diferían en su facultad de mantener la « virtud eléctrica ». Algunos materiales podían electrizarse fácilmente por fricción y mantenerse en estado electrizado; otros, parecía que no podían electrizarse de esta manera, o no mantenían la « virtud » si la habían adquirido. Los experimentadores de principios del siglo diez y ocho compilaron listas en las que se clasificaban las substancias en « eléctricas » o « no eléctricas ». Alrededor de 1730, los importantes experimentos de Stephen Gray en Inglaterra demostraron que la « virtud eléctrica » podía conducirse de un cuerpo a otro por un cordón horizontal, a distancias de centenares de metros, con tal que el propio cordón estuviese suspendido por hilos de seda *. Establecida la distinción entre conducción y no conducción, los electricistas de la época encontraron que incluso un « no eléctrico » podía electrizarse intensamente si se apoyaba sobre vidrio o se suspendía por hilos de seda. Un final espectacular de una de las exhibiciones eléctricas populares de la época era probablemente la electrización de un muchacho suspendido de una viga por unos hilos de seda; su pelo se erizaba y le saltaban chispas de la punta de la nariz.

Después de los trabajos de Gray y de sus contemporáneos las listas elaboradas de *eléctricos* y *no-eléctricos* se consideraron, en conjunto, una división de los materiales en *aisladores* eléctricos y *conductores* eléctricos. Esta distinción es aún de las más sorprendentes y un contraste extremo que exhibe la naturaleza. Los buenos conductores corrientes, como los metales ordinarios, difieren en su conductividad eléctrica de los aisladores corrientes, como vidrio y plástico, de manera que la relación de sus conductividades es del orden de 10^{20}. Para expresar esto de alguna manera, los experimentadores del siglo XVIII como Gray y Benjamin Franklin, habían establecido que una esfera metálica colocada sobre un poste metálico podía perder su electrificación en una millonésima de segundo; una esfera metálica sobre un poste de vidrio podía mantener su « virtud » durante algunos días. (Para la validez de la última afirmación se necesitaría tomar algunas precauciones más allá de la capacidad de un laboratorio del siglo XVIII. ¿Se puede sugerir algo a este respecto?)

La diferencia eléctrica entre un buen conductor y un buen aislador es tan grande como la diferencia mecánica entre un líquido y un sólido. Esto no es completamente accidental. Ambas propiedades dependen de la *movilidad* de partículas atómicas; en el caso eléctrico, de la movilidad de los portadores de carga, electrones o iones; en el caso de las propiedades mecánicas, de la movilidad de los átomos

---

* La «madeja de hilo» usada para este cordón era sin duda un mal conductor comparada con un hilo metálico, pero suficientemente bueno para conducir carga en experimentos electrostáticos. Gray halló, además, que un hilo fino de cobre era un conductor, pero generalmente usó las madejas de hilo para distancias mayores.

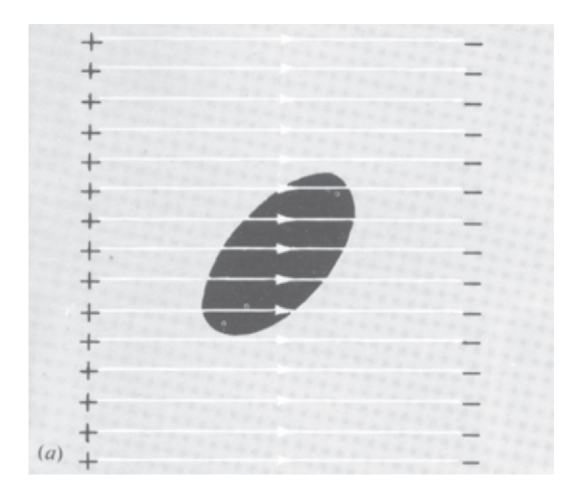
o moléculas que constituyen la estructura del material. Para llevar la analogía un poco más lejos, conocemos substancias cuya fluidez es intermedia entre la de un sólido y la de un líquido — substancias tales como alquitrán o mantecado. En realidad algunas substancias — el vidrio es un buen ejemplo — varían gradual y continuamente desde un líquido móvil a un sólido rígido muy permanente disminuyendo la temperatura unos centenares de grados. En la conductividad eléctrica aún hallamos ejemplos en todo el amplio margen desde « buen conductor » a « buen aislador », y algunas substancias que pueden cambiar la conductividad en casi tan amplio margen dependiendo de condiciones tales como su temperatura. Determinado tipo de substancias fascinantes y útiles, llamadas semiconductores, las cuales encontraremos en el capítulo 4, presentan esta propiedad.

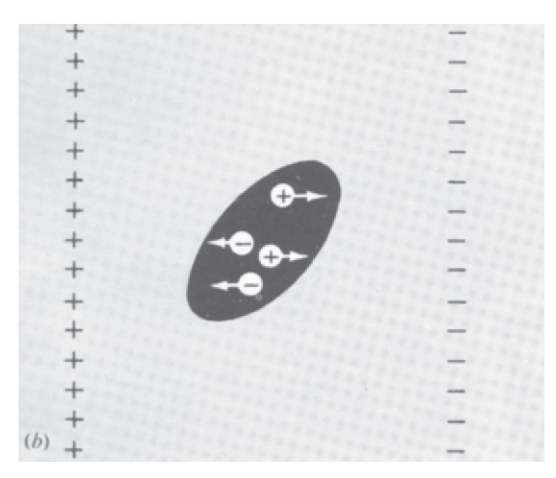
El que llamemos sólido o líquido a un material a veces depende de la escala de tiempo que interviene y quizá también a la escala de distancias. El asfalto natural parece lo suficientemente sólido si tenemos un trozo en la mano. Desde el punto de vista geológico, es un líquido, que brota de depósitos del subsuelo e incluso formando lagos. Por razones similares, podemos esperar que el que un material sea considerado aislador o conductor dependerá de la escala de tiempo del fenómeno del cual estamos interesados.

3.2 *Conductores en el campo electrostático*

Primero consideraremos un sistema electrostático en el que intervienen conductores. Es decir, atenderemos al estado *estacionario* de carga y campo eléctrico que rige después de que hayan tenido lugar todas las redistribuciones de carga en los conductores. Todos los aisladores presentes se suponen aisladores perfectos. Ya hemos mencionado que los aisladores ordinarios están muy próximos a esta idealización, así pues los sistemas que estudiaremos no son demasiado artificiales. Los sistemas en consideración pueden simbolizarse por algunos ejemplos como estos: Coloquemos dos esferas metálicas cargadas, aisladas entre sí y de todo lo demás. Fijémoslas en posiciones relativamente próximas. Se pregunta cuál es el campo eléctrico resultante en todo el espacio que las rodea y entre las esferas y cómo está distribuida la carga en cada esfera. Empezaremos con un problema más general; cuando la carga ha llegado a ser estacionaria, ¿qué podemos decir del campo eléctrico dentro de la materia conductora?

En la situación estática no hay movimiento de carga ulterior. Podemos inclinarnos por decir que el campo eléctrico debe ser nulo en el interior del material conductor. Podemos razonar que si el campo *no* fuese nulo, los portadores de carga móviles experimentarían una fuerza, con esto se pondrían en movimiento, y por lo tanto no tendríamos un caso estático. Tal razonamiento ignora la posibilidad de *otras* fuerzas que pueden actuar sobre los portadores de carga y que deberían estar equilibradas por una fuerza eléctrica para obtener el estado estacionario. Para tener presente la posibilidad de fuerzas





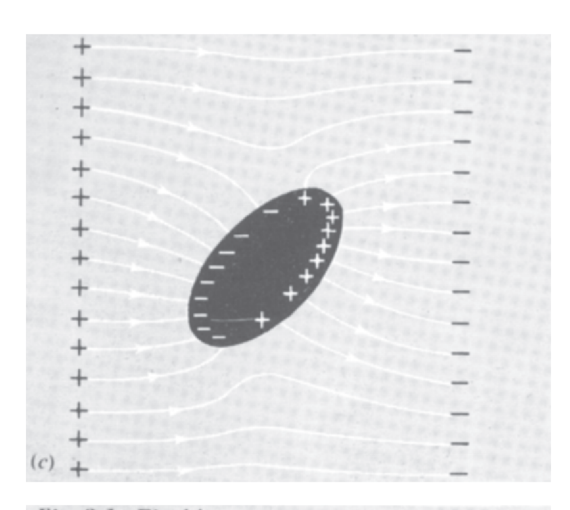


Fig. 3.1 El objeto en (*a*) es un no conductor neutro. Las cargas en él, tanto positivas como negativas, son inmóviles. En (*b*) las cargas se han liberado y empiezan a moverse. Se moverán hasta que se alcance el estado final, representado en (*c*).

distintas a las eléctricas que actúen sobre los portadores de cargas basta pensar en la gravedad. Un ion positivo tiene peso; experimenta una fuerza estacionaria en un campo gravitatorio, y lo mismo un electrón; aunque las fuerzas que ellos experimentan no son iguales. Este es, tal vez, un ejemplo absurdo. Sabemos que las fuerzas gravitatorias son completamente despreciables a escala atómica. Sin embargo, existen otras fuerzas en acción que, muy vagamente, podemos llamar « químicas ». En una batería y en algunos otros escenarios de reacción química, incluyendo la célula viva, los portadores de carga se mueven, a veces, *contra* el campo eléctrico general; esto ocurre porque puede tener lugar una reacción la cual da más energía que la necesaria para el campo. Dudamos en llamar no eléctricas a estas fuerzas, sabiendo como sabemos que la estructura de los átomos y moléculas y las fuerzas mutuas pueden explicarse en función de la ley de Coulomb y la mecánica cuántica. Sin embargo, desde el punto de vista de nuestra teoría *clásica* de la electricidad, debemos tratarlas como extrañas. Ciertamente se comportan de manera muy distinta de las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia en las cuales se ha basado nuestra teoría. La necesidad general de fuerzas que no son eléctricas en este sentido fue ya pronosticada por nuestras deducciones en el Cap. 1 que las fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia no pueden lograr una estructura estática estable.

La cuestión es simplemente ésta: Debemos estar preparados para hallar. en algunos casos, fuerzas no culombianas no equilibradas que actúan sobre portadores de cargas en el interior de un medio conductor. Si ocurre esto, se alcanza el estado electrostático cuando existe un campo eléctrico finito en el conductor que equilibre las otras fuerzas, sean cuales fueren.

Después de esta advertencia, volvemos de nuevo al caso muy corriente e importante en el cual no existen tales fuerzas, el caso de un material conductor homogéneo e isótropo. En el interior de este conductor, en el caso estático, podemos establecer ciertamente que el campo eléctrico debe ser nulo *. Si no ocurriera esto, las cargas tendrían que moverse. Se deduce que todas las regiones en el interior del conductor, incluyendo todos los puntos en la parte interna de la superficie, deben estar al mismo potencial. En el exterior del conductor el campo eléctrico no es nulo. La superficie del conductor debe ser una superficie equipotencial de este campo.

Imaginemos que pudiésemos convertir un material aislante en conductor a volutad. (Esto no es imposible — el vidrio se hace conductor cuando se calienta; un gas puede ionizarse por rayos X.) En

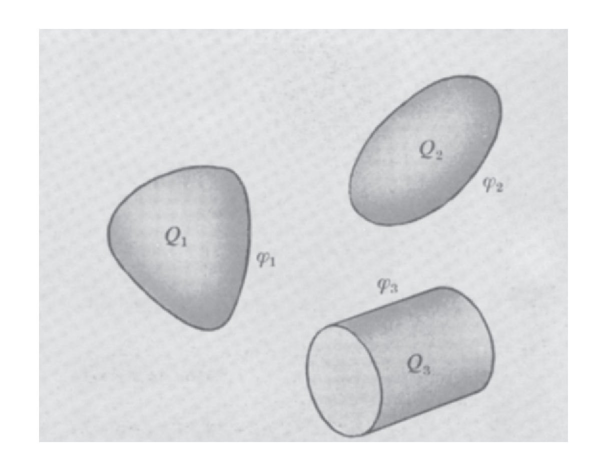
* Cuando hablamos del campo eléctrico dentro de la materia, significamos un campo medio promediado en una región grande comparada con los detalles de la estructura atómica. Sabemos que en toda la materia existen campos muy intensos, incluso en los buenos conductores, cerca de un núcleo atómico. El campo eléctrico del núcleo no contribuye, generalmente, al valor medio del campo en la materia, pues a un lado del núcleo está dirigido en un sentido y al otro lado en sentido contrario. Ahora no necesitamos considerar cómo debe definirse este campo medio y cómo podría medirse, lo cual veremos en el capítulo 10.

la Fig. 3-1*a* se presenta un no conductor descargado en el campo eléctrico producido por dos capas de carga fijas. El campo eléctrico es el mismo en el interior que en el exterior del cuerpo. (Un cuerpo denso tal como el vidrio en realidad distorsionaría el campo, este efecto lo estudiaremos en el Cap. 9, pero aquí no es importante.) De una manera u otra, se crean cargas móviles (o *iones*) haciendo el cuerpo conductor. Los iones positivos son arrastrados por el campo en un sentido y los negativos en sentido contrario, como se indica en la Fig. 3.1*b*. Ellos no pueden sobrepasar la superficie del conductor. Al reunirse en la superficie crean, a su vez, un campo eléctrico dentro del cuerpo que tiende a *anular* el campo original. Y en realidad el movimiento prosigue hasta que el campo original se anula *completamente*. La distribución final de carga en la superficie, representada en la Fig, 3.1*c*, es tal que su campo y el campo debido a los manantiales exteriores se componen para dar un campo *nulo* en el interior del conductor. Debido a que esto ocurre « automáticamente » en cada conductor, en lo que concierne a los campos exteriores solamente se necesita considerar la superficie del mismo.

Teniendo esto presente, veamos qué podemos decir de un sistema de conductores, en el vacío, diferentemente cargados. En la Fig. 3.2 vemos algunos objetos. Si queremos, podemos imaginarlos como sólidos metálicos. Para evitar que se muevan pueden utilizarse aislantes invisibles, tal vez parecidos a los hilos de seda de Stephen Gray. La carga total de cada objeto, para la cual significamos el exceso de carga positiva sobre la negativa, es fija pues no hay fuga ni admisión de cargas. Denotamos por Q_k la carga del conductor k-ésimo. Cada objeto puede también caracterizarse por un determinado valor φ_k de la función potencial eléctrico φ. Decimos que el conductor 2 está « al potencial φ_2 ». En un sistema como el representado, donde los objetos físicos no se extienden al infinito, conviene generalmente asignar el potencial cero a los puntos infinitamente alejados. En este caso φ_2 es el trabajo necesario, por unidad de carga, para trasladar una carga infinitésima de prueba desde el infinito y colocarla en cualquier punto del conductor 2. (Adviértase, a propósito, que éste es justamente el tipo de sistema en el cual la carga de prueba necesita ser pequeña, cuestión tratada en la Sec. 1.7.)

Debido a que la superficie de un conductor en la Fig. 3.2 es necesariamente una superficie equipotencial, el campo eléctrico, que es $-\text{grad}\,\varphi$, debe ser *perpendicular* a la superficie en todo punto de la misma. Al pasar del interior del conductor al exterior hallamos en la superficie una variación brusca del campo eléctrico; **E** no es nulo en el exterior de la superficie y es nulo en el interior. La discontinuidad de **E** se explica por la presencia de una carga superficial, de densidad σ, que puede relacionarse directamente a **E** por la ley de Gauss. Podemos usar una caja plana que encierre un pedazo de superficie (Fig. 3.3) como la usada en la Sec. 2.6 para analizar el disco cargado. En este caso, *no* hay flujo a través del « fondo » de la caja, que se halla en el interior del conductor, y deducimos que $E_n = 4\pi\sigma$, donde E_n es la componente del campo eléctrico normal a la super-

Fig. 3.2 Un sistema de tres conductores. Q_1 es la carga del conductor 1, φ_1 su potencial, etc.



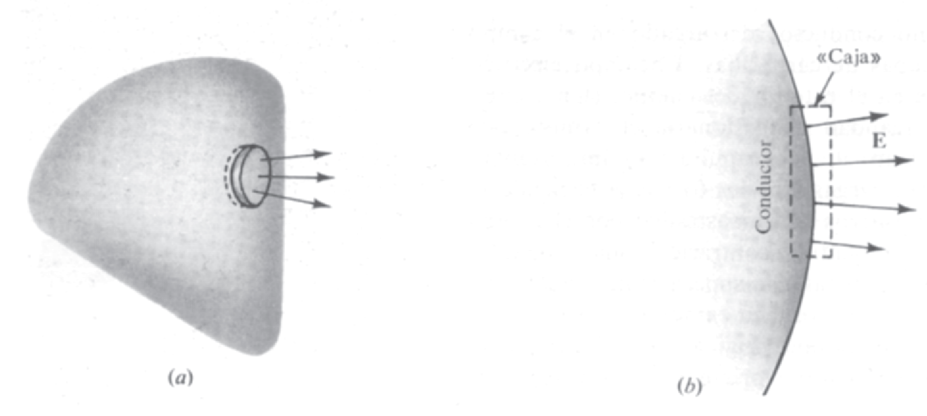


Fig. 3.3 (*a*) La ley de Gauss relaciona la intensidad del campo eléctrico, en la superficie de un conductor, con la densidad superficial de carga. (Ec. 2). (*b*) Sección recta de la superficie del conductor y de la caja.

ficie. Como ya hemos visto, en este caso no existe otra componente, siendo el campo siempre perpendicular a la superficie. La carga superficial debe dar cuenta de la carga total Q_k. Es decir, la integral de superficie de σ extendida a todo el conductor debe ser igual a Q_k. En resumen, podemos hacer las siguientes indicaciones acerca de *cualquier* sistema de tales conductores, sea la que fuere su forma y distribución:

$\varphi = \varphi_k$ en todos los puntos de la superficie del conductor k-ésimo	(1)
En todo punto exterior junto al conductor, **E** es perpendicular a la superficie, y $E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$, donde σ es la densidad local de carga superficial	(2)
$Q_k = \int_{S_k} \sigma\, da = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$	(3)

E es el campo total debido a *todas* las cargas en el sistema, próximas y lejanas, de las cuales la carga superficial es sólo una parte. La carga superficial en un conductor está obligada a un «reajuste propio» hasta que se cumpla la relación (2). El que el conductor presente un caso especial, en contraste a otras distribuciones superficiales de carga, se pone de manifiesto en la Fig. 3.4.

La Fig. 3.5 muestra el campo y la distribución de carga en un sistema simple como el mencionado anteriormente. Tenemos dos esferas conductoras, una de ellas de radio unidad que contiene una carga total + 1, la otra una esfera algo mayor con carga total nula. Observemos que la densidad superficial de carga no es uniforme en

(a)

σ

$E = 2\pi\sigma$

Fig. 3.4 (*a*) Sistema constituido únicamente por una lámina aislada de carga superficial. Esto se trató en la figura 1.23. El campo en cada lado de la lámina se determinó que era $\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma$ por consideraciones de *simetría*.

(b)

σ

$\mathbf{E}$

E_y

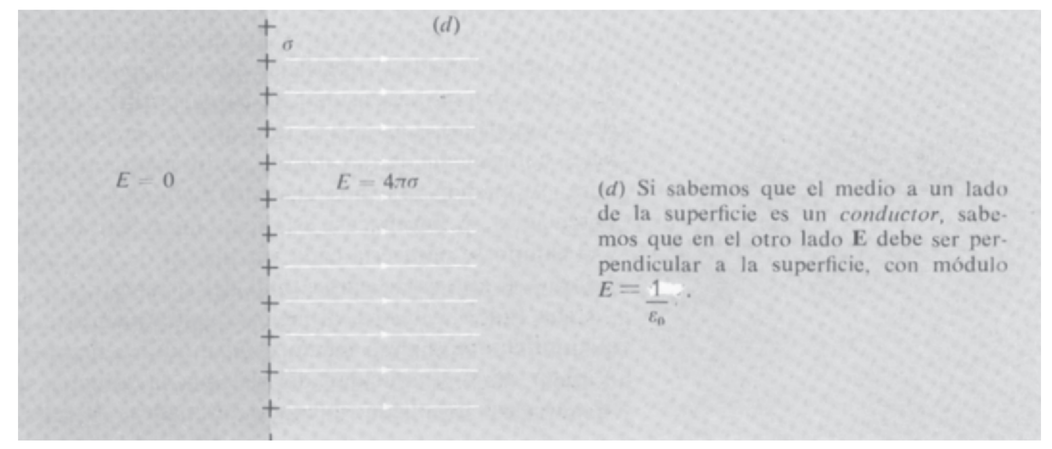
E_x

(*b*) Si hay otras cargas en el sistema sólo podemos decir que la *variación* de E_x en la superficie debe ser $\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$ sin variación de E_y.

(c)

σ

(*c*) Pueden tener esta propiedad algunos campos distintos del campo de (*a*). Dos de ellos se muestran en (*b*) y (*c*).



(*d*) Si sabemos que el medio a un lado de la superficie es un *conductor*, sabemos que en el otro lado $\mathbf{E}$ debe ser perpendicular a la superficie, con módulo $E = \frac{1}{\varepsilon_0}$.

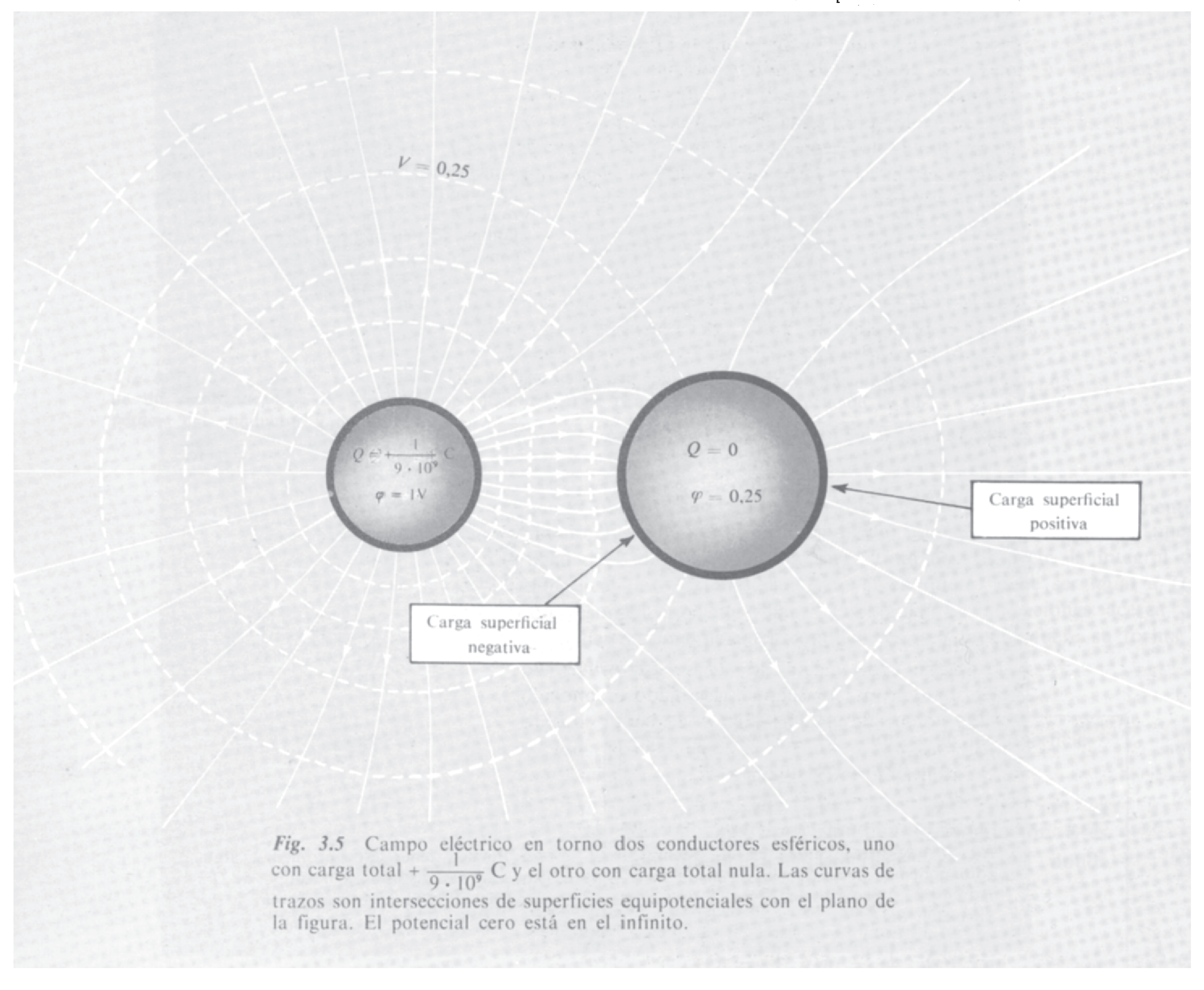


Fig. 3.5 Campo eléctrico en torno dos conductores esféricos, uno con carga total $+\frac{1}{9\cdot 10^9}$ C y el otro con carga total nula. Las curvas de trazos son intersecciones de superficies equipotenciales con el plano de la figura. El potencial cero está en el infinito.

ninguno de estos conductores. La esfera de la derecha, con carga total nula, tiene densidad superficial de carga negativa en la región frente a la otra esfera, y densidad de carga positiva en la porción posterior de su superficie. Las curvas de trazos en la Fig. 3.5 indican las superficies equipotenciales, o mejor, su intersección con el plano de la figura. A medida que nos alejamos hallamos que las superficies equipotenciales se hacen casi esféricas, las líneas de campo casi radiales y el campo se parecería cada vez más al de una carga puntiforme de valor $+1$, que es la carga total del sistema.

La Fig. 3.5 ilustra, al menos cualitativamente, todos los aspectos que anticipamos, pero tenemos un motivo adicional para presentarla. A pesar de la simplicidad del sistema, la solución matemática exacta en este caso no puede obtenerse de manera directa. Nuestra Fig. 3.5

se construyó a partir de una solución aproximada. En realidad, el número de distribuciones geométricas tridimensionales de conductores que presenten una solución matemática en forma acabada es lamentablemente pequeño. No se aprende mucha física limitándonos a la solución de algunos ejemplos claramente solubles. En lugar de esto intentamos comprender la naturaleza general del problema matemático que presenta un sistema.

3.3 Problema electrostático general: Teorema de unicidad

Podemos plantear el problema en función del potencial φ, pues si podemos hallar φ, de él podemos deducir **E**. En cualquier punto exterior al conductor φ tiene que satisfacer la ecuación en derivadas parciales que encontramos en el Cap. 2, la ecuación de Laplace: $\nabla^2\varphi = 0$. En coordenadas cartesianas la ecuación de Laplace se escribe,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{4}$$

El problema es hallar una función que satisfaga a la Ec. 4 y también a las condiciones especificadas en las superficies de los conductores. Estas condiciones se podían haber establecido de varias formas. Podía ser que el potencial φ_k de cada conductor fuese fijado o conocido. (En un sistema real los potenciales pueden fijarse mediante conexiones permanentes o baterías o a otras « fuentes de alimentación » a potencial constante.) Entonces nuestra solución $\varphi(x, y, z)$ debe tomar el valor correcto en todos los puntos de cada una de las superficies. Estas superficies en su totalidad *limitan* la región en la cual está definido φ, si incluimos una superficie grande « en el infinito » donde se exige que φ tienda a cero. A veces la región de mayor interés está totalmente rodeada por una superficie conductora; entonces podemos asignar a este conductor un potencial y no tener en cuenta nada en su exterior. En todo caso tenemos un *problema de contorno* típico en el cual el valor que la función tiene que tomar en el contorno está determinado por el contorno total.

En lugar de esto podíamos haber especificado la carga total Q_k en cada conductor. (No podíamos especificar arbitrariamente todas las cargas y potenciales; esto sobredeterminaría el problema.) Con las cargas dadas, tenemos fijado el valor de grad φ sobre la superficie de cada conductor. Esto da al problema matemático un aspecto ligeramente distinto. O pueden « mezclarse » los dos tipos de condiciones de contorno.

Un problema general de cierto interés es éste: Con las condiciones de contorno dadas de alguna manera, el problema ¿no tiene solución, o una solución o más de una solución? No intentaremos contestar esta cuestión en todas las formas que puede presentarse, pero un caso importante mostrará cómo pueden tratarse tales cuestiones y

nos dará un resultado útil. Supongamos que se ha fijado el potencial φ_k de cada conductor, junto con la condición de que φ tienda a cero a distancia infinita, o sobre un conductor que englobe el sistema. Demostraremos que este problema de contorno no tiene más que una solución. Como problema físico, parece evidente que tiene *una* solución pues si realmente distribuyéramos los conductores en la forma prescrita conectándolos con alambres infinitesimales a potenciales adecuados el sistema tendría que situarse en *cierto* estado. Sin embargo, es una cuestión completamente distinta demostrar matemáticamente que existe siempre una solución y no lo intentaremos. En lugar de esto suponemos que *existe* una solución $\varphi(x, y, z)$ y demostraremos que debe ser única. El razonamiento, que es típico en tales demostraciones, es el siguiente:

Supongamos que existe otra función $\psi(x, y, z)$ que es también solución que reune las mismas condiciones de contorno. Ahora bien, la ecuación de Laplace es *lineal*. Es decir, si φ y ψ satisfacen a la Ec. 4, también la satisfará $\varphi + \psi$ o cualquier combinación lineal tal como $c_1\varphi + c_2\psi$, donde c_1 y c_2 son constantes. En particular la diferencia $\varphi - \psi$ entre nuestras dos soluciones debe satisfacer la Ec. 4. Llamemos a esta función W:

$$W(x,y,z) = \varphi(x,y,z) - \psi(x,y,z) \tag{5}$$

Por supuesto que W no satisface las condiciones de contorno. De hecho, en la superficie de cada conductor W es cero, porque φ y ψ toman el mismo valor φ_k en la superficie del conductor k. Así pues W es solución de *otro* problema electrostático, uno con los mismos conductores mantenidos a potencial cero. Podemos afirmar que si esto es así W debe ser nula en todos los puntos del espacio. Pues, si no ocurriera esto, debe existir un máximo o un mínimo en alguna parte — recordemos que W es cero en el infinito lo mismo que en todos los conductores. Si W tiene un extremo en cierto punto P, consideremos una esfera con centro en este punto. Como vimos en el Cap. 2, el valor medio sobre una esfera de una función que satisface a la ecuación de Laplace es igual a su valor en el centro. Esto no puede ser cierto si en el centro toma valor máximo o mínimo; debe por lo tanto ser cero en todas partes. Se deduce que $\varphi = \psi$ en todo punto, es decir, solamente puede existir *una* solución de la Ec. 4 que satisfaga las condiciones de contorno prescritas.

Ahora podemos demostrar otro hecho notable. *En el espacio interior a un conductor hueco de cualquier forma, si asimismo este espacio está libre de cargas, el campo eléctrico es nulo.* Esto es cierto cualquiera que sea el campo exterior al conductor. Estamos ya familiarizados con el hecho que el campo es nulo dentro de una capa de carga aislada uniforme y esférica, al igual que el campo gravitatorio en el interior de una masa esférica hueca es nulo. El teorema antes enunciado, en cierto modo es más sorprendente. Consideremos la caja metálica representada, parcialmente cortada, en la Fig. 3.6. Existen cargas

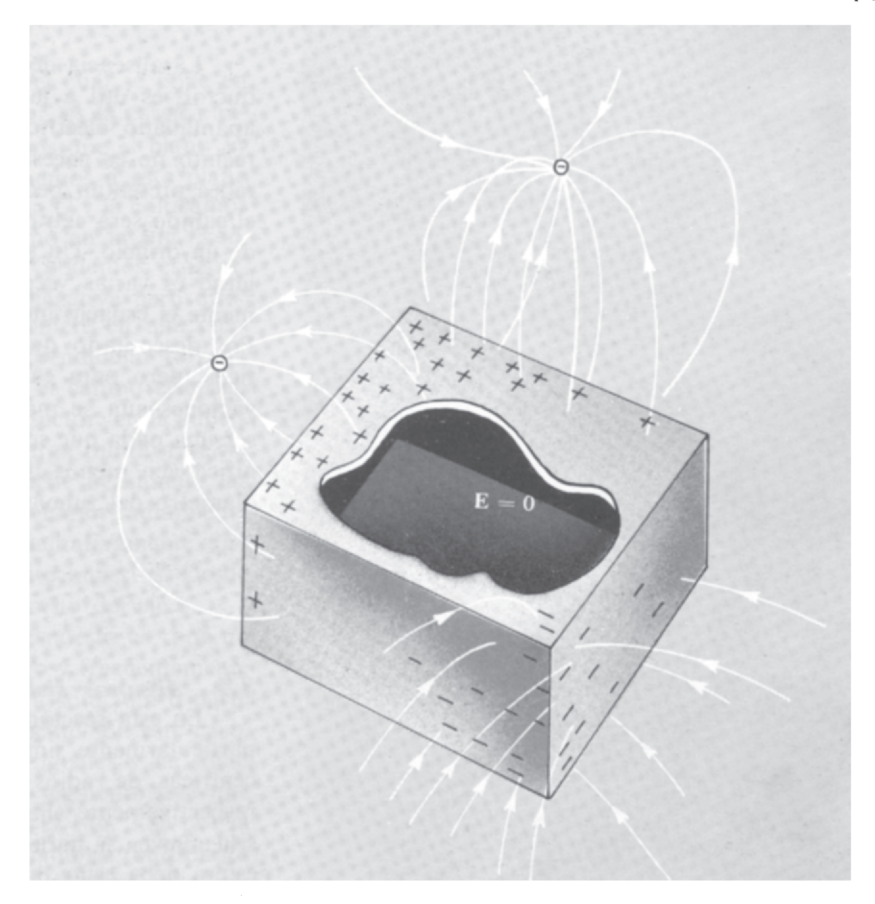


Fig. 3.6 El campo es nulo en cualquier punto interior de una caja conductora cerrada.

en las inmediaciones de la caja y el campo exterior es aproximadamente como el representado. En la superficie de la caja existe una distribución de carga muy poco uniforme. Ahora bien, el campo en todo punto del espacio, *incluyendo el interior de la caja*, es la suma del campo debido a esta distribución de cargas y el campo de los manantiales exteriores. Parece increíble que la carga superficial se haya distribuido tan hábilmente sobre la caja para que su campo *anule* exactamente el campo de los manantiales exteriores en todo punto interior a la caja. Sin embargo, debe de haber ocurrido esto, como demostraremos en pocas palabras.

La función potencial dentro de la caja $\varphi(x, y, z)$ debe satisfacer a la ecuación de Laplace. El contorno completo de esta región, o sea la caja, es una equipotencial, así que tenemos $\varphi = \varphi_0$ una constante en todo el contorno. Evidentemente una solución es $\varphi = \varphi_0$ en todo el volumen. Pero solamente puede existir una solución, según nuestro teorema de unicidad, así que es ésta. « $\varphi =$ constante » implica $\mathbf{E} = 0$, a causa de que $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

La ausencia de campo eléctrico en el interior de un recinto conductor, es útil a la vez que interesante teóricamente. Es la base del apantallado eléctrico. Para la mayoría de aplicaciones prácticas el recinto no es necesario que sea completamente compacto. Si las paredes presentan pequeños orificios, o están hechas de tela metálica, el campo será extraordinariamente débil excepto en las inmediaciones de un orificio. Un tubo metálico con los extremos abiertos, si su longitud es varias veces mayor que su diámetro, apantalla muy eficazmente el espacio interior que no esté próximo a uno u otro extremo. Por descontado que estamos considerando solamente campos estáticos, pero para campos eléctricos lentamente variables estas observaciones aún se mantienen. (Un campo rápidamente variable puede ser una onda que se propaga a través del tubo. *Rápidamente* aquí significa «en menos tiempo que el que emplea la luz para recorrer el diámetro del tubo».)

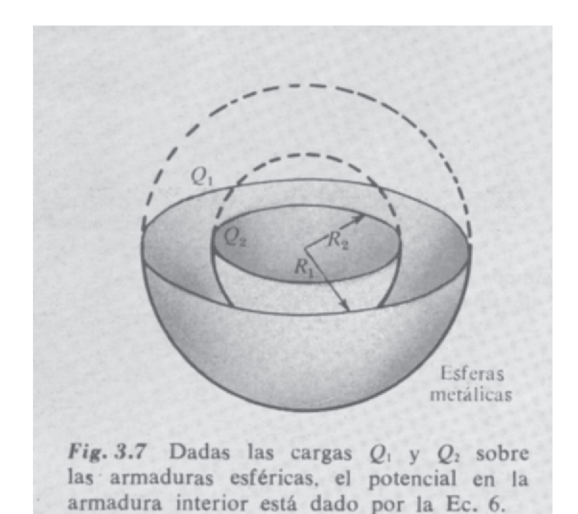


Fig. 3.7 Dadas las cargas Q_1 y Q_2 sobre las armaduras esféricas, el potencial en la armadura interior está dado por la Ec. 6.

3.4 Algunos sistemas simples de conductores

En esta sección estudiaremos unas distribuciones de conductores particularmente simples. Empezamos con dos esferas metálicas concéntricas, de radios R_1 y R_2, que contienen las cargas totales Q_1 y Q_2 respectivamente (Fig. 3.7). Esta situación no presenta ningún requisito nuevo. A partir de la simetría es evidente que la carga de cada esfera debe estar distribuida uniformemente así que nuestro ejemplo realmente encaja en el Cap. 1. En el exterior de la esfera mayor el campo es el de una carga puntiforme de valor $Q_1 + Q_2$, así que φ_1 el potencial de la esfera exterior, es

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)}{R_1}$$

El potencial de la esfera interior está dado por

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_1} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2} \qquad (6)$$

φ_2 es también el potencial de todos los puntos dentro de la esfera interior. Podíamos haber hallado $\varphi_2 = (1/4\pi\varepsilon_0)(Q_1/R_1) + (1/4\pi\varepsilon_0)(Q_2/R_2)$ por simple superposición: $(1/4\pi\varepsilon_0)\, Q_1/R_1$ es el potencial dentro de la esfera mayor si estuviese presente sólo ella, $(1/4\pi\varepsilon_0)\, Q_2/R_2$ el potencial dentro de la esfera interna si sólo ella estuviese presente. Si las dos esferas contienen cargas iguales y de signo contrario $Q_1 = -Q_2$, el campo eléctrico es distinto de cero solamente en el espacio entre ellas.

El sistema, aproximadamente más simple, en el cual se pone en evidencia la movilidad de las cargas en el conductor, es la carga puntiforme próxima a un conductor plano. Supongamos que el plano xy es la superficie de un conductor indefinido. Asignemos a este plano el potencial cero. Tomamos ahora una carga positiva Q y la colocamos en el eje z a una distancia h cm del plano xy como en la Fig. 3.8*a*. ¿Qué tipo de campo y qué distribución de carga podemos esperar? Esperamos que la carga positiva Q atraiga carga negativa pero difícilmente suponemos que la carga negativa se aglomere en una concentración infinitamente densa en el pie de la perpendicular trazada desde Q. ¿Por qué no? También recordamos que el campo eléctrico siempre es perpendicular a la superficie de un conductor, en la superficie del mismo. Por otro lado, muy cerca de la carga puntiforme, la presencia del conductor plano poca diferencia puede ocasionar; las líneas de campo deben partir de Q como si abandonaran radialmente una carga puntiforme. Así que podíamos esperar cualitativamente algo parecido a la Fig. 3.8*b* con algunos detalles un tanto inciertos. Desde luego que debe existir una completa simetría en torno del eje z.

¿Cómo resolver realmente el problema? La respuesta es: por un artificio, pero un artificio que es a la vez instructivo y frecuentemente útil. Hallamos un problema fácilmente soluble cuya solución, o parte de ella, puede hacerse encajar en el problema presente. En este caso, el problema fácil es el de dos cargas puntiformes iguales y de signo contrario Q y $-Q$. Sobre el plano mediatriz del segmento que une las dos cargas, cuya sección recta está indicada en la Fig. 3.8*c* por la recta AA', el campo eléctrico es perpendicular al plano en todo punto del mismo. Si hacemos que la distancia de Q al plano coincida con la distancia h de nuestro problema original, la mitad superior del campo en la Fig. 3.8*c* concuerda con nuestras exigencias: El campo es perpendicular al plano del conductor y en las proximidades de Q tiende al campo de una carga puntiforme.

Aquí las condiciones de contorno no son completamente las que figuraban en nuestro teorema de unicidad en la sección anterior. El potencial del conductor está fijado, pero en el sistema tenemos una carga puntiforme en la cual el potencial tiende a infinito. Podemos considerar la carga puntiforme como caso límite de una pequeña esfera conductora en la cual la carga total está fijada. Para esta condición de contorno « mixta » — dados los potenciales en algunas superficies, la carga total en otras — también se cumple un teorema de unicidad. Si nuestra solución « prestada » encaja como tal, debe ser *la* solución.

La Fig. 3.9 presenta la solución general para el campo por encima del plano, con la densidad superficial de carga insinuada. Podemos calcular la intensidad del campo y la dirección en cada punto volviendo al problema de las dos cargas, Fig. 3.8*c* y usando la ley de Coulomb. Consideremos un punto de la superficie, a distancia r del origen. El cuadrado de su distancia a Q es $r^2 + h^2$, y la componente z del campo de Q, en este punto, es $-Q\cos\theta/(r^2 + h^2)$. La « carga imagen » $-Q$ por debajo del plano contribuye con la misma com-

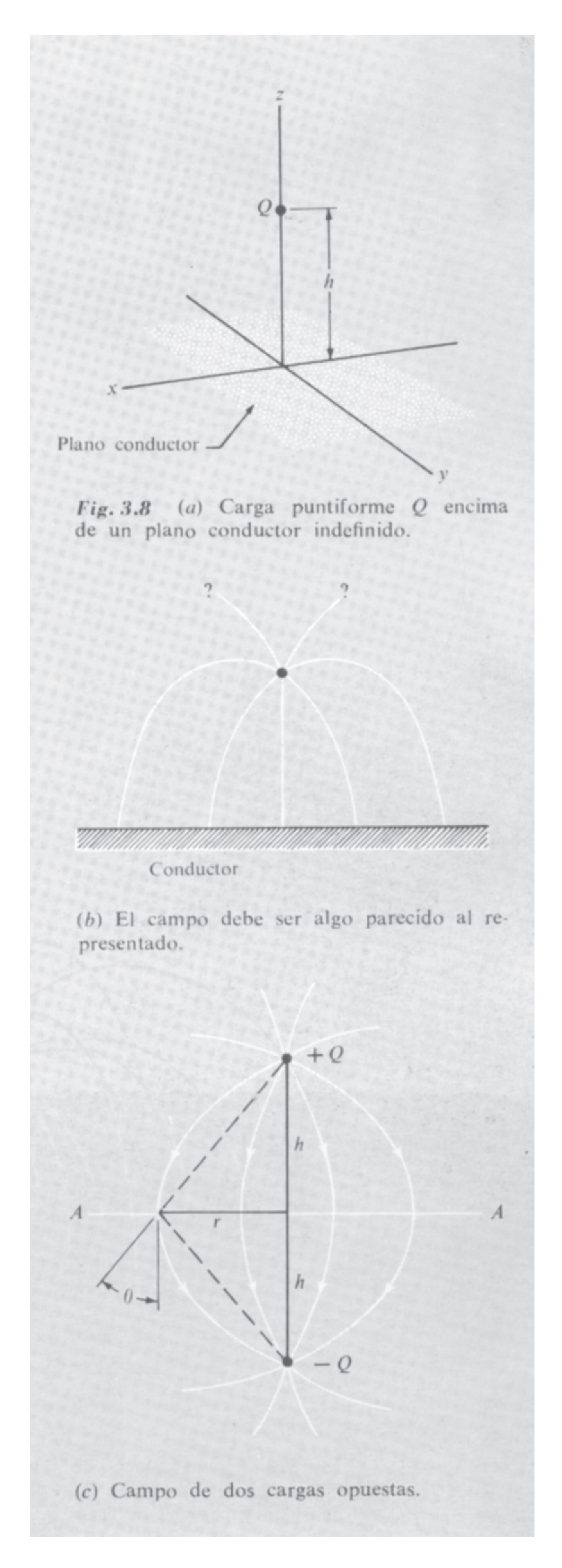


Fig. 3.8 (*a*) Carga puntiforme Q encima de un plano conductor indefinido.

(*b*) El campo debe ser algo parecido al representado.

(*c*) Campo de dos cargas opuestas.

ponente z. Así que el campo eléctrico aquí viene dado por:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (7)$$

Esto nos indica que la densidad superficial de carga σ es:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_2 = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}} \qquad (8)$$

La carga superficial total debe valer — Q. Como comprobación podríamos integrar para toda la superficie y ver si ocurre esto:

$$\text{Carga superficial total} = \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r \, dr$$

$$= -Q \int_0^\infty \frac{hr\,dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q \qquad (9)$$

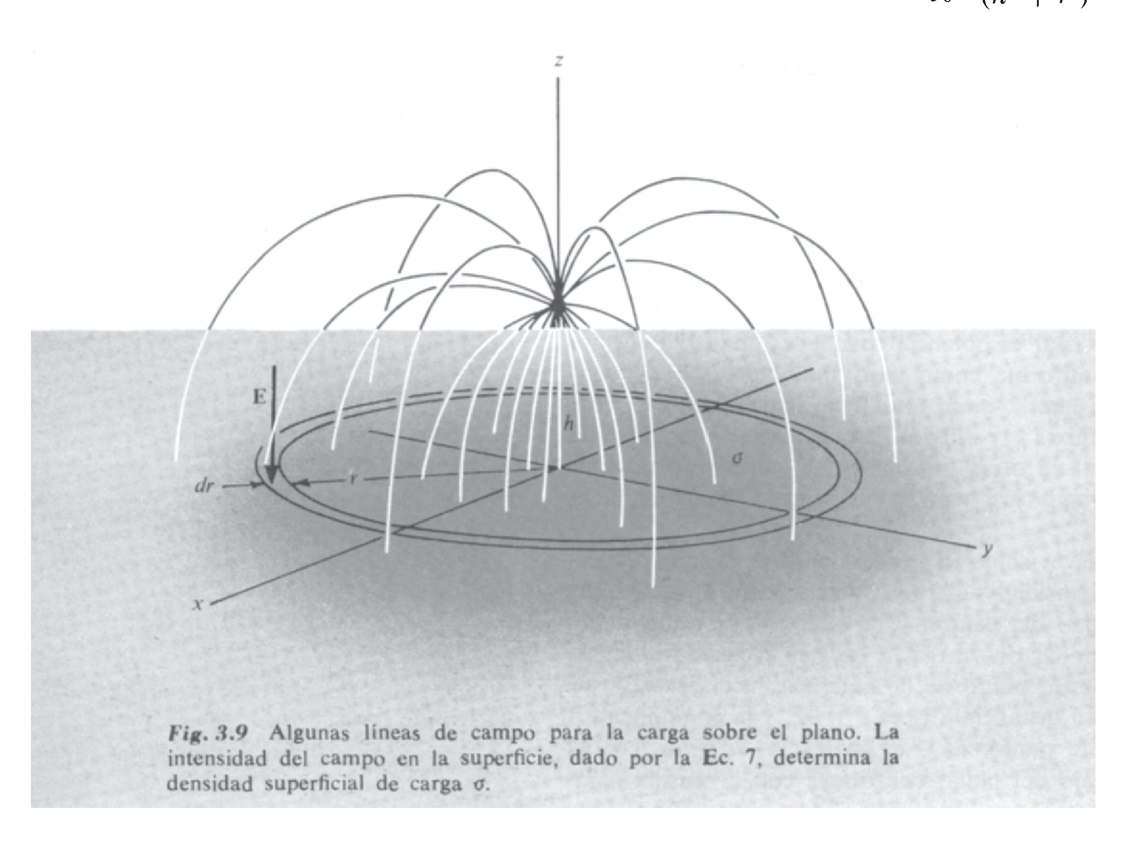


Fig. 3.9 Algunas líneas de campo para la carga sobre el plano. La intensidad del campo en la superficie, dado por la Ec. 7, determina la densidad superficial de carga σ.

Este resultado era de esperar. Significa que todo el flujo que abandona la carga Q termina en el plano conductor.

Hay un punto desconcertante. ¿Y si el plano conductor hubiese sido completamente descargado antes de colocar la carga Q sobre él? ¿Cómo puede ahora el conductor presentar una carga neta $-Q$? La respuesta es que debe distribuirse sobre todo el plano una carga positiva compensadora de valor Q. Para ver que se cumple aquí, imaginemos que el plano conductor es realmente un disco metálico, no infinito sino finito y de radio $R \gg h$. Si se distribuye uniformemente una carga $+Q$ sobre el disco, en *ambos* lados, la densidad superficial resultante es $Q/2\pi R^2$, que daría lugar a un campo eléctrico de intensidad $2Q/R^2$ normal al plano del disco. Ya que nuestro disco es conductor, sobre el cual pueden moverse las cargas, la densidad de carga y la intensidad del campo resultante serán aún *menores* que $2Q/R^2$ cerca del centro del disco a causa de la tendencia de la carga de distribuirse hacia el borde. En todo caso el campo de esta distribución es *menor,* en orden de magnitud por un factor h^2/R^2, que el campo dado por la Ec. 7. En tanto sea $R \gg h$ está justificado despreciarlo, por supuesto que desaparece por completo para un plano conductor ilimitado. La Fig. 3.10 muestra, en representaciones separadas, la densidad superficial σ, dada por la Ec. 8, y la distribución de la carga compensadora sobre la superficie superior e inferior del disco. Aquí se ha tomado R no mucho mayor que h, para mostrar claramente las dos distribuciones en el

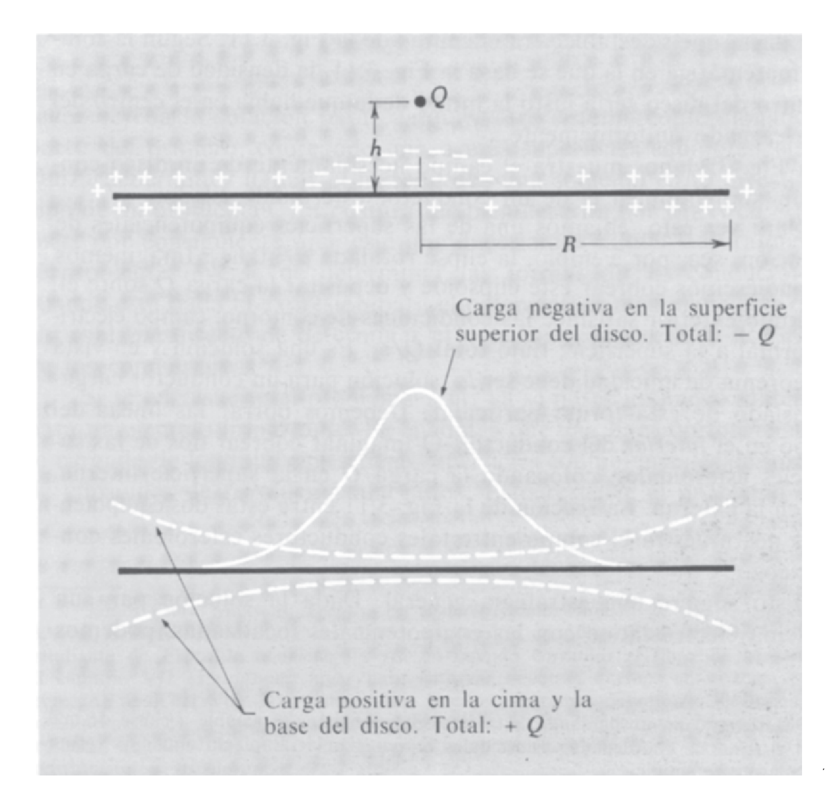


Fig. 3.10 Distribución de carga sobre un disco conductor con carga total nula, en presencia de una carga puntiforme positiva Q a la altura h sobre el centro del disco. La densidad de carga superficial real en cada punto es la suma algebraica de las densidades positiva y negativa mostradas.

mismo diagrama. Adviértase que la carga compensadora positiva se ha redistribuido de la misma exacta manera en la superficie superior y en la inferior del disco, como si ignorase completamente la acumulación de carga negativa en la parte media de la superficie superior. En realidad, lo hace así por el hecho de que el campo de esta distribución de carga negativa *más* el de carga puntiforme Q que la induce tiene componente horizontal nula en la superficie del disco, de aquí que no tiene influencia en la distribución de la carga compensadora positiva.

El disco conductor aislado mencionado antes, pertenece a otra clase de problemas solubles, una clase que incluye cualquier conductor aislado de forma de esferoide, un elipsoide de revolución. Sin llegar a las matemáticas*, en la Fig. 11 mostramos algunas líneas del campo eléctrico y superficies equipotenciales en torno al disco conductor. Las líneas de campo son hipérbolas. Las equipotenciales son elipsoides de revolución achatados que envuelven al disco. El potencial ϕ del propio disco, relativo al infinito, resulta ser

$$\phi_0 = \frac{(\pi/2)Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{8\varepsilon_0 a} \tag{10}$$

donde Q es la carga total del disco y a es su radio. Comparemos este gráfico con la Fig. 2.11, el campo de un disco *no* conductor *uniformemente* cargado. En este caso el campo eléctrico en la superficie no le era normal; tenía una componente radial hacia fuera. Si se pudiera hacer que el disco de la Fig. 2.11 fuese conductor, la carga fluiría hacia fuera hasta que se estableciera el campo de la Fig. 3.11. Según la solución matemática en la que se basa la Fig. 3.11, la densidad de carga en el centro del disco sería justo la mitad de la que había en el centro del disco cargado uniformemente.

La Fig. 3.11 nos muestra el campo no solamente de un disco conductor, sino también el de un conductor esferoidal aislado.

Para ver esto, elijamos una de las superficies equipotenciales de revolución, sea, por ejemplo, la elipse rotulada $\phi = 0{,}6\phi_0$. Imaginemos que pudiésemos cobrear este elipsoide y depositar la carga Q sobre él. El campo exterior satisface las condiciones de contorno: campo eléctrico normal a la superficie; flujo total Q/ε_0. Es una solución y en vista del teorema de unicidad debe ser *la* solución para un conductor cargado aislado de esta forma particular. Debemos borrar las líneas del campo en el *interior* del conductor. O imaginar cobrear dos de las superficies esferoidales, colocando la carga Q en la superficie interna, $-Q$ en la externa. La sección de la Fig. 3.11 entre estas dos equipotenciales nos muestra el campo entre tales conductores esferoidales concéntricos.

Esto sugiere una estrategia general. Dada la solución para un problema electrostático con las equipotenciales localizadas, podemos

* Matemáticamente hablando, esta clase de problemas es soluble a causa de que en un sistema de coordenadas esferoidales la ecuación de Laplace toma una forma particularmente simple.

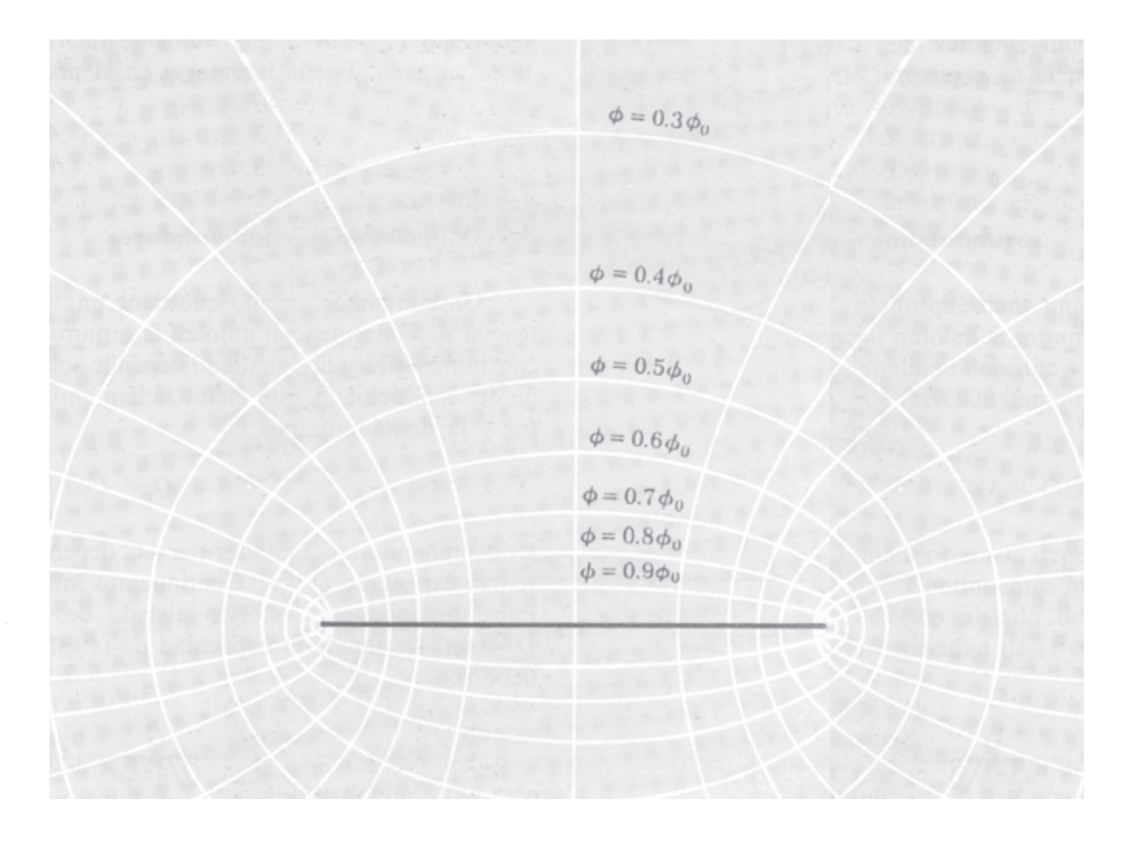


Fig. 3.11 Equipotenciales y líneas de campo de un disco cargado conductor.

sacar de ella la solución para cualquier otro sistema confeccionado a partir del primero, cobreando una o más superficies equipotenciales. Quizá deberíamos llamar el método de «una solución en la investigación de un problema». La postura fue bien descrita por Maxwell: «Parece, por consiguiente, que éste que deberíamos llamar naturalmente el problema inverso de determinar las formas de los conductores, cuando está dada la expresión para el potencial, es más manejable que el problema directo de determinar el potencial cuando se da la forma de los conductores»*.

Si se ha resuelto el problema 2.11, ya se posee un nuevo material para un ejemplo importante. Se encontró que una línea uniformemente cargada de longitud finita tiene superficies equipotenciales de forma de elipsoides de revolución alargados. Esto resuelve el problema del

---

* James Clerk Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol, I, cap. VII (3.ª ed., Oxford University Press, 1891; reimpresión ed., New York, 1954). A todo estudiante de Física le conviene de vez en cuando consultar el libro de Maxwell. El capítulo VII es un buen lugar para empezar mientras estemos en el tema presente. Al final del Vol. I se hallan unos bonitos diagramas de campos eléctricos, y poco después de la cita que hemos dado antes, el fundamento de Maxwell para presentar aquellos diagramas. Puede sospecharse que también él se encantó en su construcción y su elegancia.

potencial y campo de un elipsoide conductor cargado y alargado, reduciéndolo al caso relativamente fácil del potencial debido a una línea cargada. Puede intentarse en el problema 3.22.

3.5 Capacidad y condensadores

Un conductor aislado que tiene una carga Q tiene un cierto potencial ϕ_0, con potencial nulo en el infinito. Q es proporcional a ϕ_0. La constante de proporcionalidad depende solamente de la forma y tamaño del conductor. A este factor le llamamos *capacidad* de este conductor y la denotamos por C.

$$Q = C\phi_0 \tag{11}$$

Evidentemente las unidades para C dependen de las unidades en que se han expresado Q y ϕ_0. Continuemos midiendo Q en C y ϕ_0 en volts. Para un conductor esférico aislado de radio a sabemos que $\phi_0 = Q/4\pi\varepsilon_0 a$. De donde la capacidad de la esfera, definida por la Ec. 11, debe ser

$$C = \frac{Q}{Q/4\pi\varepsilon_0 a} = 4\pi\varepsilon_0 a \tag{12}$$

Para un disco conductor aislado de radio a, según la Ec. 10, $Q = 4\pi\varepsilon_0(2/\pi)a\phi_0$, así que la capacidad de este conductor es $C = (8/\varepsilon_0)a$. Es algo menor que la capacidad de una esfera del mismo radio, lo cual parece razonable. La unidad de capacidad es el farad. 1 farad $(F) = 1\text{C}/1\text{V}$.

Esto se aplica a conductores aislados únicos. El concepto de capacidad es útil siempre que estamos interesados con cargas en, y potenciales de, conductores. Con mucho, el caso corriente de mayor interés es el de dos conductores con cargas opuestas, con Q y $-Q$, respectivamente. Ahora la capacidad se define como la relación de la carga Q a la diferencia de potencial entre los dos conductores. El objeto mismo, que comprende los dos conductores, el material aislante para mantener los conductores separados, y tal vez los terminales eléctricos o conductores, se llama *condensador*. La mayoría de circuitos electrónicos contienen numerosos condensadores. El condensador plano es el caso más simple.

Dos placas conductoras planas se colocan paralelamente separadas una distancia s, como en la Fig. 3.12*a*. Sea A el área de cada placa y supongamos que una placa contiene una carga Q y la otra $-Q$. Los valores del potencial en cada una de las placas es φ_1 y φ_2. En la Fig. 3.12*b* se ven, en sección recta, las líneas de campo de este sistema. Excepto en los bordes el campo es casi uniforme en la región entre las placas. Considerándolo uniforme su valor debe ser $(\varphi_1 - \varphi_2)/s$.

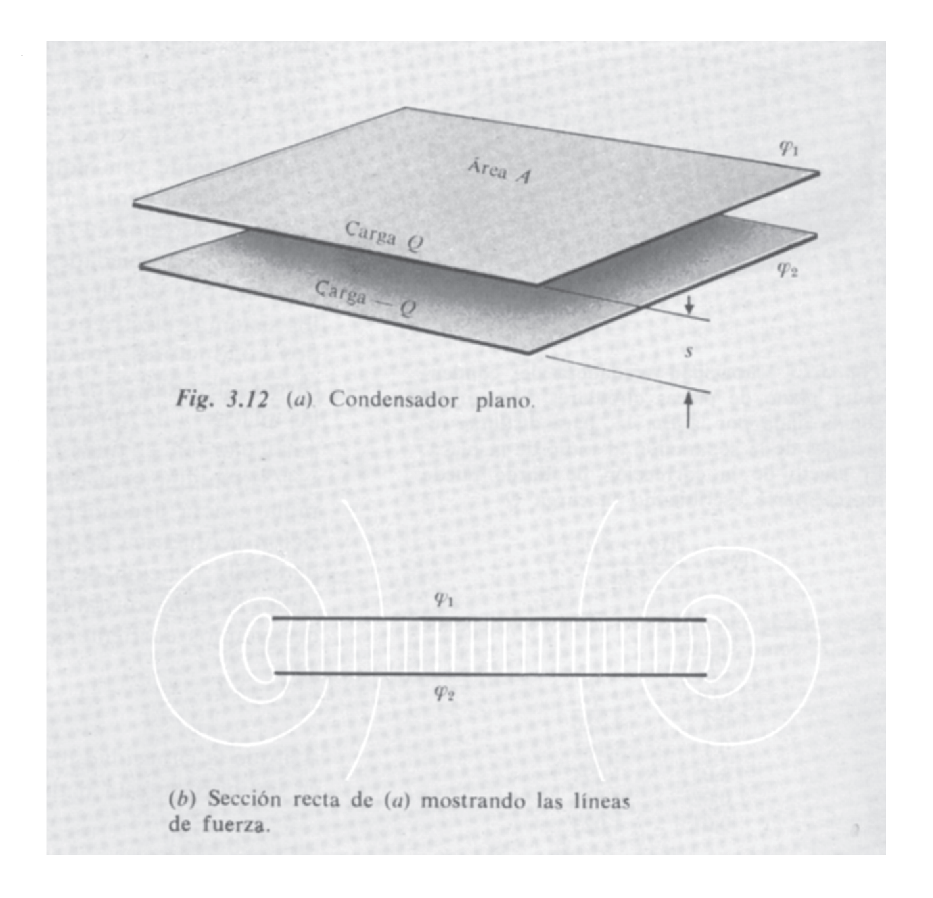


Fig. 3.12 (*a*) Condensador plano.

(*b*) Sección recta de (*a*) mostrando las líneas de fuerza.

La densidad de las cargas superficiales de la superficie interior de una de las placas es

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{s}\,\varepsilon_0 \tag{13}$$

Si podemos despreciar la variación real de E y por tanto de σ que ocurre principalmente cerca del borde de las placas, podemos escribir una expresión simple para la carga total de una placa:

$$Q = A\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{s}\varepsilon_0 \text{ (despreciando los efectos de los bordes)} \tag{14}$$

Contamos con que la Ec. 14 sea tanto más precisa cuanto menor sea la relación de la distancia entre las placas s a la dimensión lateral de las placas. Por supuesto que si queremos resolver exactamente el problema electrostático, incluidos los bordes, para una forma determinada de la placa, deberíamos sustituir la Ec. 14 por una fórmula exacta. Para ver la aproximación que representa la Ec. 14, en la Figura 3.12*b* están tabulados algunos valores del factor de corrección f

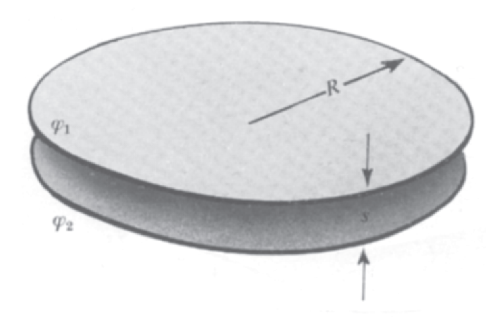


Fig. 3.13 Capacidad verdadera del condensador plano de placas circulares, comparada con la dada por la Ec. 11, para distintas relaciones de la separación al radio de la placa. El efecto de la corrección de borde puede representarse escribiendo la carga Q

$$Q = \frac{A(\phi_1 - \phi_2)}{4\pi s} \cdot f$$

Para placas circulares, el factor f depende de s/R como sigue:

s/R	f
0,2	1,286
0,1	1,167
0,05	1,094
0,02	1,042
0,01	1,023

para los valores de la carga Q dada por la Ec. 14 que difiere del resultado exacto, en el caso de dos discos conductores con distinta separación. La carga total siempre es un poco mayor que la que predeciría la Ec. 14. Esto parece razonable observando la Fig. 3.12*b* pues existe evidentemente una concentración adicional de carga en el borde, e incluso cierta carga en las superficies exteriores cerca del borde.

No nos vamos a ocupar ahora de los detalles de tales correcciones sino de las propiedades generales de un sistema de dos conductores. Nuestro par de placas es un ejemplo de un elemento corriente en los sistemas eléctricos, el ***condensador***. Un condensador es simplemente dos conductores próximos, a diferentes potenciales y que contienen cargas distintas. Nos interesa la relación entre la carga Q de una de las placas y la diferencia de potencial entre ellas. Para el sistema particular en el que se aplica la Ec. 14, el cociente $Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$ es $\varepsilon_0 A/s$. Aunque esta fórmula es la aproximada es evidente que la fórmula exacta dependerá solamente de las dimensiones y de la disposición geométrica de las placas. Es decir para un par de conductores dados, la relación de la carga a la diferencia de potencial será constante. A esta constante le llamamos *capacidad* del condensador y la designamos corrientemente por C.

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{15}$$

Así que la capacidad del condensador plano, despreciando los campos en los bordes, está dada por

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{s} \tag{16}$$

El farad es una unidad enorme; la capacidad de una esfera aislada del tamaño de la tierra es menor que una décima de farad. Pero tales causas no importunan. Tratamos en términos más familiares con el ***microfarad*** (μF), 10^{-6} farad, y el ***picofarad*** (pF), 10^{-12} farads. Un picofarad es aproximadamente equivalente a un cm. Con el farad definido como coulomb por volt, las dimensiones de la constante ε_0 pueden expresarse convenientemente en farads/metro.

Todo par de conductores, prescindiendo de la forma y disposición, pueden considerarse un condensador. Resulta precisamente que el condensador plano es una distribución corriente y una de las que el cálculo aproximado de la capacidad es muy fácil. La Fig. 3.15 presenta dos conductores, uno en el interior de otro. Aún podemos llamar condensador a este dispositivo. Desde el punto de vista práctico sería necesario algún soporte mecánico para el conductor interno, pero esto no nos atañe. También para conducir la carga eléctrica a, o de los conductores necesitaríamos cables que son asimismo cuerpos conductores. Ya que un hilo que salga del cuerpo interior, numerado 1, atraviesa necesariamente el espacio entre los conductores, debe causar cierta perturbación al campo eléctrico en este espacio. Para aminorar esto podemos suponer que los hilos conductores son muy del-

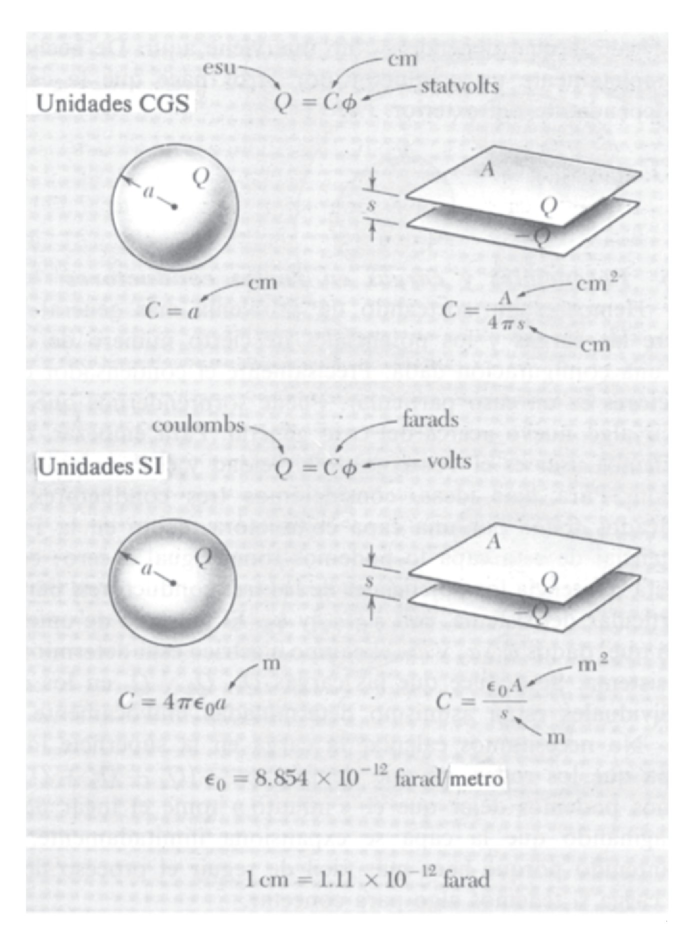


Fig. 3.14 Resumen de las unidades asociadas con la capacidad.

gados. O podemos imaginar que se han quitado los hilos antes de determinar los potenciales.

En este sistema podemos distinguir tres cargas: la carga total Q_1 del conductor interior; la cantidad de carga $Q_2^{(i)}$ en la superficie interna del conductor exterior; la carga $Q_2^{(e)}$ en la superficie externa del conductor exterior. Observemos primero que $Q_2^{(i)}$ debe ser igual a $-Q_1$. Sabemos esto porque si una superficie, tal como S en la Fig. 3.15, encierra estas cargas y no las exteriores y el flujo a través de esta superficie es nulo. El flujo es cero pues el campo eléctrico en la superficie S es nulo por encontrarse en el interior de un conductor.

Evidentemente, el valor de Q_1 determinará únicamente el campo eléctrico dentro de la región entre los dos conductores, y así determinará la diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ entre los mismos. Por esta razón, si consideramos los dos cuerpos como « placas » de un condensador, solamente interviene Q_1, o la correspondiente $Q_2^{(i)}$, en la determinación de la capacidad. La capacidad es:

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{17}$$

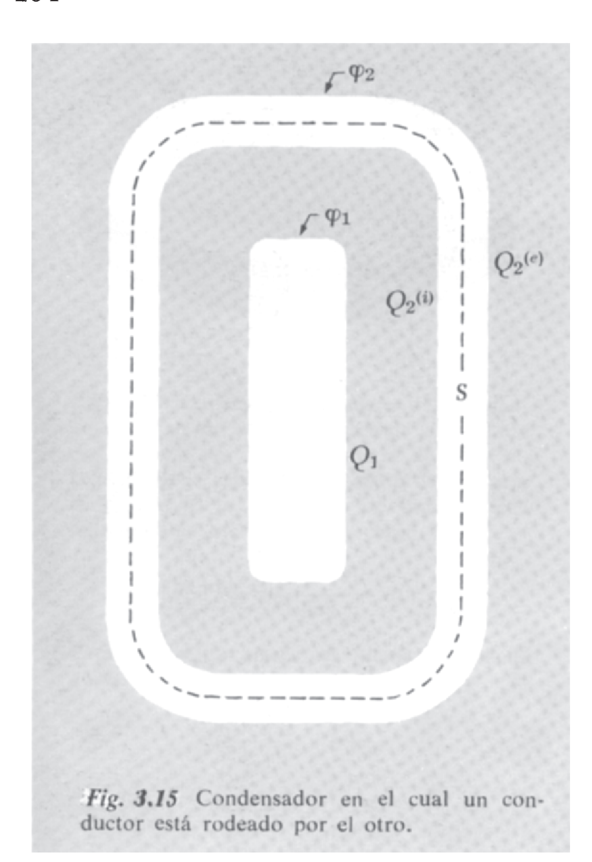


Fig. 3.15 Condensador en el cual un conductor está rodeado por el otro.

$Q_2^{(0)}$, de la cual depende φ_2, no interviene aquí. De hecho, al rodear completamente un conductor por otros hace que la capacidad sea independiente del exterior.

3.6 *Potenciales y cargas en varios conductores*

Hemos estado sorteando un problema más general la relación entre las cargas y los potenciales de cierto número de conductores de una configuración dada. Precisamente el condensador de dos conductores es un caso particular. Puede sorprendernos que sea posible decir algo nuevo acerca del caso general. Para empezar, todo lo que podemos usar es el Teorema de Unicidad y el Principio de Superposición. Para fijar ideas, consideremos tres conductores separados, rodeados todos por una capa conductora, como en la Fig. 3.16. El potencial de esta capa lo podemos tomar igual a cero; con respecto a esta referencia los potenciales de los tres conductores, para un estado particular del sistema, son φ_1, φ_2 y φ_3. El teorema de unicidad garantiza que, dados φ_1, φ_2 y φ_3, el campo eléctrico está determinado en todo el sistema. Se deduce que las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 en los conductores individuales están asimismo determinadas unívocamente.

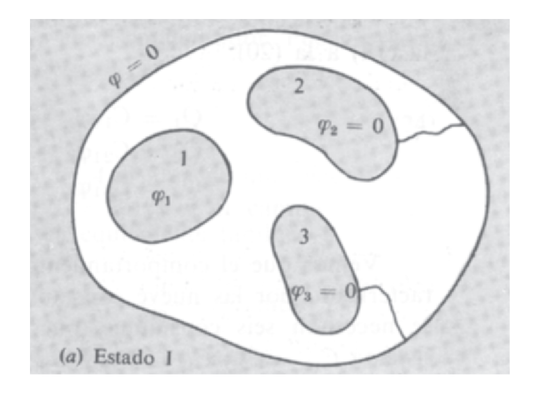
No necesitamos calcular la carga en la superficie interna de la capa que los rodea, ya que siempre es $-(Q_1 + Q_2 + Q_3)$. Si preferimos podemos dejar que el « infinito » tome el lugar de esta capa, imaginando que la capa se expansiona ilimitadamente. La hemos mantenido porque hace más fácil de seguir el proceso de transporte de carga si tenemos algo para conectar.

Entre los estados posibles del sistema están aquellos con φ_2 y φ_3 nulos. Resaltaríamos esta condición conectando los conductores 2 y 3 a la capa a potencial cero, como se indica en la Fig. 3.16*a*. Como antes podemos suponer que los hilos de conexión son tan delgados que pueda despreciarse la carga en ellos. Realmente no nos importa cómo se logró la condición especificada. En tal estado, que llamaremos estado I, el campo eléctrico en todo el sistema y la carga en cada conductor está determinada únicamente por el valor de φ_1. Por otra parte, si φ_1 se duplica esto implica que se duplique la intensidad del campo y por lo tanto que se duplique cada una de las cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Es decir, con $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$ cada una de las tres cargas debe ser proporcional a φ_1. Expresado matemáticamente:

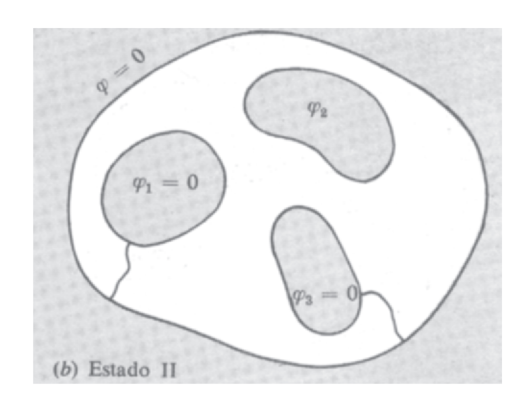
$$\left.\begin{array}{c}\textit{Estado I}\\ \varphi_2 = \varphi_3 = 0\end{array}\right\} \quad Q_1 = C_{11}\varphi_1; \qquad Q_2 = C_{21}\varphi_1; \qquad Q_3 = C_{31}\varphi_1 \tag{18}$$

Las tres constantes C_{11}, C_{21} y C_{31} sólo pueden depender de la forma y disposición de los cuerpos conductores.

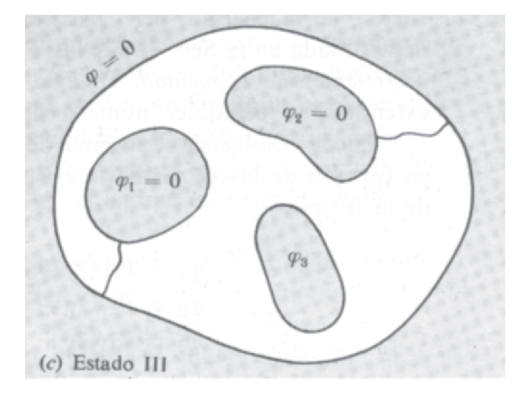
Estudiaríamos de la misma manera los estados en que φ_1 y φ_3 son nulos, llamando a tal condición estado II (Fig. 3.16*b*). Debemos



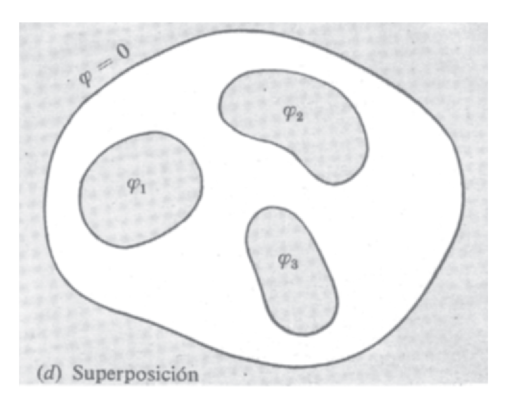
(*a*) Estado I



(*b*) Estado II



(*c*) Estado III



(*d*) Superposición

Fig. 3.16 Puede analizarse un estado general de este sistema por la superposición (*d*) de los tres estados (*a-c*) en cada uno de los cuales todos los conductores menos uno están a potencial cero.

hallar de nuevo una relación lineal entre el único potencial no nulo, φ_2 en este caso, y las distintas cargas:

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Estado II}\\ \varphi_1 = \varphi_3 = 0\end{array}\right\} Q_1 = C_{12}\varphi_2; \qquad Q_2 = C_{22}\varphi_2; \qquad Q_3 = C_{32}\varphi_2 \tag{19}$$

Finalmente, cuando son nulos φ_1 y φ_2, el campo y las cargas son proporcionales a φ_3:

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Estado III}\\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0\end{array}\right\} Q_1 = C_{13}\varphi_3; \qquad Q_2 = C_{23}\varphi_3; \qquad Q_3 = C_{33}\varphi_3 \tag{20}$$

Ahora bien, la superposición de los tres estados I, II y III es también un estado posible. El campo eléctrico en cualquier punto es la suma vectorial de los campos eléctricos en este punto en los tres casos, mientras la carga en un conductor es la suma de las cargas que contiene en los tres casos. En este nuevo estado los potenciales son φ_1, φ_2 y φ_3 ninguno de los tres necesariamente nulo. En resumen, tenemos un estado completamente general. La expresión que relaciona las cargas

y los potenciales se obtiene simplemente sumando las ecuaciones de la (18) a la (20):

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3 \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3 \end{aligned} \quad (21)$$

Vemos que el comportamiento eléctrico de este sistema está caracterizado por las nueve constantes C_{11}, $C_{12}, \dots C_{33}$. Realmente sólo se necesitan seis constantes, pues puede demostrarse que en *todo* sistema $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$ y $C_{23} = {}_{32}$. El que esto sea así no es evidente. El problema 3.27 sugerirá una prueba basada en la conservación de la energía, pero para este propósito se necesita una idea desarrollada en la Sec. 3.7. A las C de las ecuaciones (21) se les llama *coeficientes de capacidad.* Es evidente que nuestro razonamiento se extendería a cualquier número de conductores.

Puede resolverse el sistema de ecuaciones (21) para hallar las φ en función de las Q. Es decir existe un sistema de relaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3 \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3 \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3 \end{aligned} \quad (22)$$

A las P se les llama *coeficiente de potencial;* podrían calcularse a partir de las C o viceversa.

Aquí tenemos un ejemplo simple del tipo de relación que podemos esperar que rija en un sistema físico *lineal.* Tales relaciones se presentan en el estudio de las estructuras metálicas (relacionando cargas y esfuerzos), en el análisis de circuitos eléctricos (relacionando tensiones y corrientes) y hablando en general, dondequiera que pueda aplicarse la superposición.

3.7 Energía almacenada en un condensador

Consideremos un condensador de capacidad C, con una diferencia de potencial φ_{12} entre las placas. La carga Q es igual a $C\varphi_{12}$. Hay una carga Q en una placa y $-Q$ en la otra. Supongamos que *aumentamos* la carga de Q a $Q + dQ$ transportando una carga positiva dQ de la placa negativa a la positiva, actuando contra la diferencia de potencial φ_{12}. El trabajo que se ha realizado vale $dW = \varphi_{12}\, dQ = Q\, dQ/C$. Por tanto para cargar un condensador partiendo del estado descargado a un estado con carga final Q_f se requiere un trabajo

$$W = \frac{1}{C}\int_{Q=0}^{Q_f} Q\, dQ = \frac{{Q_f}^2}{2C} \quad (23)$$

Esta es la energía U « almacenada » en el condensador. Puede expresarse también por

$$U = \tfrac{1}{2}C\varphi_{12}{}^2 \qquad (24)$$

Para el condensador plano siendo A el área de una placa y s la separación hallamos la capacidad $C = \varepsilon_0 A/s$ y el campo eléctrico $E = \varphi_{12}/s$. De aquí que la Ec. 24 sea equivalente también a

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{s}\right)(Es)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot As = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot \text{volumen} \qquad (25)$$

Esto concuerda con nuestra fórmula general, Ec. 38 del Cap. 1 para la energía almacenada en un campo eléctrico*.

La Ec. 24 se aplica lo mismo a un conductor aislado cargado, el cual puede ser imaginado como la placa interna de un condensador, encerrado por el conductor externo de tamaño infinito y a potencial cero. Para la esfera aislada de radio a, hallamos $C = a$, así que $U = \frac{1}{2}a\phi^2$ o bien $U = \frac{1}{2}Q^2/a$, que concuerda con nuestro cálculo anterior de la energía almacenada en el campo eléctrico de la esfera cargada.

Las placas, cargadas con signos contrarios, de un condensador se atraen mutuamente; se necesitará cierta fuerza mecánica para mantenerlas separadas. Esto es evidente en el caso de condensador plano, para el cual podríamos calcular fácilmente la fuerza sobre la carga superficial. Pero podemos efectuar una exposición más general basada en la Ec. 23, que relaciona la energía almacenada con la carga Q y la capacidad C. Supongamos que C dependa en cierto modo de una coordenada lineal x que mide el desplazamiento de una «placa» del condensador, el cual puede ser un conductor de forma cualquiera, con respecto a la otra. Sea F el módulo de la fuerza que debemos aplicar a cada placa para solventar su atracción y mantener x constante. Imaginemos ahora que la distancia x aumenta en un incremento Δx con Q constante y una placa fija. La fuerza externa sobre la otra placa efectúa un trabajo $F\Delta x$ y, si la energía se ha de conservar, ésta debe aparecer como un aumento de la energía almacenada $Q^2/2C$. Este aumento a Q constante es

$$\Delta U = \frac{dU}{dx}\Delta x = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right)\Delta x \qquad (26)$$

Igualando al trabajo $F\Delta x$ hallamos

$$F = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) \qquad (27)$$

* Todo esto aplicado al «condensador en el vacío» que consiste en dos conductores con el vacío entre ellos. Como sabemos del laboratorio, la mayoría de condensadores usados en los circuitos eléctricos están llenos con un aislador o «dieléctrico». Estudiaremos este efecto en el Cap. 10.

3.8 Otros puntos de vista de los problemas de contorno

Sería injusto dar la impresión de que no existen métodos generales para tratar los problemas de contorno laplacianos. Aunque no podemos extendernos mucho en este tema, mencionaremos tres métodos útiles e interesantes que probablemente encontraremos en estudios futuros de la física o de las matemáticas aplicadas.

Primero, un método de análisis elegante, llamado representación conforme, está basado en la teoría de las funciones de variable compleja. Desgraciadamente sólo se aplica a sistemas bidimensionales. Estos son sistemas en los que φ solamente depende de x e y, por ejemplo, que todos los contornos conductores sean cilindros (en el sentido general) con elementos discurriendo paralelamente a z. La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{28}$$

con valores de contorno especificados sobre rectas o curvas en el plano xy. Muchos sistemas de interés práctico son como éste o suficientemente parecidos para que el método sea de utilidad, aparte por completo de su interés matemático intrínseco. Por ejemplo, la solución exacta para el potencial en torno a dos tiras metálicas largas se obtiene fácilmente por el método de la representación conforme. Las líneas de campo y las equipotenciales se presentan en sección plana en la Fig. 3.17. Esto nos proporciona el campo en el borde de un condensador plano en el cual el borde es largo comparado con la separación. El campo representado en la Fig. 3.11*b* se copió de una de estas soluciones. Podremos aplicar este método después de haber estudiado las funciones de variable compleja en las matemáticas superiores.

Segundo, mencionamos un método numérico para hallar soluciones aproximadas del potencial electrostático con valores de contorno dados. Este método, muy simple y casi universalmente aplicable, está basado en la propiedad particular de las funciones armónicas con la que ya estamos familiarizados: El valor de la función en un punto es igual a su valor medio en las proximidades de este punto. En este método la función potencial φ está representada solamente por valores en una distribución discreta de puntos, incluyendo puntos discretos en el contorno. Los valores en los puntos que no son del contorno se ajustan hasta que cada valor es igual al promedio de los valores vecinos. En principio esto podía hacerse resolviendo un gran número de ecuaciones simultáneas — tantas como puntos interiores. Pero puede obtenerse una solución aproximada, de manera mucho más simple, cambiando sistemáticamente cada valor para que coincida con el promedio de sus vecinos y repitiendo este proceso hasta que los cambios se hagan despreciables. Éste se llama *método de relajación.* Se parte con los puntos del contorno de la distribución, o red, con los valores prescritos, y se asignan valores arbitrarios de partida a los puntos interiores. Luego, se visitan, con cierto orden, todos los puntos

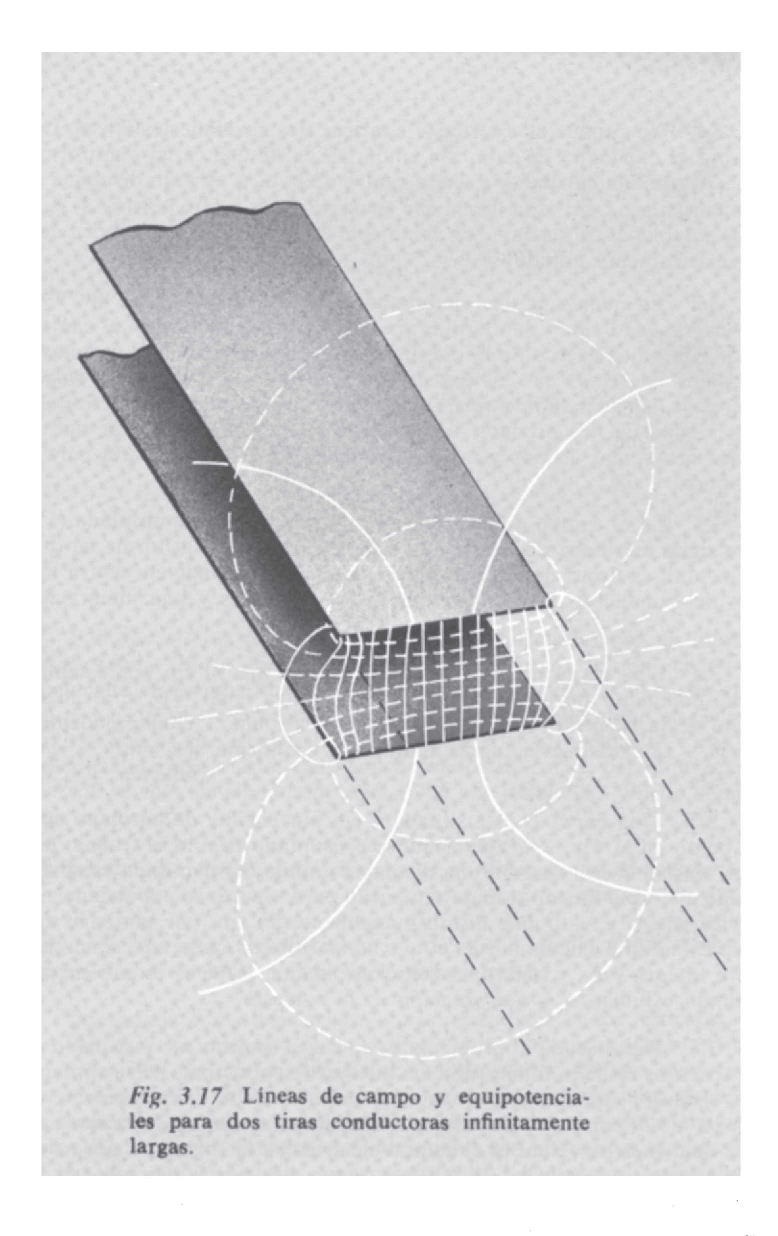


Fig. 3.17 Líneas de campo y equipotenciales para dos tiras conductoras infinitamente largas.

interiores. En cada punto reemplazamos sus valores por el promedio de los valores de los cuatro (para una red cuadrada) puntos adyacentes de la red. Repetir de nuevo y de nuevo hasta que todos los cambios hechos en el curso de un barrido sobre el circuito de los puntos interiores sean aceptablemente pequeños. Los problemas 3.30 y 3.31 dan una introducción a este método operatorio. El que si la convergencia de los procesos de relajación puede asegurar, o incluso abreviar, y si el método de relajación o la solución directa de las ecuaciones simultáneas es la mejor manera de resolver un problema dado, son cosa de la matemática aplicada que no podemos profundizar ahora. Las calculadoras rápidas hacen factibles los dos métodos.

Problemas

3.1 Un conductor esférico A contiene dos cavidades esféricas. La carga total en el conductor es nula. Sin embargo, existe una carga puntiforme q_b en el centro de una cavidad y q_c en el centro de la otra. A gran distancia r existe otra carga q_d. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre los cuatro objetos A, q_b, q_c, q_d? ¿Qué soluciones, si las hay, son solamente aproximadas, y dependen de r siendo relativamente grande?

3.2 Es errónea la idea de una pantalla gravitatoria, algo que «bloqueara» la gravedad como una lámina metálica parece «bloquear» el campo eléctrico. Pensemos acerca de la diferencia entre los manantiales gravitatorios y eléctricos. Notemos que las paredes de la caja en la Fig. 3.6 no *bloquean* el campo de los manantiales exteriores, sino que simplemente permiten a las cargas superficiales producir un campo que lo compense. ¿Por qué no podemos idear algo de esto para la gravedad? ¿Qué se necesitaría para que se cumpliera esto?

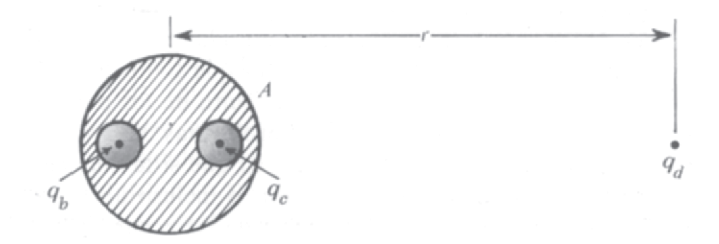
3.3 En el campo de la carga puntiforme encima de un plano (Fig. 3.9) si se sigue una línea de campo que sale de la carga puntiforme en dirección horizontal, es decir, paralela al plano, determínese dónde encuentra la superficie del conductor. (Necesitaremos la ley de Gauss y una integración simple.)

3.4 Una carga puntiforme positiva Q se fija 10 cm por encima de un plano conductor horizontal. Una carga negativa igual $-Q$ se localiza en un punto de la perpendicular trazada desde Q al plano. ¿Dónde podemos colocar la $-Q$ para que la fuerza total sobre la misma sea nula?

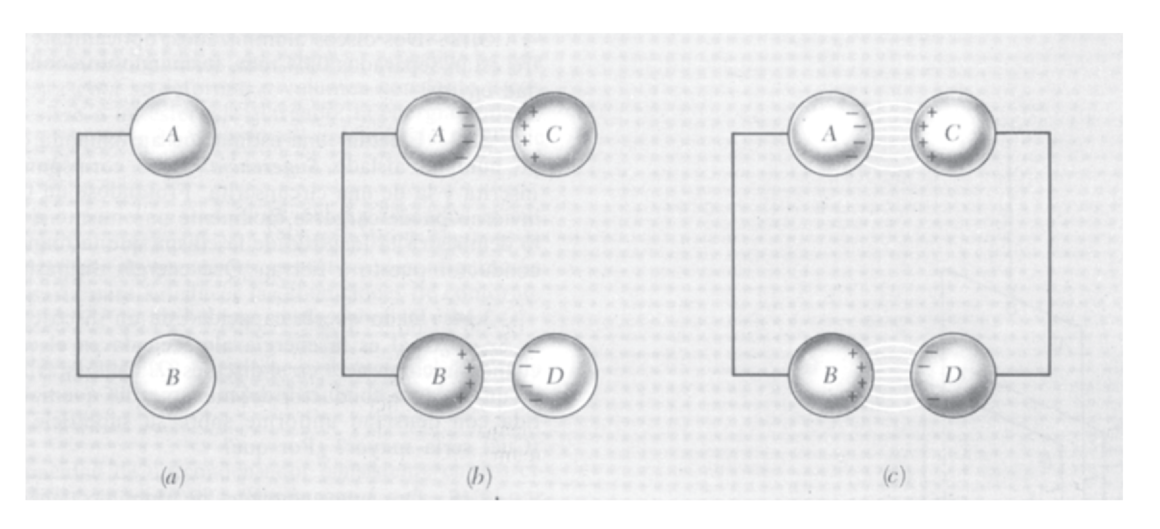
Solución: $y = 3{,}06$ cm.

3.5 Una carga Q está situada h cm por encima de un plano conductor tal como en la Fig. 3.8*a*. Habiéndose preguntado cuál es el trabajo necesario para trasladar esta carga a una distancia infinita del plano, un estudiante responde que es el mismo trabajo requerido para separar a una distancia infinita dos cargas Q y $-Q$ que distan inicialmente $2h$ cm, por tanto $W = Q^2/2h$. Otro estudiante calcula la fuerza que actúa sobre la carga que se ha de trasladar e integra $F dx$, y halla una solución distinta. ¿Qué es lo que encuentra el segundo estudiante, y qué solución es la correcta?

3.6 Resolviendo el problema de la carga puntiforme y el plano conductor tenemos resuelto todo problema que pueda construirse de su superposición. Por ejemplo, supongamos que tenemos un hilo recto, uniformemente cargado con $10^{-4}/3$ C por metro de longitud, situado paralelamente a la tierra a una altura de 5 metros. ¿Cuál es el campo eléctrico en la superficie de la tierra, inmediatamente debajo del hilo? ¿Qué fuerza eléctrica actúa sobre el hilo por unidad de longitud? ¿Podemos idear otra configuración electrostática simple que pueda construirse con estos elementos?



Prob. 3.1

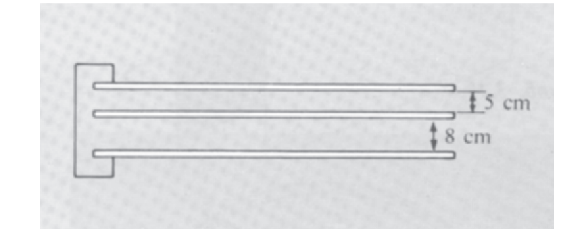


Prob. 3.7

3.7 Las dos esferas metálicas en (*a*) están conectadas por un hilo; la carga total es nula. En (*b*) dos esferas metálicas con cargas de signo contrario se han colocado en las posiciones indicadas, induciendo cargas de signo contrario en *A* y en *B*. Si se conectan ahora *C* y *D* con un hilo como en (*c*), podría argüirse que es preciso persista algo como la distribución de carga en (*b*), manteniéndose en su sitio, cada concentración de carga, por la atracción de las cargas vecinas de signo contrario. ¿Qué hay de cierto? ¿Puede demostrarse que no ocurre?

3.8 Tres placas conductoras se colocan paralelas como se indica. Los planos exteriores se conectan con un hilo. La placa interior está aislada y contiene una carga de $10^{-4}/3$ C/m² de placa. ¿En que proporción debe dividirse esta carga entre una carga superficial σ_1 en una cara de la placa interna y una carga superficial σ, en el otro lado de la misma placa?

Prob. 3.8



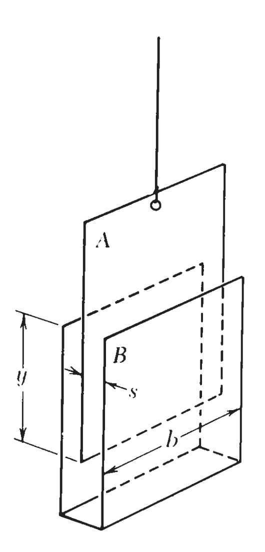
3.9 Dos cargas $+ q$ y dos cargas $- q$ están situadas en los vértices de un cuadrado, estando las cargas iguales diagonalmente opuestas. Demuéstrese que existen dos superficies equipotenciales que son planos. De esta manera se obtiene y se comprueba cualitativamente, el campo de una sola carga puntiforme situada simétricamente en la región determinada por una lámina metálica doblada en ángulo recto. Por este método cuáles son las configuraciones de planos y cargas puntiformes que pueden resolverse y cuáles no. Caso de una carga puntiforme situada en el bisector del ángulo diedro de 120° que forman dos placas conductoras.

3.10 ¿Cuál es la capacidad de un condensador que consta de dos armaduras esféricas? El radio interno de la capa exterior es *a*; el radio exterior de la capa interna es *b*. Comprobar el resultado considerando el caso límite en el que la distancia entre conductores $a - b \ll b$. En este límite puede aplicarse la fórmula de la capacidad de un condensador plano.

3.11 Un condensador de 100 pF se carga a 100 volt. Después de la carga, la batería se desconecta y el condensador se conecta en paralelo con otro condensador. Si el voltaje final es de 30 volt, determínese la capacidad del segundo condensador, cuánta energía se ha perdido y qué ha ocurrido con ella.

3.12 Dos discos aluminizados, ópticamente planos, de 15 cm de diámetro están separados 0,04 mm, formando un condensador. ¿Cuál es la capacidad en pF?

3.13 Efectuar una estimación aproximada de la capacidad de un cuerpo humano aislado. *Sugerencia:* Debe corresponder entre la de una esfera inscrita y la de una circunscrita. Frotándose un traje de nilon un día seco de invierno puede cargarse fácilmente uno mismo a un par de kilovolts —como lo demuestra la longitud de la chispa que la mano produce al acercarse a un conductor puesto a tierra. ¿Qué energía disiparía tal chispa?



Prob. 3.18

3.14 Dado que la capacidad de un disco conductor aislado de radio a es $8\varepsilon_0 a$. ¿Cuál es la energía almacenada en el campo eléctrico de tal disco cuando la carga neta en el disco es Q? Compararla con la energía en el campo de un disco no conductor del mismo radio que tiene la misma carga Q, repartida con densidad uniforme sobre su superficie. (Véase el problema 2.27.) ¿Cuál sería mayor? ¿Por qué?

3.15 Dos tubos coaxiales de aluminio tienen una longitud de 30 cm. El diámetro exterior del tubo interno es de 3 cm, el diámetro interior del tubo externo es de 4 cm. Cuando se conectan a una batería de 45 volts, hallar la energía almacenada en el campo eléctrico entre los tubos.

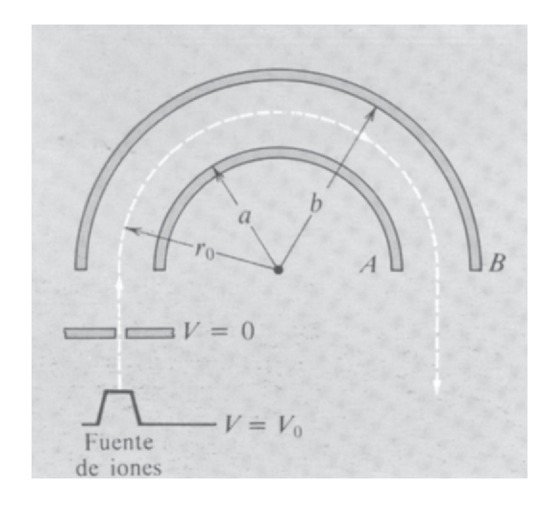
3.16 Calcúlese la fuerza que actúa sobre una placa de un condensador plano. La diferencia de potencial entre las placas es de 3000 V y las placas con cuadrados de 20 cm de lado con una separación de 3 cm. Si se aislan las placas para que las cargas no puedan variar, ¿cuál será el trabajo exterior que ha de efectuarse para juntar las placas? ¿Es igual a la energía almacenada inicialmente en el campo eléctrico?

3.17 Deseamos diseñar un condensador esférico vacío, con un radio dado a para la esfera externa, a fin de que almacene la máxima cantidad de energía, sujeto a la condición que el campo eléctrico en la superficie de la esfera interna tenga una intensidad que no exceda E_0. ¿Qué radio b se elegiría para la esfera conductora interna, y qué cantidad de energía almacenaría?

Solución: $3/4\ a$; $(27/512)a^3 E_0^2$.

3.18 Una lámina de aluminio A está suspendida mediante un cordón aislante entre las superficies formadas por la lámina de aluminio doblada B. Las láminas están cargadas opuestamente; la diferencia de potencial, en volts, es V. Esto da lugar a una fuerza F, además del peso de A, que empuja a A hacia abajo. Si podemos medir F y conocer las distintas dimensiones, seríamos capaces de deducir V. Como aplicación de la Ec. 27, deducir una fórmula que dé V en función de F y las dimensiones necesarias.

Prob. 3.19



3.19 En el aparato indicado, se aceleran iones mediante una diferencia de potencial V_0 y luego entran en el espacio entre los electrodos semicilíndricos A y B. Demostrar que un ión seguirá la trayectoria semicircular de radio r_0 si los potenciales de los electrodos externo e interno se mantienen, respectivamente, a $2V_0 \ln (b/r_0)$ y $2V_0 \ln (a/r_0)$. (Los electrodos cilíndricos A y B se suponen largos, en la dirección perpendicular al diagrama, comparado con el espacio entre ellos.)

3.20 La fórmula exacta para la capacidad C de un conductor de forma de un esferoide alargado de longitud $2a$ y diámetro $2b$ es

$$C = \frac{8\pi\varepsilon_0 a\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)} \qquad \text{donde } \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Comprobar primero que la fórmula se reduce a la expresión correcta para la capacidad de una esfera si $b = a$. Imaginemos ahora que el esferoide es una gota de agua cargada. ¿Si esta gota se deforma, a volumen constante y con carga constante Q, de una esfera a un esferoide alargado, la energía almacenada en el campo eléctrico aumenta o disminuye? (El volumen del esferoide alargado es proporcional a ab^2.)

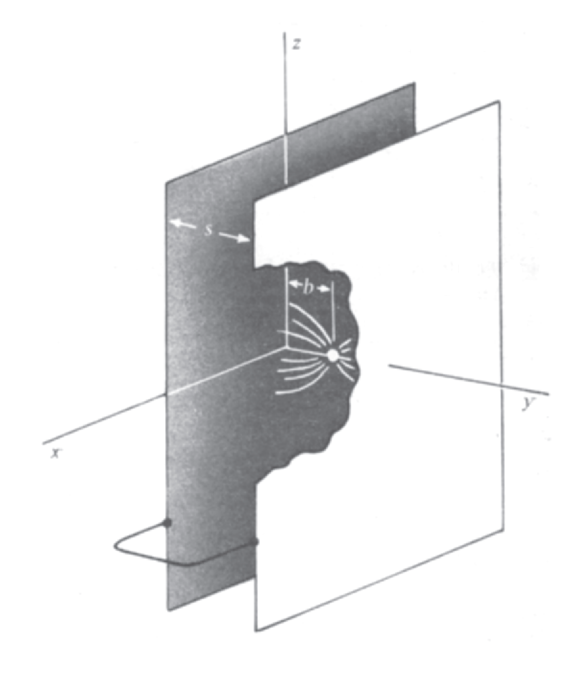
3.21 Imaginemos el plano xy, el xz y el yz de metal y soldados en sus intersecciones. Una sola carga puntiforme Q está situada a la distancia d de cada uno de los planos. Descríbase de manera esquemática la configuración de las cargas imágenes necesaria para satisfacer las condiciones de contorno. ¿Cuál es la dirección y módulo de la fuerza que actúa sobre la carga Q?

3.22 Si se ha resuelto el problema 2.11, se puede deducir del resultado la fórmula dada en el problema 3.20 para la capacidad de un conductor aislado de forma esferoidal alargada.

3.23 (*a*) Hallar la capacidad de un condensador consistente en dos cilindros coaxiales, de radios a y b, y longitud L. Supóngase $L \gg b - a$ así que pueden despreciarse las correcciones de borde. Compruébese el resultado demostrando que, si el espacio entre los cilindros, $b - a$, es muy pequeño comparado con el radio, la fórmula se reduce a una que podría haberse obtenido usando la del condensador plano.

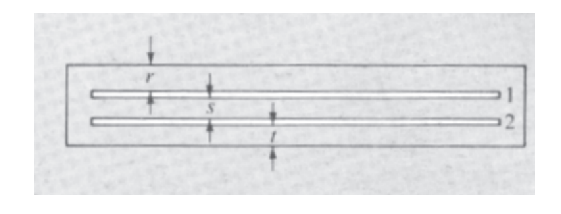
(*b*) Un cilindro de 5 cm de diámetro interno pende, con su eje vertical, del brazo de una balanza de flejes. La porción inferior del cilindro colgante se rodea por un cilindro estacionario, coaxial, de diámetro interior 7,5 cm. Calcúlese el valor de la fuerza que tiende a empujar hacia abajo al cilindro colgante cuando la diferencia de potencial entre ambos es de 5 kilovolts.

3.24 Dos placas paralelas están conectadas con un hilo así que están al mismo potencial. Una placa coincide con el plano xz y la otra con el plano $y = s$. La distancia s entre las placas es mucho menor que las dimensiones laterales de las placas. Una carga puntiforme Q está situada entre las placas en $y = b$ (véase la figura). ¿Cuál es el valor de la carga superficial total de la superficie interna de cada placa? La carga superficial total en la superficie interna de las dos placas debe ser — Q (¿por qué?), y podemos conjeturar que la mayor parte estará en la placa más próxima. Si la carga estuviese muy cerca de la placa de la izquierda, $b \ll s$, la presencia de la placa de la derecha no influye mucho. Sin embargo, deseamos conocer exactamente cómo se divide la carga. Si intentamos usar el método de las «imágenes» descubriremos que necesitamos una cadena infinita de imágenes que se extienden en ambos sentidos, quizá como las imágenes que vemos en una peluquería con espejos en ambas paredes. No es fácil calcular el campo resultante en un punto de una de las superficies, sin embargo, la pregunta puede resolverse por un cálculo simple basado en la superposición. (*Sugerencia:* La nota siguiente nos daría una buena pista. Añadiendo otra carga Q en cualquier punto del plano $y = b$ duplicaremos la carga superficial en cada placa; en realidad la carga superficial total inducida por cierto número de cargas de este plano es independiente de su posición en el plano. Si tuviésemos solamente una *lámina* de carga uniforme en este plano los campos eléctricos serían simples y podríamos hallar un modo de aplicar la ley de Gauss. Deducirlo de la figura adjunta).



Prob. 3.24

3.25 La figura muestra la sección recta de una caja metálica plana en la cual hay dos láminas planas, 1 y 2, cada una de área A. Las distintas distancias que separan las placas, indicadas por r, s y t en la figura, se suponen pequeñas comparadas con la anchura y longitud de las placas, así que será una buena aproximación despreciar los campos en los extremos al estimar las cargas sobre las placas. Con esta aproximación, calcular los coeficientes de capacidad, C_{11}, C_{22} y C_{33}. Puede también hallarse directamente C_{21}, para ver que es igual a C_{12}, como se afirma por el teorema general discutido en la sección 3.6 y en el problema 3.27.



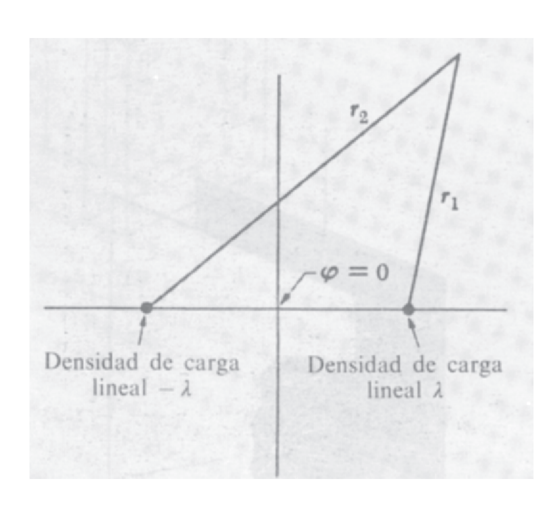
Prob. 3.25

3.26 Daremos unas indicaciones que capacitan para construir una demostración de que C_{12} debe ser siempre igual a C_{21}. Sabemos que, cuando un elemento de carga dQ se transfiere desde un potencial nulo a un conductor a potencial ϕ, ciertos agentes exteriores han suministrado una cantidad de energía ϕdQ. Consideremos un sistema de dos conductores en el cual los dos conductores se han cargado de forma que sus potenciales sean, respectivamente, ϕ_{1f} y ϕ_{2f} (f significa «final»). Esta condición puede haberse conseguido partiendo de un estado en el que las cargas y potenciales sean nulos, de diferentes maneras. Son de particular interés dos maneras:

(*a*) Mantener ϕ_2 nulo mientras aumenta ϕ_1 gradualmente desde cero a ϕ_{1f}, luego aumentar ϕ_2 desde cero a ϕ_{2f} mientras se mantiene ϕ_1 constante en ϕ_{1f}.

(*b*) Llevar a cabo un programa similar con los papeles de 1 y 2 intercambiados, es decir, elevar ϕ_2 desde cero a ϕ_{2f} primero y así sucesivamente.

Calcular el trabajo total efectuado por agentes externos, para cada uno de los dos programas de carga. Luego completar el razonamiento.

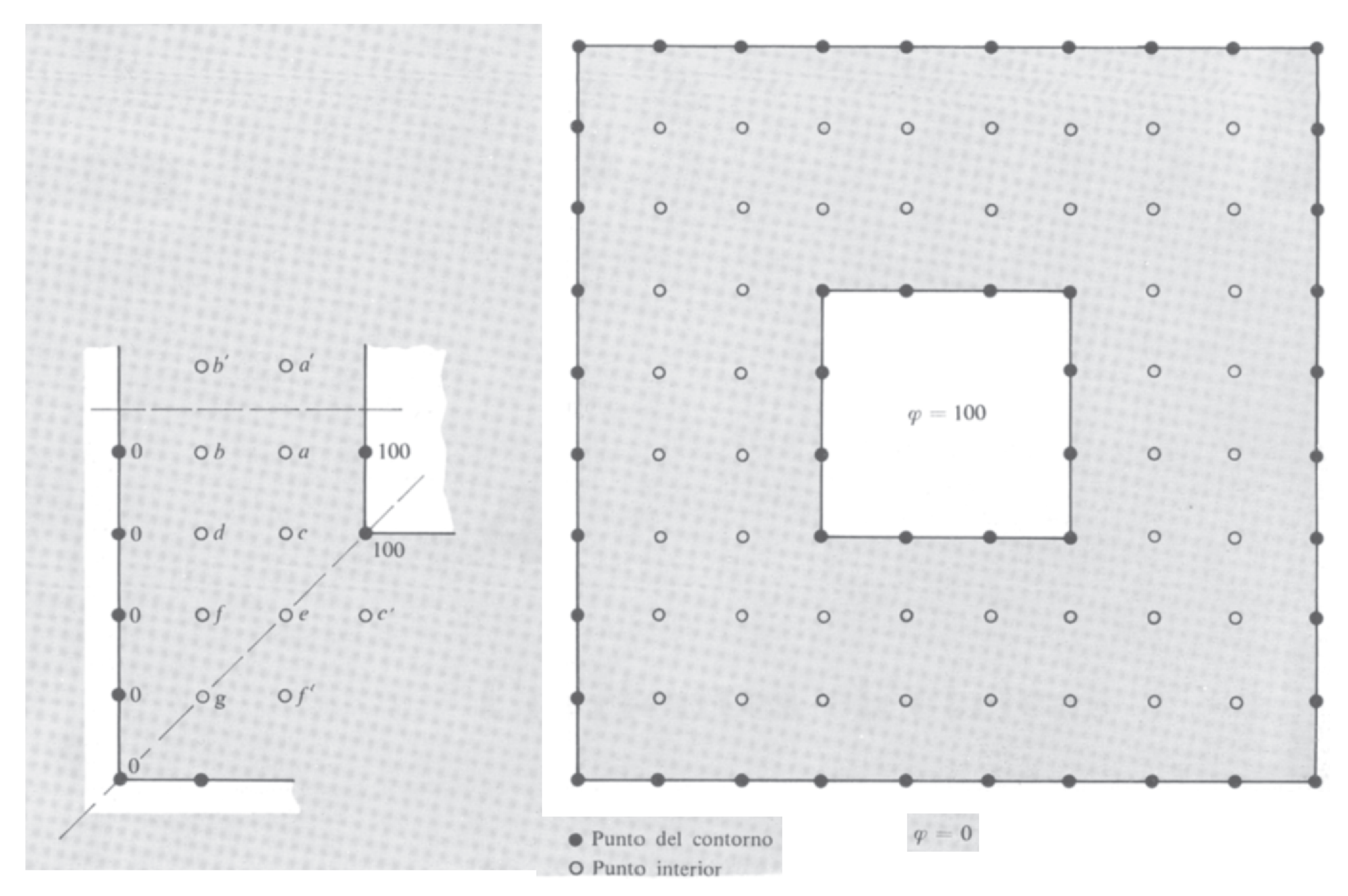


Prob. 3.27

3.27 Un problema típico bidimensional de valores de contorno es el de dos cilindros de revolución paralelos, tal como dos tubos metálicos, de longitud infinita y a potenciales diferentes. Estos problemas bidimensionales resultan más fáciles que los tridimensionales, desde el punto de vista matemático. En realidad, la clave de todo problema de «dos tubos» viene dada por el campo en torno dos cargas lineales paralelas de densidad lineal igual y opuesta. Todas las superficies equipotenciales en este campo son cilindros circulares. Y todas las líneas de campo son asimismo circulares. Inténtese demostrarlo.Es más fácil trabajar con el potencial, pero debe notarse que no puede hacerse el potencial nulo en el infinito en un sistema bidimensional. El potencial cero estará en la línea media entre las dos cargas lineales, es decir, en el origen en el diagrama de la sección recta. El potencial en un punto cualquiera es la suma de los potenciales calculados para cada carga lineal separadamente. Esto nos conduciría rápidamente al descubrimiento de que el potencial es simplemente proporcional a $\ln (r_2/r_1)$ y por tanto es constante sobre la curva trazada por un punto cuyas distancias a los dos puntos estén en una relación constante. Efectuar un esquema mostrando algunas de las equipotenciales.

3.28 Sea $\varphi(x, y, z)$ una función que puede desarrollarse en serie de potencias en torno a un punto (x_0, y_0, z_0). Escribir un desarrollo de Taylor para el valor de φ en cada uno de los seis puntos $(x_0 + \delta, y_0, z_0)$, $(x_0 - \delta, y_0, z_0)$, $(x_0, y_0 + \delta, z_0)$, $(x_0, y_0 - \delta, z_0)$, $(x_0, y_0, z_0 + \delta)$, $(x_0, y_0, z_0 - \delta)$, que rodean simétricamente al punto (x_0, y_0, z_0) a una distancia δ. Demostrar que, si φ satisface a la ecuación de Laplace, el promedio de los seis valores es igual a $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ con términos de tercer orden en δ.

3.29 He aquí como puede resolverse la ecuación de Laplace, aproximadamente, para valores de contorno dados, utilizando únicamente la aritmética. El método es el ***método de relajación*** mencionado en la Sec. 3.8, y está basado en el resultado del problema 3.28. Para mayor sencillez tomaremos un ejemplo bidimensional. En la figura hay dos contornos cuadrados equipotenciales, uno dentro del otro. Esto podría ser la sección recta de un condensador constituido por dos tubos metálicos de sección cuadrada de tamaños distintos. El problema consiste en hallar valores en una serie de puntos que sea una buena aproximación de la verdadera función potencial, $\varphi(x,y)$, en estos puntos. Adoptamos, un método razonablemente tosco para mantener la labor entre límites. Asignamos arbitrariamente, el potencial 100 al contorno interior y 0 al exterior. Todos los puntos de estos contornos se mantienen a estos valores. En principio, podemos empezar con los valores en puntos interiores; sin embargo podemos ahorrar tiempo por cierta conjetura inteligente. En la figura se sugieren unos cuantos valores de partida. Quizás pueden escogerse otros mejores. Evidentemente puede sacarse partido de la simetría; sólo necesitan calcularse siete puntos interiores. Ahora simplemente ha de recorrerse la red de manera sistemática reemplazando el valor en cada punto interior por el promedio en sus cuatro ve-



Prob. 3.29
Sustitúyase el valor en un punto interior por la suma de sus cuatro vecinos dividida por 4: $c = (100 + a + d + e)/4$. Manténgase: $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ y $f' = f$. Valores de partida que se sugieren:

$a = 50$ $e = 50$
$b = 25$ $f = 25$
$c = 50$ $g = 25$
$d = 25$

cinos. Deténgase cuando todos los cambios resultantes de un recorrido en la red sean satisfactoriamente pequeños. Un buen momento para terminar será cuando no haya ningún cambio mayor de 1 unidad en una pasada. La «relajación», es decir, el cambio en la distribución de los valores de una pasada a la siguiente, está estrechamente relacionada al fenómeno físico de la ***difusión***. Si se empieza con un valor muy elevado en un punto, se «extenderá» a sus vecinos inmediatos, de éstos a los siguientes, hasta que la giba se haya aplanado en lo que lo permitan las limitaciones de contorno.

Entrar los valores finales en la distribución, y esquematizar los cursos aproximados que dos equipotenciales, para $\phi = 25$ y $\phi = 50$, tendrían en el continuo real $\phi(x, y)$.

3.30 El método de relajación está muy bien adaptado para calculadoras. Escríbase un programa relacionado con el problema de contorno del cuadrado concéntrico en una malla más fina —o sea, una red con cuatro veces más puntos y la mitad del espaciado. Puede ser una buena idea utilizar una solución de la malla ancha al asignar valores de partida para la relajación en mallas más finas.

3.31 Un condensador consta de dos capas esféricas concéntricas. Llamemos a la capa interna, de radio *a*, conductor 1, y a la capa externa, de radio *b*, conductor 2. Para este sistema de dos conductores, hallar C_{11}, C_{22} y C_{12}.
Solución: $C_{11} = 4\pi\varepsilon_0\, ab/(b - a)$; $C_{22} = 4\pi\varepsilon_0\, b^2/(b - a)$; $C_{21} = -4\pi\varepsilon_0\, ab/(b - a)$.

4

Corrientes eléctricas

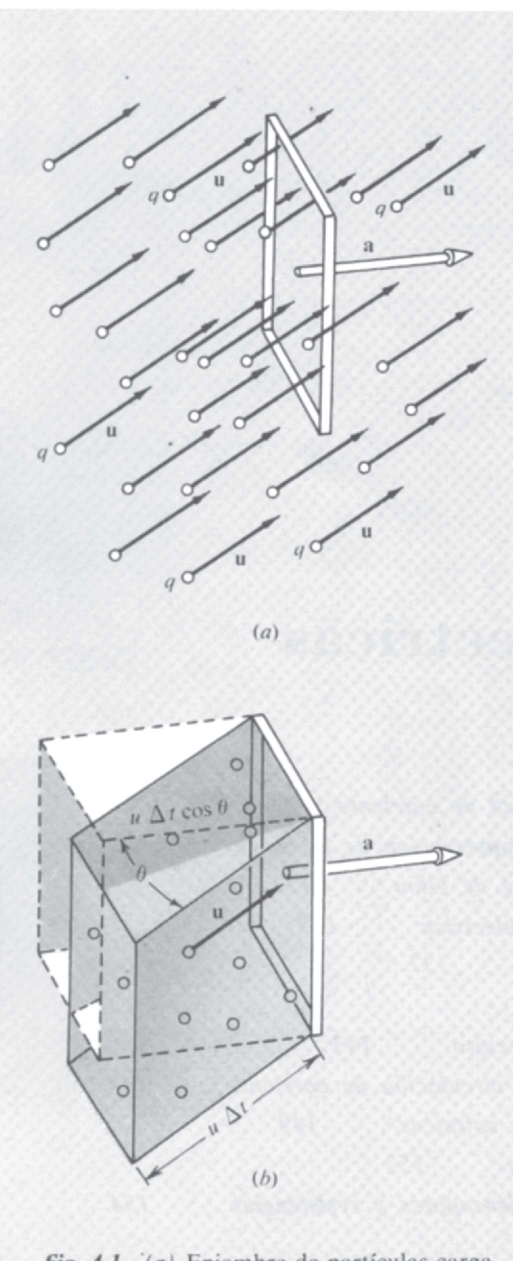


Fig. 4.1 (*a*) Enjambre de partículas cargadas que se mueven todas con la misma velocidad **u**. El cuadro tiene área **a**. Las partículas que atravesarán el cuadro en los próximos Δt segundos, son las que están contenidas, ahora, en el prisma oblicuo (*b*). El prisma tiene una altura $\mu \Delta t \cos\theta$ y el área de su base es **a**, de aquí que su volumen sea $au\Delta t \cos\theta$ o $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}\, \Delta t$.

4.1 *Corriente eléctrica y densidad de corriente*

Una corriente eléctrica es carga en movimiento. Los portadores de carga pueden ser físicamente partículas como electrones o protones, que pueden o no asignarse a objetos mayores, átomos o moléculas. Ahora no nos interesa la naturaleza de los portadores de carga, sino solamente el transporte neto de carga eléctrica debido a su movimiento. La corriente eléctrica en un hilo es la cantidad de carga que pasa por un punto fijo del mismo por unidad de tiempo. Se expresa en coulomb/s (C/s), o amperes (A). Una corriente de 1 ampere equivale a $6{,}24 \cdot 10^{18}$ cargas electrónicas elementales por segundo.

Lo que cuenta es el transporte neto de carga, con la debida consideración al signo. Cargas negativas moviéndose hacia el este equivalen a cargas positivas moviéndose hacia el oeste. El agua que sale de una manguera puede decirse que transporta una gran cantidad de carga —cerca de $3 \cdot 10^{33}$ electrones por gramo de agua. Pero como con los electrones se mueve un número igual de protones (cada molécula de agua contiene 10 de cada uno de ellos), la corriente eléctrica es nula. Por otro lado, si cargásemos negativamente un hilo de nilón y lo desplazamos uniformemente a lo largo de un tubo no conductor, tendríamos una corriente eléctrica en sentido contrario al movimiento del hilo.

Hemos considerado corriente a lo largo de un camino bien definido, como un hilo. Si la corriente es *estacionaria* —es decir, no varía con el tiempo— debe ser la misma en cada punto a lo largo del hilo, exactamente como en el tráfico estacionario deben pasar el mismo número de coches, por hora, en los diferentes puntos a lo largo de una carretera sin ramales.

Un tipo de corriente más general, o transporte de carga, supone portadores de carga que se mueven en un volumen tridimensional. Para describirlo necesitamos el concepto de *densidad de corriente*. Tenemos que considerar valores medios de las magnitudes, pues los portadores de carga son partículas discretas. Debemos suponer, como hicimos al definir la densidad de carga ρ, que nuestra escala de distancias es tal que toda pequeña región que deseemos promediar contiene gran número de partículas de todas las clases que estamos tratando.

Consideremos primero un caso particular en el cual, en promedio, hay n partículas por centímetro cúbico moviéndose todas con el mismo vector velocidad **u** y transportando la misma carga q. Imaginemos un pequeño cuadro de área **a** fijo con cierta orientación, como en la Fig. 4.1*a*. ¿Cuántas partículas atraviesan el cuadro en un intervalo de tiempo Δt? Si Δt empieza en el instante mostrado en la Fig. 4.1*a* y *b*, las partículas destinadas a atravesar el cuadro en los próximos Δt segundos serán precisamente las que ahora están situadas dentro del prisma oblicuo en la Fig. 4.1*b*. El cuadro es la base del prisma y la longitud de su arista es $u\Delta t$, que es la distancia que recorre una cualquiera de las partículas en el tiempo Δt. Las partículas fuera del prisma

no aciertan la ventana o no la alcanzan. El volumen del prisma es el producto *base* × *altura*, o bien $au\Delta t \cos\theta$, que puede escribirse $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$. En promedio, el número de partículas que se encuentran en este volumen es $n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Delta t$. De aquí que el valor medio de la carga que atraviesa el cuadro por unidad de tiempo, es decir, la corriente a través del cuadro a la que llamaremos $I(a)$, es

$$I(a) = \frac{q(n\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\,\Delta t)}{\Delta t} = nq\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \qquad (1)$$

Supongamos que tenemos distintas partículas en el conjunto, que difieren en la carga, en el vector velocidad o en ambas cosas. Cada una contribuiría a la corriente a través de **a**. Denotando cada clase por el subíndice k, la clase k-ésima tiene carga q_k en cada partícula, se mueve con la velocidad $\mathbf{u}_k$, y está presente con una concentración media de n_k partículas de esta clase por metro cúbico, lo que podemos establecer de manera formal:

$$I(a) = n_1q_1\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1 + n_2q_2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots = \mathbf{a}\cdot\sum_k n_kq_k\mathbf{u}_k \qquad (2)$$

A la magnitud vectorial que en la Ec. 2 multiplica a **a** la llamamos *densidad de corriente* **J**. Puede expresarse **J** en ampere por metro cuadrado (A/m^2)*.

$$\mathbf{J} = \Sigma n_kq_k\mathbf{u}_k \qquad (3)$$

Tengamos en cuenta la contribución a la densidad de corriente de una variedad de portadores de carga, por ejemplo electrones, que pueden estar presentes con distintas velocidades. En un conductor, los electrones tienen una distribución de velocidades casi al azar, que varian considerablemente en dirección y módulo. Sea N_e el número total de electrones por unidad de volumen, de todas velocidades. Podemos dividir los electrones en grupos, cada uno de los cuales contiene electrones con casi la misma celeridad y dirección. La *velocidad media* de todos los electrones, como promedio, se calcularía sumando cada grupo ponderando cada velocidad por el número en el grupo, y dividiendo por el número total. Es decir,

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e}\sum_k n_k\mathbf{u}_k \qquad (4)$$

* A veces nos encontraremos con densidades de corriente expresadas en ampere/cm^2. No hay nada equivocado con esto; el significado es perfectamente claro mientras las unidades estén bien determinadas. (Mucho antes de que el SI se hubiese promulgado, dos o tres generaciones de ingenieros eléctricos estuvieron trabajando con amperes por pulgada cuadrada).

usamos la barra encima de $\bar{\mathbf{u}}$ para indicar el valor medio en una distribución. Comparando la Ec. 4 con la Ec. 3, vemos que la contribución de los electrones a la densidad de corriente puede simplemente escribirse en función de la velocidad media de los electrones. Recordando que para el electrón $q = -e$, y usando el subíndice e para indicar que todas las magnitudes se refieren a este tipo de portador de carga, podemos escribir

$$\mathbf{J}_e = -eN_e\bar{\mathbf{u}}_e \tag{5}$$

Esto tal vez pueda parecer evidente, pero nosotros hemos ido paso a paso para aclarar que la corriente a través del cuadro depende solamente de la *velocidad media* de los portadores, que a menudo es solamente una reducida fracción de sus celeridades al azar.

4.2 Corrientes estacionarias y conservación de la carga

La corriente I que circula a través de cualquier superficie S es precisamente la integral de superficie

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \tag{6}$$

Hablamos de un sistema de corrientes estacionadas o estacionarias cuando el vector densidad de corriente $\mathbf{J}$ permanece constante con el tiempo en todo punto. Las corrientes estacionarias tienen que obedecer a la ley de conservación de la carga. Consideremos una región del espacio rodeada completamente por la superficie cerrada S. La integral de superficie de $\mathbf{J}$ extendida a toda la S da la velocidad con que la carga sale del volumen encerrado. Será positiva si los portadores de carga positiva se mueven hacia fuera o los portadores de carga negativa se mueven hacia dentro y así sucesivamente. Continuando esto indefinidamente, el volumen tarde o temprano agotaría la carga — a menos que se cree alguna nueva carga. Pero la creación de carga es precisamente lo que no puede ocurrir. Por lo tanto para una distribución de corriente verdaderamente independiente del tiempo, la integral de superficie de $\mathbf{J}$ extendida a cualquier superficie cerrada debe ser nula. Esto es equivalente a establecer que, en todo punto del espacio:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \tag{7}$$

Para apreciar la equivalencia, recordemos el teorema de Gauss y nuestra definición fundamental de la divergencia en función de la integral de superficie sobre una pequeña superficie que rodee el punto considerado.

Podemos hacer una exposición más general que la Ec. 7. Supongamos que la corriente no es estacionaria, siendo $\mathbf{J}$ función de t así como de x, y, z. Ya que $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ es la velocidad instantánea con que la

carga *abandona* el volumen cerrado, mientras que $\int_v \rho\, dv$ es la carga total *en el interior* del volumen en cualquier instante, tenemos

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv \tag{8}$$

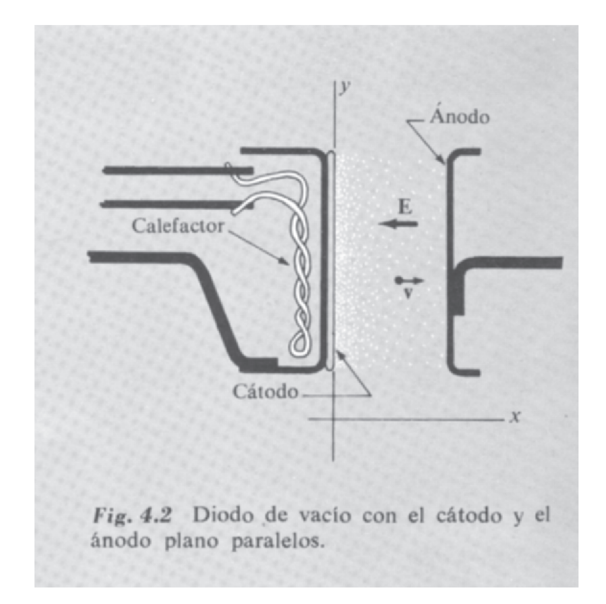


Fig. 4.2 Diodo de vacío con el cátodo y el ánodo plano paralelos.

Permitiendo que el volumen considerado decrezca en torno a un punto cualquiera (x, y, z) la relación expresada en la Ec. 8 se convierte en *:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{(distribución de carga dependiente del tiempo)} \tag{9}$$

La derivada con respecto al tiempo de la densidad de carga ρ se ha escrito como derivada parcial ya que ρ será generalmente función de las coordenadas espaciales como lo es del tiempo. Las ecuaciones 8 y 9 expresan la *conservación de la carga:* No puede salir carga de un lugar sin disminuir la cantidad de carga allí existente.

Un ejemplo instructivo de una distribución estacionaria de corrientes tiene lugar en el diodo plano paralelo, un tubo vacío con dos electrodos. Un electrodo, el cátodo, está recubierto de un material que emite gran cantidad de electrones cuando se calienta. El otro electrodo, el ánodo, es simplemente una placa metálica. Mediante una batería se mantiene al ánodo a un potencial positivo con respecto al cátodo. Los electrones emergen de este cátodo caliente con velocidades muy pequeñas, pero luego se aceleran hacia el ánodo positivo por efecto del campo eléctrico entre cátodo y ánodo. En el espacio entre el cátodo y el ánodo la corriente eléctrica está constituida por estos electrones móviles. El circuito se cierra por el flujo de electrones en los hilos exteriores, posiblemente por el movimiento de iones en una batería, y así sucesivamente, lo cual aquí no nos interesa. En este diodo la densidad local de carga ρ en una región cualquiera es $-ne$ donde n es la densidad local de electrones, en electrones/m^3. La densidad de corriente local $\mathbf{J}$ es $\rho\mathbf{v}$ donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de los electrones en esta región. En el diodo plano paralelo podemos suponer que $\mathbf{J}$ no tiene componentes y o z (Fig. 4.2). Si las condiciones son estacionarias, se deduce que J_x debe ser independiente de x, pues si $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, como indica la Ec. 7, $(\partial J_x/\partial x)$ debe ser nula si $J_y = J_z = 0$. Intuitivamente; si tenemos una corriente estacionaria de electrones moviéndose solamente en la dirección x, tienen que cruzar cualquier plano intermedio entre cátodo y ánodo el mismo número por segundo. Lle-

* Si el paso de la Ec. 8 a la Ec. 9 no fuera obvio, ver la definición fundamental de divergencia del capítulo 2. Como el volumen se reduce, podemos eventualmente tomar ρ fuera de la integral de volumen del segundo miembro. La integral de volumen se calculará para un determinado instante de tiempo. Su derivada con respecto al tiempo depende de la diferencia entre las integrales de volumen con los instantes t y $t + dt$. La diferencia se debe únicamente a la variación de ρ, ya que los límites del volumen no varían.

gamos a la conclusión que ρv es constante. Pero observemos que v *no* es constante; varía con x debido a que los electrones se aceleran por el campo. De aquí que ρ tampoco es constante. En vez de ello la densidad de carga negativa es mayor cerca del cátodo, pequeña cerca del ánodo, lo mismo que la densidad de coches en una carretera es mayor cerca de un lugar de tráfico lento, pequeña en donde el tráfico se mueve a gran velocidad.

4.3 Conductividad eléctrica y ley de Ohm

Existen varias maneras de producir el movimiento de las cargas, incluyendo lo que podríamos llamar « transporte real » de los portadores de carga. En el generador electrostático Van der Graaff (véase Problema 4.3) se da una carga superficial a una correa aislada que la conduce a otro electrodo por transporte, algo así como una escalera mecánica transporta personas. Esto constituye perfectamente una corriente. En la atmósfera pequeñas gotas de agua cargadas que caen a causa de su peso, constituyen una componente del sistema de corrientes de la tierra. En esta sección nos dedicaremos a un agente más común del transporte de cargas, la fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre un portador de carga. Un campo eléctrico tiende a mover a los portadores de carga positiva en un sentido, a los portadores de carga negativa en sentido contrario. Si cada uno o ambos se mueven, el resultado es una corriente eléctrica en el sentido de **E**. En la mayoría de substancias y en un amplio intervalo de intensidades del campo eléctrico, encontramos que la densidad de corriente es proporcional a la intensidad del campo eléctrico que la causa. La relación lineal entre la densidad de corriente y el campo se expresa por

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{10}$$

Al factor σ se le llama *conductividad* del material. Su valor depende del material en cuestión; es muy grande para conductores metálicos, extremadamente pequeño para buenos aisladores. También puede depender del estado físico del material —de su temperatura, por ejemplo. Pero dadas tales condiciones, no depende del valor de **E**. Si duplicamos la intensidad del campo, manteniendo todo lo demás constante, obtenemos el doble de densidad de corriente.

En la Ec. 10, σ puede considerarse una magnitud escalar, lo que implica que la dirección de **J** siempre es la misma que la de **E**. Esto es seguramente lo que esperaríamos en un material cuya estructura no «está construida» con direcciones preferidas. Existen materiales en los cuales la conductividad eléctrica depende del ángulo que el campo aplicado **E** forma con ciertos ejes intrínsecos en el ma-

terial. Un ejemplo es un monocristal de grafito que tiene una estructura bandeada a escala atómica. Véase otro ejemplo en el problema 4.7. En tales casos **J** no puede tener la dirección de **E**. Pero además existen ciertas relaciones lineales entre las componentes de **J** y las de **E**, relaciones expresadas por la Ec. 10 con σ una magnitud *tensorial* en vez de un escalar*. De ahora en adelante solamente consideraremos materiales *isótropos*, en los cuales la conductividad eléctrica es la misma en todas las direcciones.

La Ec. 10 es una expresión de la ley de Ohm. Es una ley *empírica,* una generalización deducida de los experimentos, no un teorema que debe cumplirse universalmente. De hecho, la ley de Ohm está obligada a fallar, en el caso de cualquier material particular, si el campo eléctrico es demasiado intenso. Y encontraremos ciertos interesantes y útiles materiales en los cuales el comportamiento «no óhmico» tiene lugar en campos más bien débiles. No obstante, el hecho notable es el enorme intervalo en el que, en la gran mayoría de materiales, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico. Al final del capítulo explicaremos por qué esto es así. Pero ahora, tomando la Ec. 10 por válida, buscaremos sus consecuencias. Nos interesa la corriente total I que circula por un hilo o conductor de cualquier forma con extremos bien definidos, o terminales, y la diferencia de potencial entre estos terminales, para la cual usaremos el símbolo V (por voltaje) en vez de $\phi_1 - \phi_2$ o ϕ_{12}. Si **J** es proporcional a **E** en todo punto interior del conductor, entonces I debe ser indudablemente proporcional a V. Pues I es la integral de **J** extendida a la sección recta del conductor, mientras que V es la integral curvilínea de **E** a lo largo de un camino en el conductor desde un terminal al otro. La relación entre V e I es, por tanto, otra expresión de la ley de Ohm, que escribiremos de esta manera:

$$V = RI \tag{11}$$

La constante R es la *resistencia* del conductor entre los dos terminales. R depende de la forma y tamaño del conductor y de la conductividad σ del material. El ejemplo más simple es una varilla maciza de sección recta de área A y longitud L entre sus extremos. Una corriente estacionaria I circula a lo largo de esta varilla (Fig. 4.3). Por supuesto que debe haber conductores que lleven la corriente a y

* La relación lineal más general entre los vectores **J** y **E** se expresa como sigue. En lugar de las tres ecuaciones equivalentes a la Ec. 10, o sea, $J_x = \sigma E_x$, $J_y = \sigma E_y$, $J_z = \sigma E_z$, tendríamos $J_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z$, $J_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z$, $J_z = \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z$. Los nueve coeficientes σ_{xx}, σ_{xy}, etc., constituyen un *tensor.* (En este caso a causa de la exigencia de la simetría, resultaría que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Además con una adecuada orientación de los ejes x, y, z, todos los coeficientes se anularían excepto σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}).

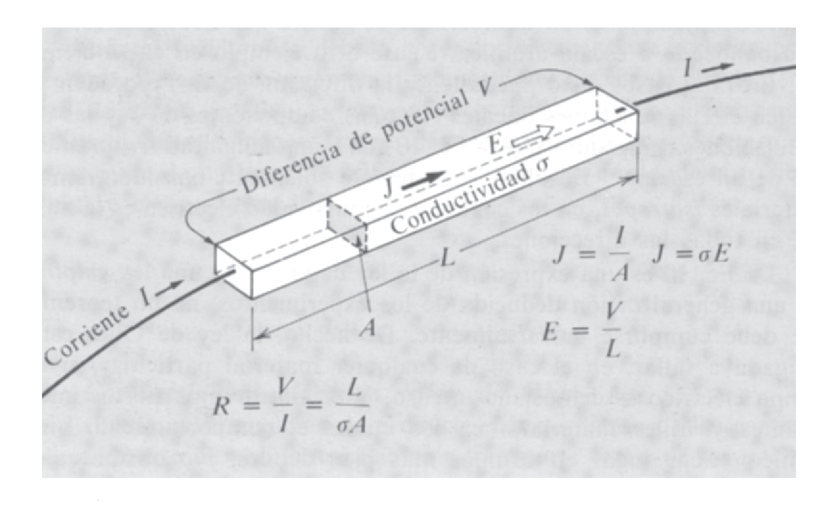


Fig. 4.3 Resistencia de un conductor de longitud L, de área de la sección recta uniforme A, y conductividad σ.

desde la varilla. Consideremos que estos conductores están unidos a los terminales de la varilla. Dentro de la varilla la densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} \tag{12}$$

y la intensidad del campo eléctrico es

$$E = \frac{V}{L} \tag{13}$$

La resistencia R en la Ec. 11 es V/I. Usando las Ecs. 10, 12 y 13, fácilmente hallamos que

$$R = \frac{V}{I} = \frac{LE}{AJ} = \frac{L}{A\sigma} \tag{14}$$

Por medio de esta fórmula simple haremos algunas suposiciones tácitas. Primero supondremos que la densidad de corriente es uniforme en toda la sección recta de la barra. Para ver que esto ha de ser así, imaginemos que **J** sea realmente mayor a un lado de la barra que en el otro. Entonces **E** debe ser también mayor a este lado. Pero entonces la integral curvilínea de **E** de un terminal a otro sería mayor en un camino por un lado que por el otro, y esto no puede ser cierto en un campo electrostático. Una segunda suposición es que **J** se mantiene uniforme en módulo, dirección y sentido, salvo en los extremos de la barra. El que sea cierto o no depende de los conductores externos que llevan la corriente a, y desde, la barra, y de cómo estén conectados. Compárese la Fig. 4.4*a* con la 4.4*b*. Supongamos que el terminal en (*b*) es de un material con una conductividad mucho mayor que la de la barra. Esto hará que el plano del extremo de la barra sea una superficie equipotencial, creando el sistema de corriente para el cual la Ec. 14 se aplica *exactamente*. En general, todo lo que podemos decir acerca de tales «efectos de extre-

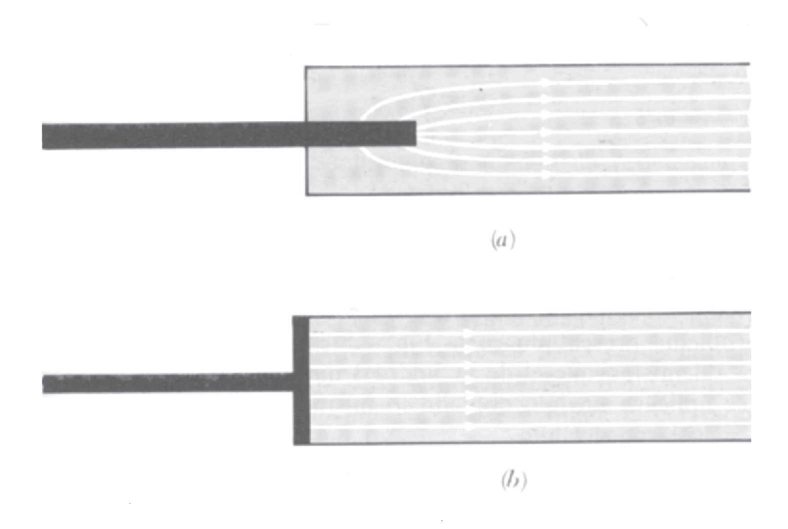


Fig. 4.4 Diferentes maneras de introducir la corriente I en la barra conductora. En (a) tiene que diverger antes de que la densidad de corriente **J** se haga uniforme. En (b) si el conductor externo tiene conductividad mucho más elevada que la barra, el extremo de la barra será una equipotencial y la densidad de corriente será uniforme desde el principio. Para conductores largos y finos como los hilos ordinarios, la diferencia es despreciable.

mo» es que la Ec. 14 dará R con una buena aproximación si la anchura de la barra es pequeña comparada con su longitud.

Una tercera suposición es que la barra esté rodeada por un medio no conductor. Sin esto no podríamos ni definir un camino aislado de corriente con terminales ni hablar acerca de *la* corriente I y *la* resistencia R. En otras palabras, es la enorme diferencia entre las conductividades de los buenos aisladores, incluyendo el aire, y la de los conductores la que hace posible los ***hilos***, tal como los conocemos. Imaginemos la varilla conductora de la Fig. 4.3 doblada en una forma cualquiera, como en la Fig. 4.5. Debido a que se halla dentro

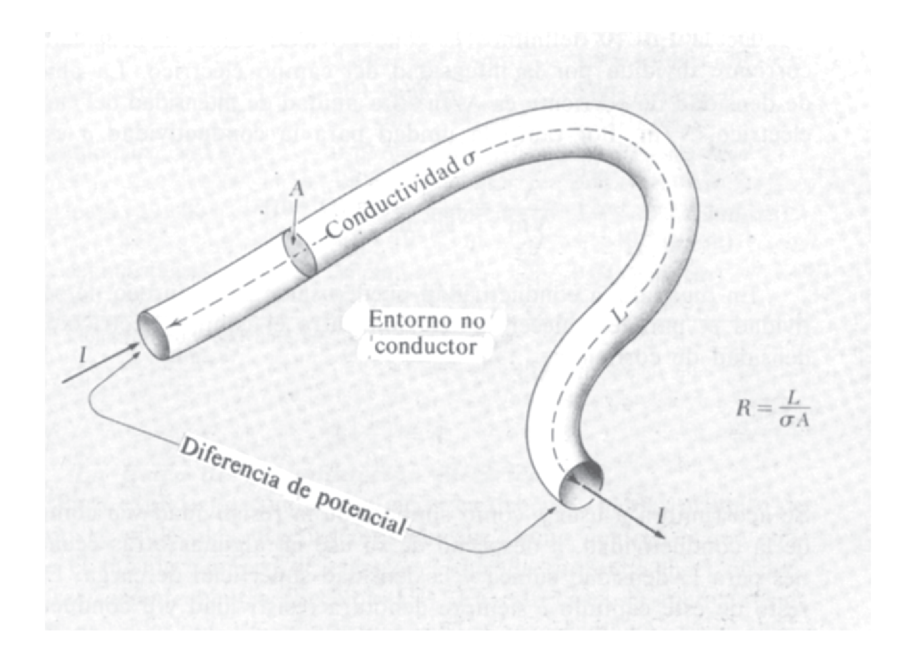


Fig. 4.5 En tanto nuestro conductor esté rodeado por un medio no conductor (aire, aceite, vacío, etc.) la resistencia R entre los terminales no depende de la forma, solamente de la longitud del conductor y del área de su sección recta.

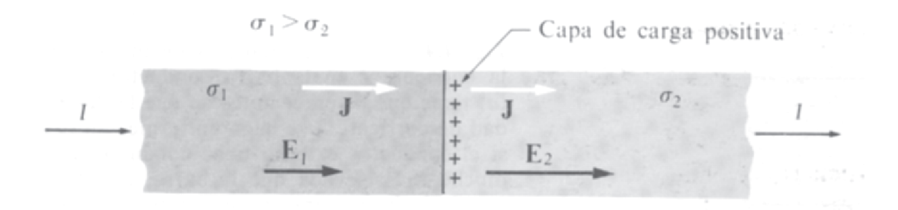


Fig. 4.6 Cuando circula corriente a través de este conductor compuesto, aparece una capa de carga estática en la superficie de separación de los dos materiales, para proporcionar el salto necesario en el campo eléctrico **E.** En este ejemplo $\sigma_2 < \sigma_1$, de donde E_2 debe ser mayor que E_1.

de un medio no conductor en el que las corrientes no pueden perderse, el problema presentado en la Fig. 4.5 es, para todos los efectos prácticos, el mismo que el de la Fig. 4.3 que ya hemos resuelto. La Ec. 14 se aplica a un hilo doblado lo mismo que a uno recto, si se mide L a lo largo del hilo.

En una región donde la conductividad σ es constante, la condición de corriente estacionaria div $\mathbf{J} = 0$ (Ec. 7) junto con la Ec. 10 implica que también div $\mathbf{E} = 0$. Esto nos dice que la densidad de carga es nula dentro de esta región. Por otro lado, si σ varía de un lugar a otro en el medio conductor, la circulación de corriente estacionaria puede motivar la presencia de carga estática dentro del conductor. La Fig. 4.6 muestra un simple ejemplo, una barra constituida por dos materiales de diferente conductividad σ_1 y σ_2. La densidad de corriente **J** debe ser la misma en los dos lados de la superficie de separación, de otro modo aquí se acumularía carga. Se deduce que el campo eléctrico **E** debe ser diferente en las dos regiones, con un salto brusco de los valores en la superficie de separación. Tal como nos indica la ley de Gauss, esta discontinuidad en **E** debe reflejar la presencia de una capa de carga electrostática en la superficie de separación. El problema 4.5 contempla de nuevo este ejemplo.

De la Ec. 10 definimos la conductividad como la densidad de corriente dividida por la intensidad del campo eléctrico. La unidad de densidad de corriente es A/m². La unidad de intensidad del campo eléctrico, V/m. Por tanto la unidad para la conductividad σ es

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} = \frac{1}{\Omega \cdot \mathrm{m}} = (\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$$

En lugar de la conductividad puede usarse su recíproco, la resistividad ρ, para establecer la relación entre el campo eléctrico y la densidad de corriente:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{1}{\rho}\right)\mathbf{E} \qquad (15)$$

Se acostumbra a usar ρ como símbolo de la resistividad y σ como el de la conductividad, a despecho de su uso en algunas otras ecuaciones para la densidad cúbica y la densidad superficial de carga. En el resto de este capítulo ρ siempre denotará resistividad y σ conductivi-

dad. La Ec. 14 escrita en función de la resistividad se convierte en

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{16}$$

La unidad se expresa usando la unidad de resistencia, el ohm (Ω), que se define por la Ec. 11 como un volt por ampere. Si la resistencia R va en ohms, es evidente a partir de la Ec. 16 que ρ debe tener las dimensiones ohm • longitud. La unidad para ρ será por tanto el ohm • metro ($\Omega \cdot$ m). Pero puede usarse otra unidad de longitud con significado perfectamente claro. En realidad la unidad más comúnmente usada para la resistividad, tanto en física como en tecnología de la conducción eléctrica, es el ohm-centímetro (ohm • cm). Si se elige el ohm • cm para la medida de la resistividad, la correspondiente unidad para la conductividad se escribe $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$, u $(\text{ohm-cm})^{-1}$, llamada «ohm-cm recíproco». Debe subrayarse que estas Ecs. de la 10 a la 16 son válidas para cualquier sistema de unidades homogéneo.

En la Tabla 4.1 se dan las conductividades y resistividades de unos cuantos materiales en diferentes unidades. También se da el factor de conversión.

TABLA 4.1

Resistividad y su recíproco, conductividad, para ciertos materiales

Material	Resistividad ρ	Conductividad σ
Cobre puro, 273 K	$1{,}56 \times 10^{-6}$ ohm-cm $1{,}56 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m	$6{,}4 \times 10^{5}$ $(\text{ohm-cm})^{-1}$ $6{,}4 \times 10^{7}$ $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Cobre puro, 373 K	$2{,}24 \times 10^{-6}$ ohm-cm $2{,}24 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m	$4{,}5 \times 10^{5}$ $(\text{ohm-cm})^{-1}$ $4{,}5 \times 10^{7}$ $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Germanio puro, 273 K	200 ohm-cm $2\ \Omega \cdot$ m	0,005 $(\text{ohm-cm})^{-1}$ 0,5 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Germanio puro, 500 K	0,12 ohm-cm $1{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot$ m	8,3 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ 830 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Agua pura, 291 K	$2{,}5 \times 10^{7}$ ohm-cm $2{,}5 \times 10^{5}\ \Omega \cdot$ m	$4{,}0 \times 10^{-8}$ $(\text{ohm-cm})^{-1}$ 4×10^{-6} $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
Agua del mar (varía con la salinidad)	25 ohm-cm $0{,}25\ \Omega \cdot$ m	0,04 $(\text{ohm-cm})^{-1}$ 4 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$

Nota: 1 ohm-metro = 100 ohm-cm.

4.4 *La física de la conducción eléctrica*

Para explicar la conducción eléctrica debemos hablar primero de átomos y moléculas. Recordemos que un átomo neutro, el que contiene el mismo número de electrones que de protones en el núcleo, es *precisamente* neutro (Sección 1.3). En este caso, la fuerza resultante ejercida por un campo eléctrico es exactamente cero. E in-

cluso si el átomo neutro se moviese por cualquier otra causa, esto no sería una corriente eléctrica. Lo mismo se cumple para moléculas neutras. La materia que conste solamente de moléculas neutras debe tener conductividad eléctrica nula. Demos aquí unas condiciones: estamos considerando ahora corrientes eléctricas estacionariarias, es decir, corrientes *continuas,* no corrientes alternas. Un campo eléctrico alterno puede causar deformaciones periódicas en una molécula, y este desplazamiento de carga eléctrica sería una verdadera corriente eléctrica alterna. Volveremos a esto en el capítulo 10. Para una corriente estacionaria necesitamos portadores de carga móviles, o *iones.* Éstos deben estar presentes en el material antes de aplicar el campo eléctrico, pues los campos eléctricos que consideraremos no son suficientemente intensos para crear iones arrancando electrones de las moléculas. Así que la física de la conducción eléctrica se centra en dos cuestiones: ¿Cuántos iones hay en una unidad de volumen de material y cómo se mueven estos iones en presencia de un campo eléctrico?

En el agua pura y a la temperatura ambiente aproximadamente dos moléculas H_2O en mil millones están, en un instante dado, disociadas en iones negativos, OH^-, e iones positivos H^+. (Realmente el ion positivo se describe mejor por OH_3^+, es decir, un protón unido a una molécula de agua.) Esto proporciona aproximadamente $6 \cdot 10^{13}$ iones negativos y un número igual de iones positivos en un centímetro cúbico de agua*. El movimiento de estos iones en el campo eléctrico aplicado da cuenta de la conductividad del agua pura dada en la Tabla 4.1. Añadiendo una substancia tal como cloruro sódico, cuyas moléculas se disocian fácilmente en agua, puede incrementarse enormemente el número de iones. Esto explica por qué el agua de mar tiene conductividad eléctrica un millón de veces mayor que el agua pura. Contiene algo como 10^{20} iones por cm^3, la mayor parte Na^+ y Cl^-.

Un gas como el nitrógeno o el oxígeno a la temperatura ordinaria no tendría iones en absoluto, a no ser por la acción de ciertas radiaciones ionizantes como luz ultravioleta, rayos X, o radiación nuclear. Por ejemplo, la luz ultravioleta puede arrancar un electrón de una molécula de nitrógeno dejando N_2^+, un ion molecular con una carga positiva *e*. El electrón así liberado es un ion negativo. Puede permanecer libre o puede eventualmente fijarse a cierta molécula como un electrón «extra», formando así un ion negativo molecular. La molécula de oxígeno tiene una afinidad especialmente elevada para electrones extra; cuando el aire se ioniza, los iones típicos comunes son N_2^+ y O_2^-. En todo caso, la conductividad resultante del gas depende del número de iones presentes en cierto instante, que a su vez depende de la intensidad de la radiación ionizante y quizá de

* Los estudiantes de química pueden recordar que la concentración de iones hidrógeno en el agua pura corresponde a un pH de valor 7,0, que significa la concentración de $10^{-7,0}$ moles/litro. Esto equivale a $10^{-10,0}$ moles/cm^3. Un mol de algo es $6,02 \cdot 10^{23}$ cosas —de aquí el número $6 \cdot 10^{13}$ dado antes.

otras circunstancias. Así que no se puede tabular la conductividad de un gas. Estrictamente hablando, la conductividad del nitrógeno puro, apantallado de toda radiación ionizante, es nula*.

¿Dada una cierta concentración de iones positivos y negativos en un material, cómo se determina la conductividad resultante, σ de la Ec. 10? Consideremos primero un gas ligeramente ionizado. Para especificar, supongamos que su densidad, en moléculas por centímetro cúbico, es como la del aire a la temperatura ambiente —unas 10^{19} por cm^3. Entre las moléculas neutras hay iones positivos y negativos. Supongamos que haya N iones positivos por unidad de volumen, cada uno de masa M_+ y con carga e, y un número igual de iones negativos, cada uno con masa M_- y carga $-e$. El número de iones en la unidad de volumen, $2N$, es mucho menor que en el número de moléculas neutras. Cuando un ion choca con algo, casi siempre es con una molécula neutra y no con otro ion. Ocasionalmente un ion positivo encuentra un ion negativo y se combina con él para formar una molécula neutra. Tal recombinación** agotaría invariablemente la reserva de iones a no ser que se creasen continuamente por algún otro proceso. Pero en todo caso la velocidad de cambio de N será tan lenta que aquí podemos despreciarla.

Imaginemos el panorama a escala molecular antes de aplicar el campo. Las moléculas y también los iones están corriendo con velocidades al azar adecuadas a la temperatura. El gas es mayormente espacio vacío, la distancia media entre una molécula y su vecina más próxima es de unos 10 diámetros moleculares. El recorrido libre medio de una molécula, que es el valor medio de su recorrido antes de topar con otra molécula, es muy grande, tal vez 10^{-5} cm, o varios centenares de diámetros moleculares. Una molécula o un ion en este gas emplea el 99,9 por cien de su tiempo como partícula libre. Si contempláramos un ion particular en un instante determinado, sea $t = 0$, hallaríamos que se mueve en el espacio con cierta velocidad $\mathbf{u}$. ¿Qué ocurrirá luego? El ion se moverá en línea recta con celeridad constante hasta que, tarde o temprano, ocurre que llega tan cerca de una molécula para que entren en juego intensas fuerzas de corto alcance. En esta *colisión,* la energía cinética y la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos, molécula e ion, se conserva, pero la celeridad y la dirección de la trayectoria del ion variarán más bien bruscamente, dando lugar a una nueva velocidad $\mathbf{u}'$. Luego, se move-

* ¿Qué podemos decir de la energía térmica? ¿Ocasionará ésta la ionización de una molécula? En realidad, la energía necesaria para ionizar, es decir, para extraer un electrón de una molécula de nitrógeno es varios centenares de veces el valor medio de la energía térmica de una molécula a 300 K. No se esperaría hallar ningún ion producido así en toda la atmósfera terrestre.

** Llamando al proceso recombinación no deseamos implicar que los dos iones «recombinados» formasen pareja originalmente. Los encuentros próximos de un ion positivo y otro negativo se efectúan más probablemente por su atracción electrostática. Sin embargo, este efecto generalmente no es importante cuando el número de iones por unidad de volumen es mucho menor que el número de moléculas neutras.

rá libremente con su nueva velocidad hasta que una nueva colisión cambie su velocidad a $\mathbf{u}''$, y así sucesivamente. Después de unas cuantas colisiones tales el ion es tan probable que se mueva en una dirección como en otra. El ion ha «olvidado» la dirección en la que se movía para $t = 0$. Para presentarlo de otra manera, si escogemos 10 000 casos de iones moviéndose horizontalmente hacia el sur, y seguimos a cada uno de ellos durante τ segundos, las direcciones de su velocidad final estarán distribuidas imparcialmente sobre una esfera. Podemos tomar varias colisiones para borrar la memoria de la mayoría de direcciones o solamente unas pocas, dependiendo de que las colisiones en que intervengan variaciones grandes o pequeñas de cantidad de movimiento sean las más corrientes, y esto depende de la naturaleza de la interacción. Un caso extremo es la colisión de esferas elásticas duras, que da lugar a un «desorden» direccional completo en sólo una colisión. No necesitamos preocuparnos por estas diferencias. La cuestión es que, sea la que fuere la naturaleza de las colisiones, existirá *algún* invervalo de tiempo τ, característico del sistema dado, tal que el lapso de τ segundos conduzca a una pérdida substancial de *correlación* entre la dirección de la velocidad inicial y la de la final de un ion en este sistema*. Este tiempo característico τ dependerá del ion y de la naturaleza de su medio ambiente; será más corto para colisiones más frecuentes, ya que en nuestro gas nada ocurre a un ion entre colisiones.

Ahora estamos preparados para aplicar un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$ al sistema. Haremos la descripción más fácil si imaginamos que la pérdida de la memoria de la dirección ocurre completamente en una sola colisión, como hemos dicho que ocurre con esferas elásticas. Nuestra conclusión principal será realmente independiente de esta suposición. Inmediatamente después de una colisión un ion parte en una dirección al azar. Denotaremos por $\mathbf{u}^c$ la velocidad inmediatamente después de una colisión. La fuerza eléctrica $e\mathbf{E}$ sobre el ion, le comunica continuamente cantidad de movimiento. Al cabo de un tiempo t, por efecto del campo, la cantidad de movimiento se habrá incrementado en $\mathbf{E}et$, el cual se suma vectorialmente a su cantidad de movimiento inicial $M\mathbf{u}^c$. Su cantidad de movimiento ahora es $M\mathbf{u}^c + \mathbf{E}et$. Si el incremento de la cantidad de movimiento es pequeño frente a $M\mathbf{u}^c$, lo que implica que la velocidad no se ha afectado mucho, podemos esperar que la próxima colisión ocurra casi como en ausencia del campo eléctrico. En otras palabras, el valor medio del tiempo entre colisiones, que denotaremos por t, es independiente del campo $\mathbf{E}$ si el campo $\mathbf{E}$ no es muy intenso.

La cantidad de movimiento adquirida por efecto del campo es siempre un vector en la misma dirección. Pero éste se desorienta en

* Sería posible definir τ precisamente para cada sistema general, dando una medida cuantitativa de la correlación entre la dirección inicial y la final. Es un problema estadístico, como idear una medida de la correlación entre el peso de ratas recién nacidas y su peso en la edad madura. Sin embargo no necesitaremos una definición general cuantitativa para completar nuestro análisis.

cada colisión ya que la dirección del movimiento después de una colisión es al azar, prescindiendo de la dirección anterior.

¿Cuál es el promedio de las cantidades de movimiento de todos los iones positivos, en un instante dado? Esta pregunta se contesta muy fácilmente si la consideramos de esta forma: En el instante dado, supongamos que paramos el reloj y preguntamos a cada ion cuánto ha transcurrido desde su última colisión. Supongamos que obtenemos la contestación t_1 para el ion positivo 1. Entonces este ion debe poseer una cantidad de movimiento $e\mathbf{E}t_1$ *sumada* con la cantidad de movimiento $M\mathbf{u}_1^c$ con la que partió de su última colisión. El promedio de la cantidad de movimiento de todos los N iones positivos es por tanto

$$M\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{1}{N}\sum_j (M\mathbf{u}_j{}^c + e\mathbf{E}t_j) \qquad (17)$$

Aquí $\mathbf{u}_j^c$ es la velocidad que el ion j-ésimo tenía precisamente después de su última colisión. Estas velocidades $\mathbf{u}_j^c$ son completamente al azar en dirección y sentido y por lo tanto su contribución al promedio es nula. La segunda parte es simplemente $\mathbf{E}e$ veces el *valor medio de* t_j, es decir, del *promedio del tiempo desde la última colisión.* Debe coincidir con el promedio del tiempo para la *próxima* colisión, y ambas coinciden * con el valor medio del tiempo $\bar{t}$ entre colisiones. Deducimos que el valor medio de la velocidad de un ion positivo, en presencia del campo estacionario $\mathbf{E}$, es

$$\bar{\mathbf{u}}_+ = \frac{\mathbf{E}e\bar{t}_+}{M_+} \qquad (18)$$

Esto demuestra que el valor medio de la velocidad de un portador de carga es proporcional a la fuerza a él aplicada. Si observamos solamente la velocidad media, parece como si el medio ofreciese una resistencia al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad. Este tipo de resistencia al avance es el que se experimenta al agitar un jarabe denso con una cuchara, una resistencia « viscosa ». Siempre que los portadores de carga se comporten de este modo podemos esperar algo parecido a la ley de Ohm.

En la ecuación 18 hemos escrito $\bar{t}_+$ a causa de que el valor medio del tiempo entre colisiones puede ser bien distinto para iones positivos y negativos. Los iones negativos adquieren la velocidad en sentido

* Podría pensarse que el promedio de tiempo entre colisiones habría de ser igual a la *suma* del *valor medio del tiempo desde la última colisión* y del *valor medio del tiempo para la próxima.* Esto sería cierto si las colisiones tuvieran lugar a intervalos absolutamente regulares, pero no lo son. Son sucesos independientemente al azar, y para tales lo expresado anteriormente, paradójicamente, como puede parecer, al principio, es cierto. Reflexionemos acerca de ello. La cuestión no afecta a nuestra conclusión principal, pero si se aclara esto se habrá aumentado en conocimiento estadístico. (Sugerencia: Si una colisión no afecta la probabilidad de ocurrir otra —lo cual significa *independencia*— no importa si se para el reloj en un instante arbitrario o en el instante de una colisión.)

contrario, pero ya que transportan carga negativa su contribución a la densidad de corriente **J** se suma a la de las positivas. La ecuación equivalente a la Ec. 3.24, incluyendo las dos clases de iones, es ahora

$$\mathbf{J} = Ne\left(\frac{e\mathbf{E}\bar{t}_+}{M_+}\right) - Ne\left(\frac{-e\mathbf{E}\bar{t}_-}{M_-}\right) = Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)\mathbf{E} \quad (19)$$

Nuestra teoría predice que el sistema obedecerá a la ley de Ohm, pues la Ec. 19 expresa una relación lineal entre **J** y **E**, siendo las demás cantidades constantes características del medio. Comparemos la Ec. 19 con la Ec. 10'. La constante $Ne^2\left(\frac{\bar{t}_+}{M_+} + \frac{\bar{t}_-}{M_-}\right)$ se presenta en el papel de la conductividad σ.

Nosotros hacemos cierto número de hipótesis, tal vez particulares, acerca de este sistema, pero reflexionando, podemos ver que no son esenciales en lo concerniente a la relación lineal entre **J** y **E**. Todo sistema que contenga una densidad constante de portadores de carga libre, en los cuales el movimiento de los portadores está frecuentemente « re-desorientado » por colisiones u otras interacciones con el sistema, deben cumplir la ley de Ohm si el campo **E** no es demasiado intenso. La relación entre **J** y **E** que es la conductividad σ del sistema, será proporcional al número de portadores de carga y al tiempo característico τ, el tiempo para la pérdida de correlación en la dirección. Es *solamente* a través de esta última magnitud que todos los detalles complicados de las colisiones entran en el problema. El elaborar una teoría detallada de la conductividad de un sistema dado, suponiendo conocido el número de portadores de carga, representa elaborar una teoría para τ. En nuestro ejemplo particular esta cantidad se reemplazó por $\bar{t}$ y se predijo un resultado perfectamente definido para la conductividad σ. Introduciendo el valor más general τ, y también admitiendo la posibilidad de números distintos de portadores positivos o negativos, podemos resumir nuestra teoría como sigue:

$$\sigma \approx e^2\left[\frac{N_+\tau_+}{M_+} + \frac{N_-\tau_-}{M_-}\right] \quad (20)$$

Usamos el símbolo $\approx$ para reconocer que no damos a τ una definición precisa. Sin embargo, esto puede hacerse.

Para subrayar el hecho de que en la conducción eléctrica interviene ordinariamente sólo una ligera resistencia sistemática superpuesta al movimiento al azar, hemos dibujado la Fig. 4.7 como una visión microscópica artificial del tipo de sistema del que hemos estado hablando. Los iones positivos se representan por puntos blancos, los iones negativos por círculos. Podemos suponer que los últimos son electrones y de aquí, a causa de su pequeña masa, mucho más móviles que los iones positivos de manera que podemos despreciar el movimiento del conjunto de los positivos. En la Fig. 4.7*a* vemos una distribución totalmente al azar de las partículas y de las velocidades de los elec-

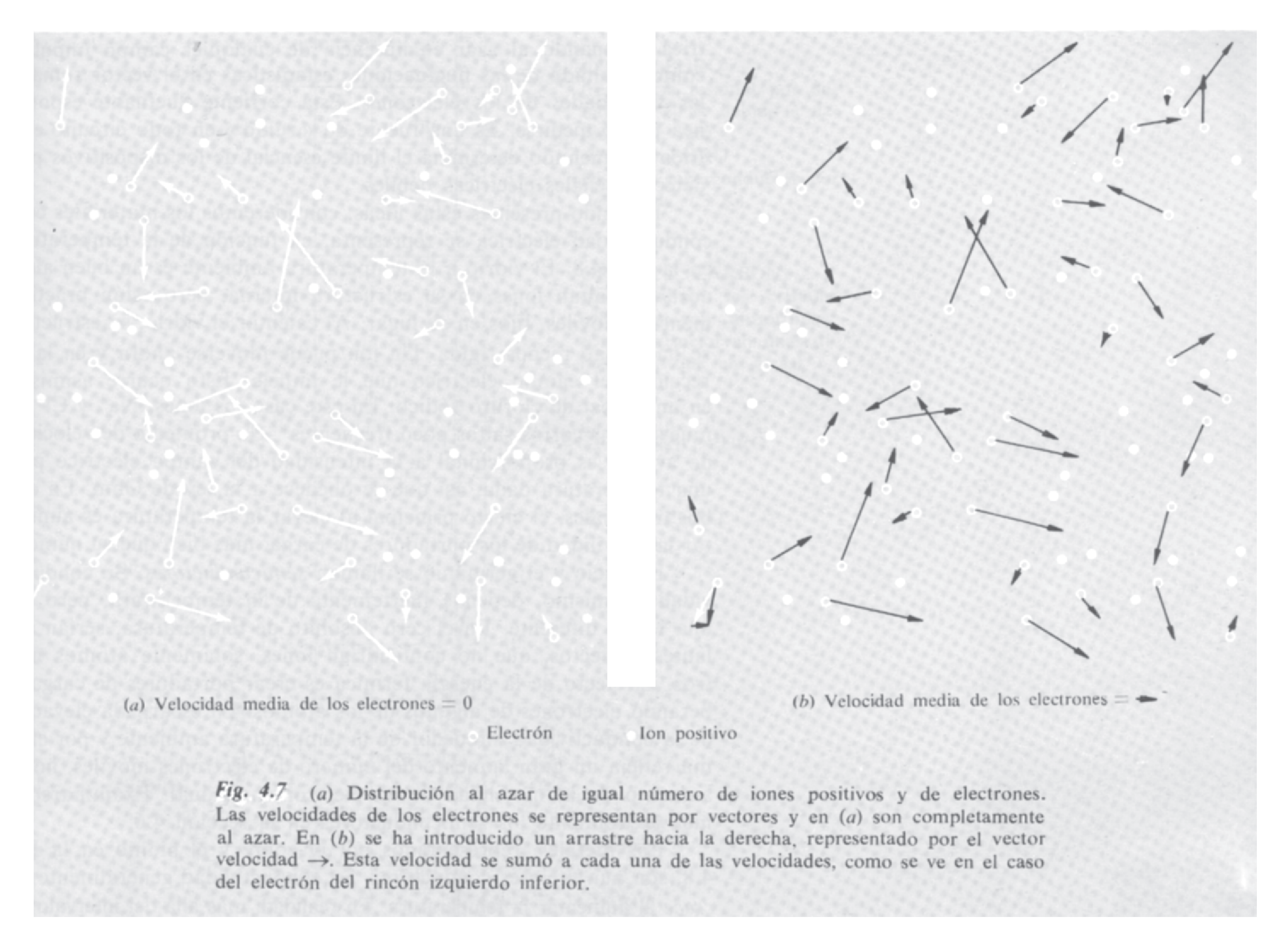


Fig. 4.7 (*a*) Distribución al azar de igual número de iones positivos y de electrones. Las velocidades de los electrones se representan por vectores y en (*a*) son completamente al azar. En (*b*) se ha introducido un arrastre hacia la derecha, representado por el vector velocidad →. Esta velocidad se sumó a cada una de las velocidades, como se ve en el caso del electrón del rincón izquierdo inferior.

trones. Para confeccionar el diagrama, la posición y signo de una partícula se determinaron con una tabla de números al azar. Los vectores velocidad de los electrones se dibujaron igualmente a partir de una distribución al azar, correspondiente a la distribución « Maxwelliana » de las velocidades moleculares en un gas. En la Fig. 4.7*b* hemos utilizado las mismas posiciones, pero ahora todas las velocidades tienen un pequeño incremento hacia la derecha. Es decir, la Figura 4.7*b* es la representación de un material ionizado en el cual existe un flujo resultante de carga negativa hacia la derecha, equivale a una corriente positiva hacia la izquierda. La Fig. 4.7*a* ilustra el caso en que el valor medio de la corriente es nulo.

Evidentemente no esperamos que el promedio real de las velocidades de los 46 electrones en la Fig. 4.7*a* sea exactamente nulo, pues son cantidades independientes estadísticamente. Un electrón no afecta al comportamiento de otro. En realidad existiría una corriente eléc-

trica fluctuando al azar en ausencia de cualquier campo impulsor, como resultado de las fluctuaciones estadísticas en el vector suma de las velocidades de los electrones. Esta corriente fluctuante espontánea puede medirse. Es una fuente de « ruido » en todo circuito eléctrico y a menudo determina el límite esencial de los dispositivos para detectar señales eléctricas débiles.

Teniendo presentes estas ideas, consideremos los materiales cuya conductividad eléctrica se representa, en función de la temperatura, en la Fig. 4.8. El vidrio a la temperatura ambiente es un buen aislador. No faltan iones en su estructura interna, pero están prácticamente inmóviles, fijos en su lugar. Al calentar el vidrio, su estructura se hace algo menos rígida. Un ion puede moverse ahora y en la dirección del campo eléctrico que le impele. Esto ocurre asimismo en un cristal de cloruro sódico. En este caso los iones, Na^+ y Cl^-, se mueven por cortos saltos poco frecuentes*. Su promedio de velocidad de avance es proporcional a la intensidad del campo eléctrico para una temperatura dada, así que se obedece a la ley de Ohm. En ambos materiales, el efecto principal al elevar la temperatura es aumentar la movilidad de los portadores de carga, más bien que su número.

El silicio y el germanio se llaman *semiconductores*. Su conductividad, asimismo, depende fuertemente de la temperatura, pero por una razón diferente. En el cero absoluto de temperatura, serían aislantes perfectos, que no contendrían iones, solamente átomos neutros. El efecto de la energía térmica es crear portadores de carga liberando electrones de algunos de los átomos. La escarpada elevación de la conductividad alrededor de la temperatura ambiente y por encima refleja un gran aumento del número de electrones móviles, no un aumento de la movilidad de un electrón individual. Examinaremos más atentamente los semiconductores en la sección 4.6.

Los metales, representados por el cobre y el plomo en la Fig. 4.8, son aún mejores conductores. Su conductividad generalmente *decrece* al aumentar la temperatura. En realidad, más allá del intervalo representado, la conductividad de un metal puro como el cobre o el plomo es inversamente proporcional a la temperatura absoluta, como puede comprobarse por los 45° de pendiente de nuestra curva logarítmica. Continuando este comportamiento, al enfriar el cobre o el plomo hacia el cero absoluto podríamos esperar un enorme aumento de la conductividad. A 0,001 K, una temperatura que se puede alcanzar en el laboratorio, esperaríamos que la conductividad de cada metal se elevase a 300 000 veces su valor a la temperatura ambiente. En el caso del cobre, por debajo de unos 20 K, su conductividad cesa de aumentar y permanece constante de ahí hacia abajo. Intentaremos explicar esto en la próxima sección. En el caso del plomo, normalmente algo peor conductor que el cobre, ocurre algo más sorprendente. Cuando un hilo de plomo se enfría por debajo de 7,2 K, su resis-

* Esto implica cierto quebrantamiento de la disposición perfectamente ordenada de los iones representados en la Fig. 1.7.

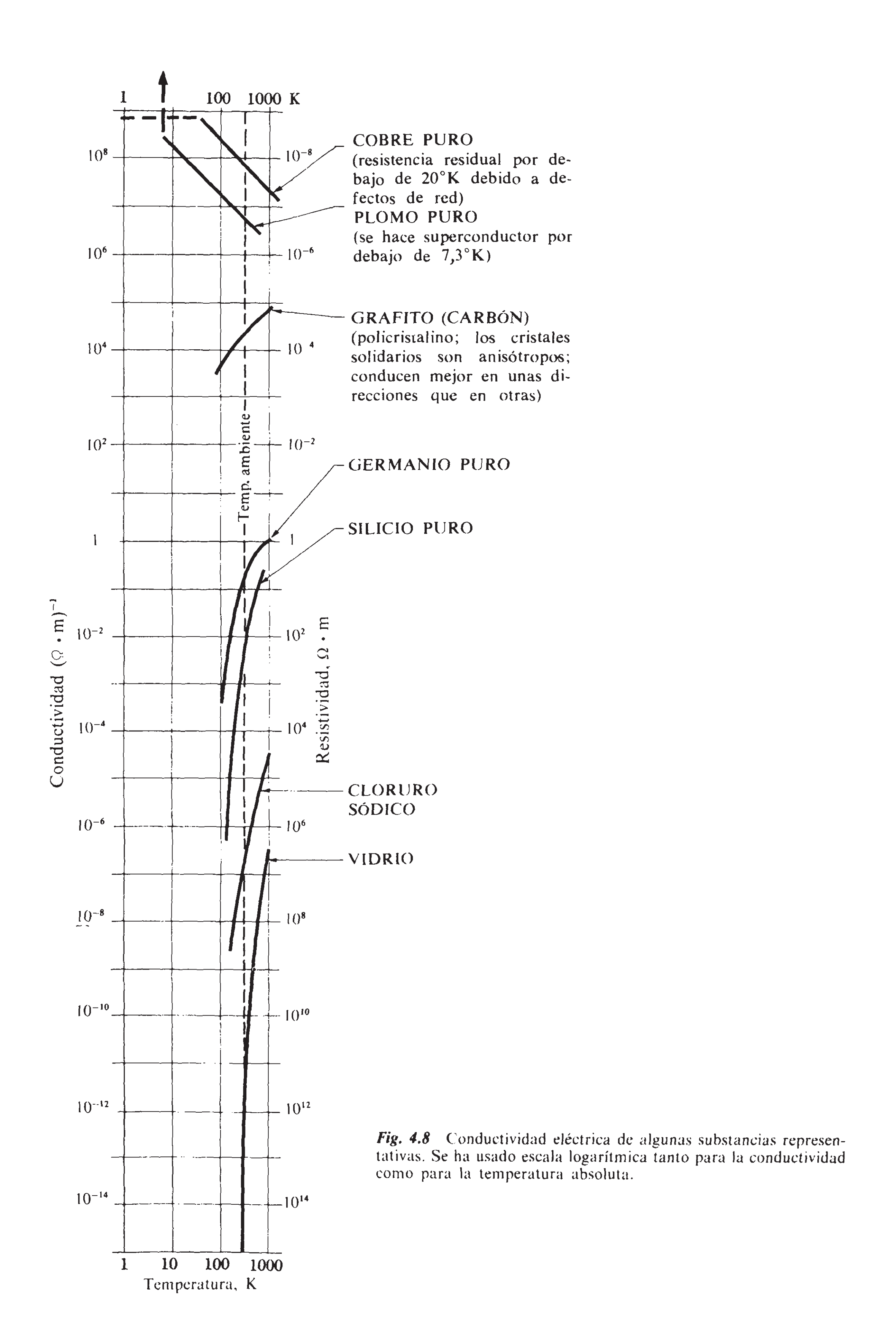


Fig. 4.8 Conductividad eléctrica de algunas substancias representativas. Se ha usado escala logarítmica tanto para la conductividad como para la temperatura absoluta.

tencia se *anula* brusca y completamente. El metal se convierte en *superconductor*. Esto significa, entre otras cosas, que una corriente eléctrica, una vez establecida en un circuito de hilo de plomo, continuará circulando indefinidamente (incluso durante años) sin ningún campo eléctrico que la impulse. Puede decirse que la conductividad es infinita, aunque el concepto realmente pierde su significado en el estado superconductor. Calentada por encima de 7,2 K el hilo de plomo recobra su resistencia normal tan bruscamente como la había perdido. Muchos metales pueden convertirse en superconductores, incluyendo más de 20 elementos y numerosos compuestos metálicos. La temperatura a la que ocurre la transición del estado normal al superconductor depende del material. La temperatura de transición más elevada observada hasta ahora es de 21 K.

Nuestro modelo de iones acelerados por el campo eléctrico, su avance impedido continuamente por los choques, aquí nos falla totalmente. De algún modo, en el estado superconductor todo impedimento al movimiento de los electrones ha desaparecido. Es más, los efectos magnéticos se manifiestan en el superconductor profundos y misteriosos. Ahora no podemos describir completamente los fenómenos de la superconductividad, cuanto más explicarlos. En el Apéndice se insistirá, lo que será más comprensible después de nuestro estudio del magnetismo.

Aparte de la superconductividad, todos estos materiales obedecen a la ley de Ohm. Duplicando el campo eléctrico se duplica la corriente si las demás condiciones, incluyendo la temperatura, se mantienen constantes. Al menos esto es cierto si el campo no es demasiado intenso. Es fácil ver cómo la ley de Ohm puede fallar en el caso de un gas parcialmente ionizado. Supongamos que el campo eléctrico es lo suficiente intenso para que la velocidad adicional que adquiere un electrón entre choques sea comparable a su velocidad térmica. Entonces el tiempo entre choques será más corto que el que empleaba antes de aplicar el campo, un efecto no incluido en nuestra teoría, y tal que ocasionará que la conductividad observada dependa de la intensidad del campo eléctrico.

Un derrumbamiento más espectacular de la ley de Ohm tiene lugar cuando el campo eléctrico aumenta de nuevo hasta que un electrón gana suficiente energía entre colisiones que al incidir sobre un átomo neutro puede topar con otro electrón suelto. Los dos electrones aún pueden desprender más electrones de la misma manera. La ionización aumenta explosivamente, haciendo rápidamente un camino conductor entre los electrodos. Esto es, una *chispa*. Esto es lo que ocurre cuando actúan las bujías, y lo que sucede al tocar un picaporte después de pasar los pies por el felpudo en un día seco. Siempre hay unos cuantos electrones en el aire, liberados por los rayos cósmicos, o de otro modo. Ya que un electrón es suficiente para desencadenar una chispa, esto presenta un límite práctico a la intensidad de un campo eléctrico que puede mantenerse en un gas. El aire a la presión atmosférica permite la chispa a unos 30 kilovolts/cm o 3 MV/m. En un gas a baja presión, donde el recorrido medio de un electrón es largo, como

en el interior de una lámpara fluorescente ordinaria, puede mantenerse una corriente estacionaria con un campo modesto, con ionización por el impacto de electrones que tiene lugar a velocidad constante. La física es verdaderamente compleja y el comportamiento lejos de ser óhmico.

4.5 Conducción en los metales

La elevada conductividad de los metales se debe a los electrones de su interior que no pueden adscribirse a los átomos, sino que están libres para moverse a través de todo el sólido. La prueba de esto está en el hecho de que la corriente eléctrica en un hilo de cobre —al revés de la corriente en una solución iónica— no transporta substancia químicamente identificable. Una corriente puede circular estacionaria durante años sin causar el más ligero cambio en el hilo. Solamente pueden ser los electrones los que entran en el hilo por un extremo y salen por el otro.

Sabemos por la química que los átomos de los elementos metálicos pueden perder fácilmente sus electrones más externos*. Éstos estarían ligados al átomo si estuviese aislado, pero se convierten en libres cuando muchos de tales átomos se colocan próximos en un sólido. Los átomos así se convierten en iones positivos, y estos iones positivos forman la red rígida del metal sólido, generalmente en una distribución ordenada. Los electrones libres, que llamaremos electrones de conducción, se mueven a través de esta red tridimensional de iones positivos.

El número de electrones de conducción es grande. El metal sodio, por ejemplo, contiene $2{,}5 \cdot 10^{28}$ átomos en 1 m^3, y cada uno de los átomos proporciona un electrón de conducción. No es extraño que el sodio sea un buen conductor. Pero esperemos, aquí hay un profundo enigma. Aparece al aplicar nuestra teoría simple de la conducción a este caso. Como hemos visto, la movilidad de un portador de carga está determinada esencialmente por el tiempo τ, en el que puede acumular cantidad de movimiento dirigida, a partir del campo eléctrico aplicado. Esto es cierto siempre que el proceso pueda proseguirse. Si consideramos que el número de portadores de carga en el sodio es uno por átomo, y que éstos son electrones de masa m_e, necesitamos solamente la medida experimental de la conductividad del sodio para calcular τ. La conductividad σ del socio a la temperatura ambiente es $2{,}1 \cdot 10^8\ (\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$. De la Ec. 20, omitiendo totalmente los portadores positivos, hallamos

$$\tau_- = \frac{\sigma m_{e-}}{N_- e^2} = \frac{(1{,}9 \times 10^{17}) \times (9 \times 10^{-28})}{(2{,}5 \times 10^{22}) \times (23 \times 10^{-20})} \approx 3 \times 10^{-14} \text{ seg} \qquad (19)$$

* Esto incluso podría tomarse como la propiedad que define un elemento metálico, haciendo algo tautológica la expresión de que los metales son buenos conductores.

Parece un tiempo sorprendentemente largo para un electrón que se mueve a lo largo de una red cristalina sin sufrir desviaciones importantes. La velocidad térmica de un electrón a la temperatura ambiente, según la teoría cinética, debe ser de unos 10^5 m/seg, y el electrón en este tiempo recorrería una distancia de $3 \cdot 10^{-9}$ m. Ahora bien, los iones en un cristal de sodio prácticamente se están tocando unos a otros. Los centros de los iones adyacentes están separados solamente $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ m, con intensos campos eléctricos y muchos electrones ligados que llenan la mayoría del espacio que interviene. ¿Cómo puede un electrón atravesar casi 10 veces el espacio de la red a través de estos obstáculos sin desviarse? ¿Por qué la red de iones es tan *fácilmente permeable* a los electrones de conducción?

Este enigma desconcertó a los físicos hasta que el *aspecto ondulatorio* del movimiento de los electrones se admitió y explicó por la mecánica cuántica. Aquí solamente podemos insinuar acerca de la naturaleza de la explicación. Es algo como esto. Ahora no consideremos que el electrón es una partícula minúscula cargada que se desvía por cualquier campo eléctrico que encuentre. *No está localizada* en este sentido. Se comporta más como una onda esparcida interactuando, en todo momento, con una región mayor del cristal. Lo que interrumpe el progreso de esta onda a través del cristal no es la disposición regular de los iones, aunque sea densa, sino una *irregularidad* en la distribución. (Una onda luminosa propagándose a través del agua puede difractarse por una burbuja o una partícula suspendida, pero no por la misma agua; la analogía tiene cierta validez). En un cristal geométricamente perfecto y sin defectos, la onda electrónica nunca se difractaría, o lo que es lo mismo el electrón nunca sería desviado; nuestro tiempo τ sería infinito. Pero los cristales reales son imperfectos al menos de dos maneras. En primer lugar, hay una vibración térmica aleatoria de los iones, lo que hace la red, en cualquier instante, irregular geométricamente, y tanto más cuanto mayor es la temperatura. Este efecto es el que hace que la conductividad de un metal puro *disminuya* al aumentar la temperatura. Lo vemos en las porciones inclinadas de la gráfica de la σ para el cobre y el plomo puros en la Fig. 4.8. Un cristal real puede tener irregularidades, además, en forma de átomos extraños o impurezas, y defectos de red (grietas en el apilamiento de la distribución atómica). La difracción por estas irregularidades limita el tiempo libre τ sea cual fuere la temperatura. Tales defectos son responsables de la resistividad residual independiente de la temperatura que se ve en la gráfica para el cobre, en la Fig. 4.8.

En la mayoría de metales se cumple la ley de Ohm, con gran precisión, hasta densidades de corriente mucho más elevadas que las que pueden mantenerse prolongadamente. No se ha demostrado experimentalmente y de manera clara, que se produzcan desviaciones. Según una predicción teórica, deben esperarse desviaciones del uno por cien para una densidad de corriente de 10^9 amp/cm^2. Es decir, aproximadamente un millón de veces la densidad de corriente que se halla habitualmente en los hilos de los circuitos.

4.6 Semiconductores

En un cristal de silicio cada átomo tiene cuatro vecinos cercanos. La disposición tridimensional de los átomos se ve en la Fig. 4.9. Ahora bien, el silicio, como el carbono que está directamente encima en la tabla periódica, tiene cuatro electrones de valencia, justo el número necesario para formar con un par de electrones compartidos cada enlace entre vecinos —un enlace covalente como se dice en química. Esta pulcra disposición forma una estructura completamente rígida. En realidad, es la manera como se distribuyen los átomos de carbono en el diamente, la substancia más dura conocida. Con estos enlaces intactos, el cristal de silicio es un aislante perfecto; no hay electrones móviles. Pero imaginemos que podamos extraer un electrón de uno de estos pares enlazados y moverlo unos cuantos centenares de espacios en la red de este cristal. Abandonaríamos una carga positiva neta en el lugar de la extracción y nos daría un electrón liberado. También costaría cierta cantidad de energía. Trataremos la cuestión de la energía dentro de poco. Pero primero notemos que hemos creado *dos* cargas móviles, no precisamente una. El electrón libre es móvil. Puede moverse como un electrón de conducción en un metal, y está como errático, no netamente localizado. Al estado cuántico que ocupa le llamamos estado en la *banda de conducción.* La carga positiva que deja detrás también es móvil. Si la con-

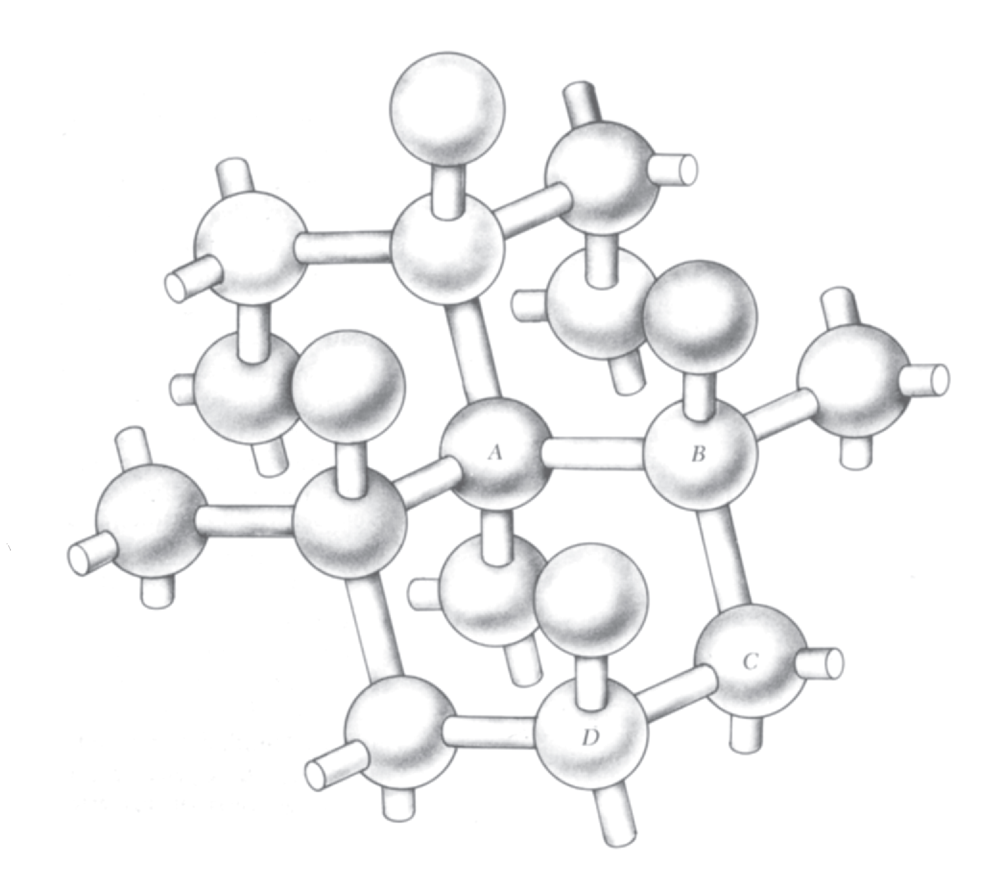


Fig. 4.9 Estructura del cristal de silicio. Las esferas son átomos de Si. Una varilla representa un enlace covalente entre átomos vecinos formado con un par de electrones compartidos. Esto requiere cuatro electrones de valencia por átomo. El diamante tiene esta estructura, y también el germanio.

sideramos como un electrón omitido en el enlace entre los átomos *A* y *B* en la Fig. 4.9, vemos que este vacío entre los electrones de valencia se transferiría al enlace entre *B* y *C*, luego al enlace entre *C* y *D* y así sucesivamente, justamente transfiriendo electrones de un enlace al otro. Realmente, el movimiento del hueco, como le llamaremos de ahora en adelante, es incluso más libre que lo que esto podría sugerir. Se desliza a través de la red como un electrón de conducción. La diferencia es que es una carga *positiva.* Un campo eléctrico **E** acelera el hueco en el sentido de **E**, no al contrario. El hueco actúa como si tuviese una masa comparable a la del electrón.Esto es realmente más bien misterioso, pues el movimiento del hueco es el resultado del movimiento colectivo de muchos electrones de valencia*. Sin embargo, y afortunadamente, actúa como una partícula real positiva que podemos imaginar como tal de ahora en adelante.

La energía mínima necesaria para extraer un electrón del estado de valencia, en el silicio, y dejarla en la banda de conducción es de $1{,}8 \cdot 10^{-19}$ J, o bien 1,12 electrón-volt (eV). (Un electrón-volt es el trabajo efectuado al desplazar una carga electrónica a través de una diferencia de potencial de un volt.) Éste es el ***intervalo energético*** entre dos bandas de estados posibles, la banda de valencia y la de conducción. No existen estados de energía intermedia para el electrón. Este intervalo de energía está representado en la Fig. 4.10. Dos electrones nunca pueden tener el mismo estado cuántico —ésta es una ley fundamental de la física. Los estados por encima del escalón de energía deben por tanto estar ocupados hasta en el cero absoluto. Da la casualidad que hay exactamente suficientes estados en la banda de valencia para acomodar a todos los electrones. Para $T = 0$, como se indica en la Fig. 4.10*a*, *todos* estos estados de valencia están ocupados, y *ninguno* de los estados de la banda de conducción.

Si la temperatura es lo suficientemente elevada, la energía térmica puede elevar algunos electrones desde la banda de valencia a la banda de conducción. El efecto de la temperatura sobre la probabilidad del estado que ocupará el electrón está expresada por el factor exponencial $e^{-\Delta E/kT}$, llamado factor de Boltzmann. Supongamos que dos estados, denotados por 1 y 2, están dispuestos para la ocupación por un electrón y que la energía del electrón en el estado 1 sea E_1, mientras que en el estado 2 es E_2. Sea p_1 la probabilidad de que el electrón se halle ocupando el estado 1, p_2 la probabilidad de que se encuentre en el estado 2. En un sistema en equilibrio térmico a la temperatura T la relación p_2/p_1 solamente depende de la *diferencia* de energías, $\Delta E = E_2 - E_1$. Ésta vale

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\Delta E/kT} \tag{21}$$

*Este misterio *no* se explica, como se hace a veces, trazando una analogía con una burbuja en un líquido. Al centrifugar el líquido las burbujas irían hacia el eje; los huecos de los que estamos hablando irían hacia fuera. Una expresión críptica pero cierta, que solamente hace inteligible la mecánica cuántica, es ésta: El hueco se comporta dinámicamente como una carga positiva con masa positiva debido a que es un vacío en estados con carga y masa negativas.

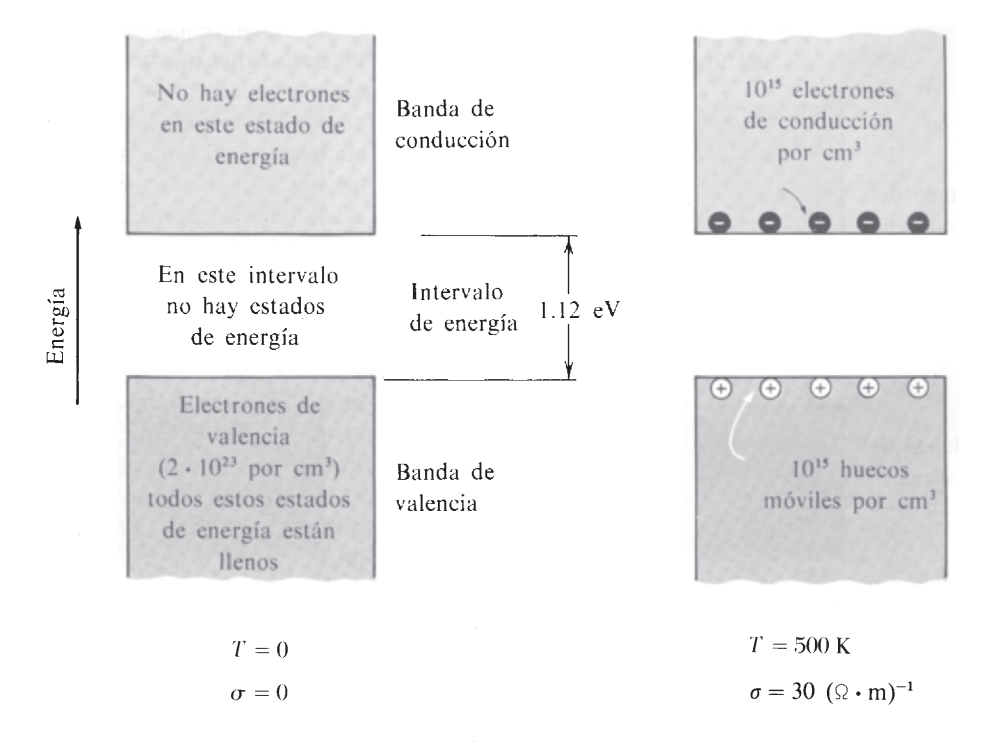


Fig. 4.10 Representación esquemática de las bandas de energía en el silicio, con todos los posibles estados para los electrones, dispuestos por orden de energía. Dos electrones no pueden tener el mismo estado. A la temperatura cero la banda de valencia está llena; un electrón ocupa cada estado disponible. La banda de conducción está vacía. Para $T = 500$ K hay 10^{15} electrones en el estado más bajo de la banda de conducción, dejando 10^{15} huecos en la banda de valencia, en 1 cm^3 de cristal.

La constante k, constante de Boltzmann, tiene el valor $1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/kelvin, o $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ joule/kelvin. Esta relación se cumple para dos estados cualesquiera. Rige la población de estados disponibles en el escalón de energía. Para predecir el número de electrones resultantes en la banda de conducción a una temperatura dada tendríamos que conocer más acerca del número de estados disponibles. Esto demuestra por qué el número de electrones de conducción por unidad de volumen depende tan fuertemente de la temperatura. Para $T = 300$ K la energía kT es de unos 0,025 eV. El factor de Boltzmann que relaciona los estados separados 1 eV de energía sería e^{-40}, ó 4×10^{-18}. En el silicio, a la temperatura ambiente, el número de electrones en la banda de conducción, por metro cúbico, es aproximadamente 10^{16}. A 500 K se encuentran unos 10^{21} electrones por m^3 en la banda de conducción, y el mismo número de huecos en la banda de valencia (Fig. 4.10*b*). Ambos, huecos y electrones, contribuyen a la conductividad, la cual es de 30 $(\Omega \cdot m)^{-1}$ a esta temperatura. El germanio se comporta como el silicio, pero el escalón de energía es algo menor, 0,7 eV. A una temperatura dada tiene más electrones de conducción y más huecos que el silicio, y en consecuencia mayor conductividad, como se evidencia en la Fig. 4.8. El diamante sería un semiconductor, asimismo, si su intervalo de energía no fuese tan grande (5,5 eV) que no hay electrones en la banda de conducción a cualquier temperatura alcanzable.

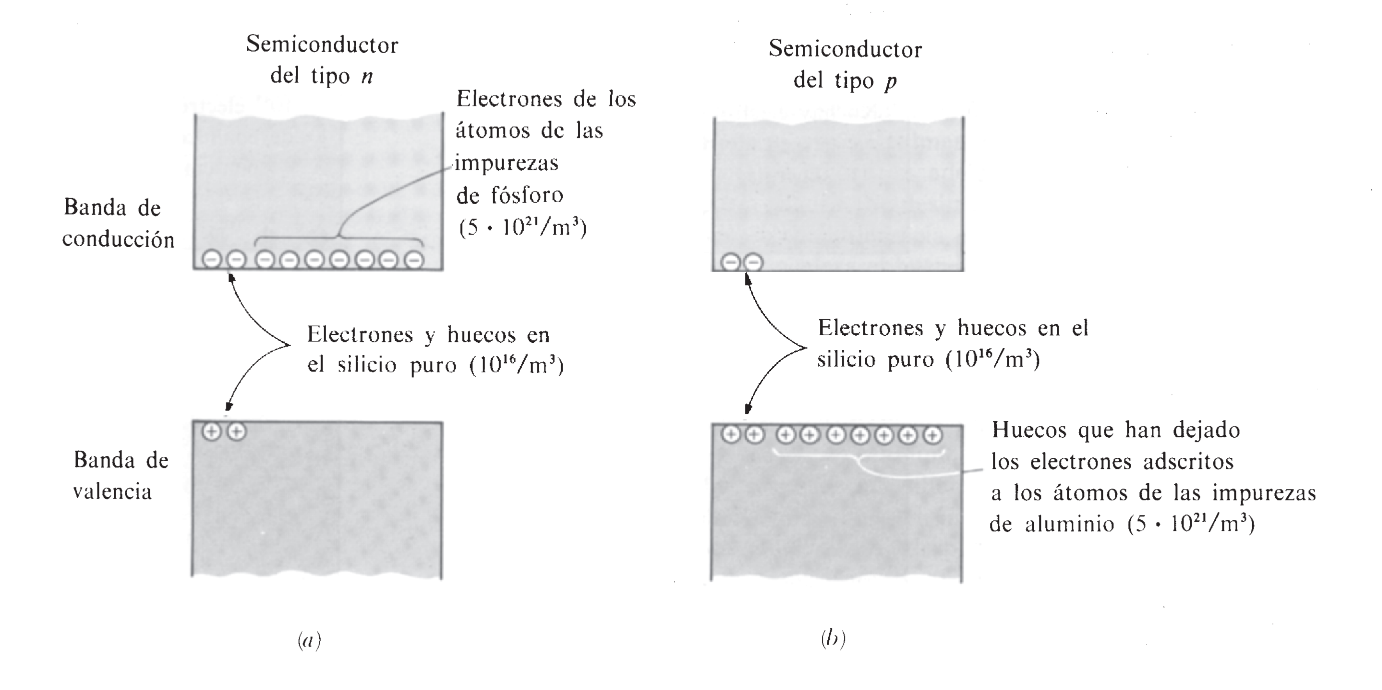


Figura 4.11 En un semiconductor tipo *n* la mayoría de los portadores de carga son electrones liberados de los átomos de las impurezas pentavalentes tales como el fósforo. En el semiconductor tipo *p* la mayoría de los portadores de carga son huecos. Se crea un hueco cuando un átomo de una impureza trivalente como el aluminio toma un electrón para completar los enlaces covalentes de sus cuatro vecinos de silicio. Existen unos pocos portadores de signo contrario en cada caso, como los que habría en un cristal de silicio puro a la misma temperatura. Los números de las densidades en los corchetes de nuestro ejemplo se refieren a $5 \cdot 10^{21}$ átomos de impurezas por m^3, y a la temperatura ambiente. Bajo estas condiciones el número de los portadores de carga mayoritarios es prácticamente igual al número de átomos de impurezas, mientras que el número de portadores minoritarios es *muchísimo* más pequeño.

Solamente con 10^{16} electrones de conducción y huecos por metro cúbico, el cristal de silicio a la temperatura ambiente es prácticamente un aislante. Pero esto puede cambiar extraordinariamente insertanto átomos extraños en la red del silicio puro. Esta es la base de todos los maravillosos dispositivos de la electrónica de los semiconductores. Supongamos que una fracción muy pequeña de átomos de silicio —por ejemplo, 1 en 10^7— se sustituyen por átomos de fósforo. (Este «dopado» del silicio puede efectuarse de distintas maneras.) Los átomos de fósforo, de los cuales ahora hay unos $5 \cdot 10^{21}$ por m^3, ocupan puestos regulares en la red del silicio. Un átomo de fósforo tiene cinco electrones de valencia, uno de sobra para la estructura de cuatro enlaces del cristal perfecto de silicio. El electrón extra fácilmente queda suelto. Solamente se necesitan 0,044 eV de energía para empujarlo a la banda de conducción. Lo que deja detrás en este caso no es un hueco móvil, sino un ion de fósforo positivo e inmóvil. Ahora tenemos unos $5 \cdot 10^{21}$ electrones móviles en la banda de conducción, y una conductividad de cerca de 100 (ohm-m)$^{-1}$. Además hay muy pocos huecos, el número que habría en el cristal puro a la temperatura ambiente. Debido a que casi todos los portadores de carga son *negativos* llamamos a este cristal «con impurezas de fósforo» *semiconductor tipo n* (Fig. 4.11*a*).

Ahora vamos a dopar un cristal puro de silicio con impurezas de aluminio. El átomo de aluminio tiene tres electrones de valencia, le falta uno para construir cuatro enlaces covalentes en torno a su lugar en la red. Esto se arregla fácilmente si uno de los electrones de valencia regulares se une permanentemente al átomo de aluminio, com-

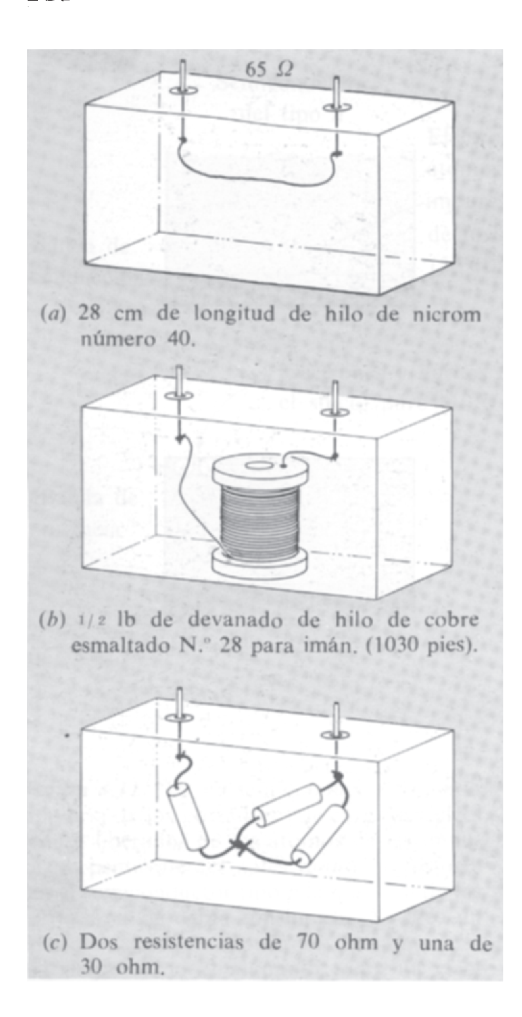
pletando los enlaces en torno a él. El coste de energía es solamente de 0,05 eV, mucho menos que los 1,2 eV necesarios para elevar un electrón de valencia a la banda de conducción. Este ascenso crea un vacío en la banda de valencia, un hueco móvil, y hacen del átomo de aluminio un ion fijo negativo. Gracias a los huecos así creados —a la temperatura ambiente casi en el mismo número que los átomos de aluminio añadidos— el cristal se convierte en un conductor mucho mejor. Por supuesto que también hay unos pocos electrones en la banda de conducción, como los que habría en el silicio puro sin dopar, a la misma temperatura. Pero la abrumadora mayoría de portadores de carga móviles son positivos, y a este material le llamamos *semiconductor tipo p.* Fig. 4.11*b*).

Una vez establecido el número de portadores de carga móviles, sean electrones o huecos o ambos, la conductividad depende de su movilidad, que está limitada, como en la conducción metálica, por la difracción en el interior del cristal. Un simple semiconductor homogéneo obedece a la ley de Ohm. El comportamiento espectacular no ohmico de los dispositivos semiconductores— como un rectificador o un transistor— se logra combinando material del tipo p con material del tipo n en diversas disposiciones.

4.7 *Circuitos y elementos de circuito*

Los dispositivos eléctricos, ordinariamente, tienen terminales bien definidos a los cuales pueden conectarse los hilos. La carga puede circular hacia el interior o el exterior por estos caminos. En particular, si se conectan dos terminales, y solamente dos, por medio de hilos a cualquier cosa exterior, y si la corriente es estacionaria con potenciales constantes en todas partes, entonces evidentemente la corriente debe ser igual y opuesta en los dos terminales *. En este caso podemos hablar de la corriente I que circula por el dispositivo, y del voltaje V « entre los terminales » o « a través de los terminales », que significa la diferencia de sus potenciales eléctricos. La relación V/I para una corriente de intensidad dada I es un cierto número de unidades de resistencia (ohm si V viene dado en volt e I en amper). Si la ley de Ohm se cumple en todo lugar del objeto a través del cual circula la corriente, dicho número será constante independiente de la corriente. Este número define completamente el comportamiento eléctrico del objeto, para flujo estacionario de corriente (« cc ») entre los terminales dados. Con estas notas, tal vez evidentes, introducimos una idea simple, la noción de un *elemento de circuito.*

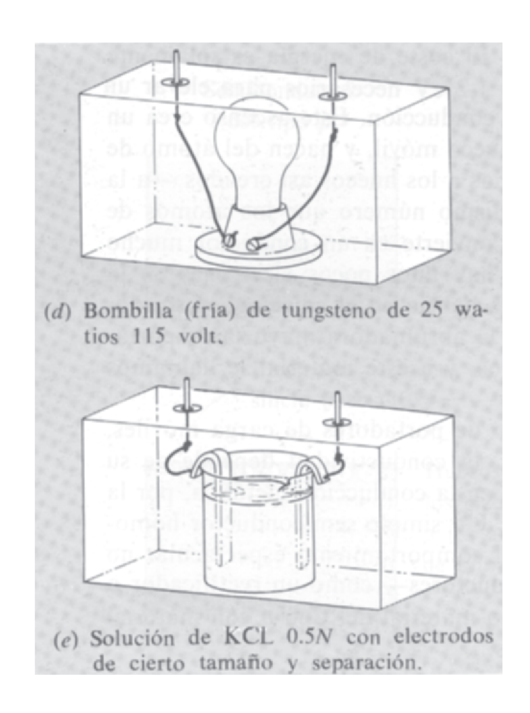
* Es perfectamente posible tener circulando 4 amper entrando por un terminal de un objeto de dos terminales y saliendo 3 amper por el otro terminal. Pero entonces el objeto acumula carga positiva a razón de 1 C/s. Su potencial debe variar muy rápidamente— y esto no puede durar mucho. De aquí que esto no pueda ser una corriente *estacionaria,* o independiente del tiempo.



(*a*) 28 cm de longitud de hilo de nicrom número 40.

(*b*) 1/2 lb de devanado de hilo de cobre esmaltado N.° 28 para imán. (1030 pies).

(*c*) Dos resistencias de 70 ohm y una de 30 ohm.



(*d*) Bombilla (fría) de tungsteno de 25 watios 115 volt.

(*e*) Solución de KCL 0.5*N* con electrodos de cierto tamaño y separación.

Fig. 4.12 Distintos dispositivos que, en corriente continua, equivalen a una resistencia de 65 ohm.

Consideremos las cinco cajas de la Fig. 4.12. Cada una tiene dos terminales, y dentro de cada una de ellas hay una cosa distinta. Si a una cualquiera de estas cajas se la hace formar parte de un circuito eléctrico, conectando hilos a los terminales, la relación de la diferencia de potencial entre los terminales a la corriente que circula en el hilo que se ha conectado al terminal, resulta ser de 65 ohm. Decimos que la resistencia entre los terminales, en cada caja, es de 65 ohm. Esta afirmación seguramente no sería cierta para todos los valores imaginables de la corriente o de la diferencia de potencial. Al aumentar la diferencia de potencial o *voltaje* entre los terminales, pueden ocurrir varias cosas, primero en algunas cajas que en otras, para variar la relación *voltaje/corriente*. Puede adivinarse en qué cajas se producirá la discrepancia en primer lugar. Sin embargo, existe cierto límite por debajo del cual todas se comportan linealmente, y dentro de este margen, para corrientes *estacionarias*, las cajas son equivalentes. Son equivalentes en este sentido: si cierto circuito contiene una de estas cajas, el comportamiento del circuito no difiere según cuál sea la caja

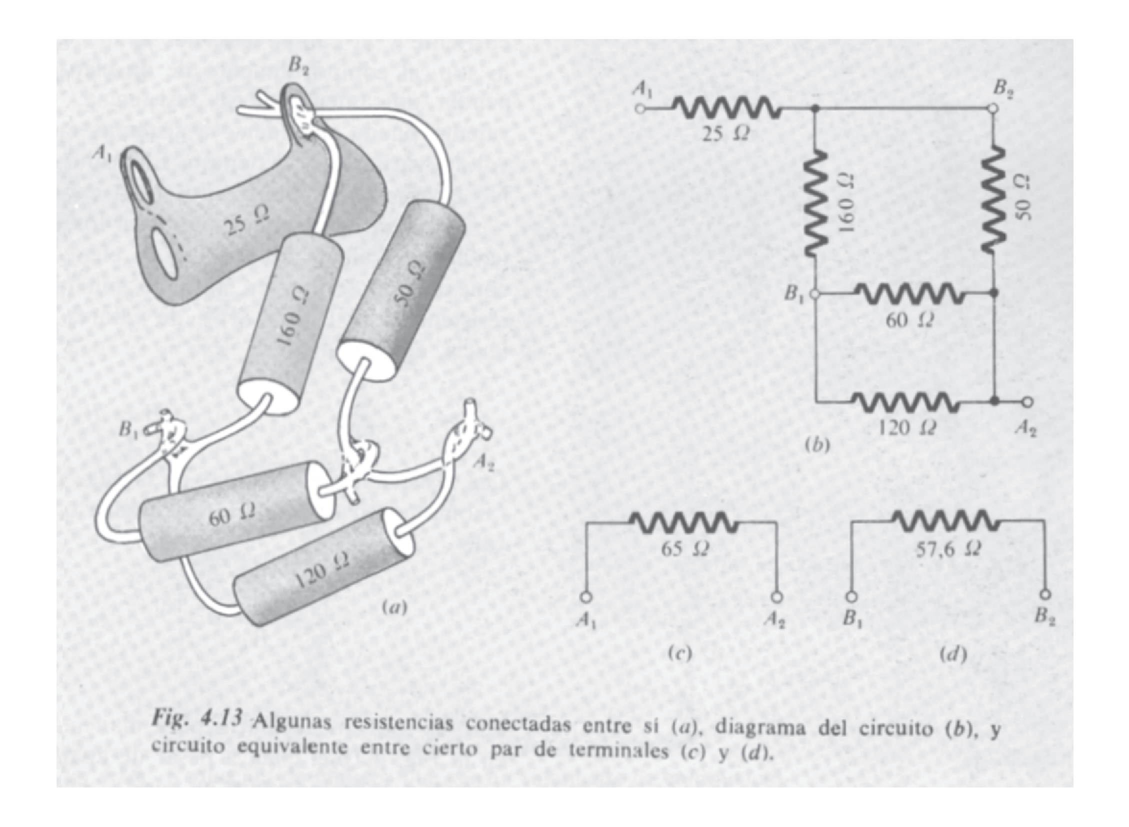


Fig. 4.13 Algunas resistencias conectadas entre sí (*a*), diagrama del circuito (*b*), y circuito equivalente entre cierto par de terminales (*c*) y (*d*).

elegida entre las citadas. La caja equivale a una resistencia de 65 ohm*. La representaremos por el símbolo -WW- y reemplaza a la caja en el diseño del circuito del cual es uno de los componentes. Un circuito eléctrico o una red es una agrupación de tales elementos de circuito, unidos uno a otro por conductores de resistencia despreciable.

Tomando una red constituida por algunos elementos conectados entre sí y eligiendo dos puntos como terminales, podemos considerar que el conjunto es equivalente, en lo que se refiere a estos terminales, a una sola resistencia. Decimos que la red física de objetos de la Figura 4.13*a* está representada por el diagrama de la Fig. 4.13*b* y para los terminales A_1A_2 el circuito equivalente es la Fig. 4.13*c*. El circuito equivalente para los terminales B_1B_2 está indicado en la Fig. 4.13*d*. Si suponemos este conjunto dentro de una caja con este par de terminales únicamente accesibles, no se podría distinguir de una resistencia de 57,6 ohm. Esta es una regla muy importante — pero solamente

* Usamos el término resistencia para el objeto diseñado especialmente para tal función. Así una «resistencia bobinada de 200 ohm, 10 watt» es un dispositivo que consiste en una bobina de hilo sobre cierta base aislante, con terminales, designada a utilizarse de tal forma que la potencia media disipada por ella no sea superior a 10 watt.

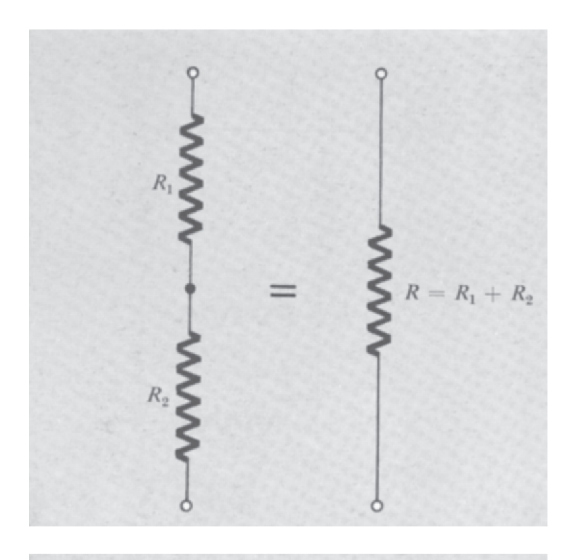


Fig. 4.14 Resistencias en serie.

para medidas en *corriente continua*. Todo lo dicho depende de que la corriente y el campo eléctrico sean constantes con el tiempo; si no lo son, el comportamiento de un elemento de circuito no puede depender únicamente de su resistencia. El concepto de circuito equivalente puede extenderse a sistemas en los cuales la intensidad y el voltaje varían con el tiempo. En realidad, es donde es más estimable. No estamos bien preparados para explorar este dominio.

Emplearemos poco tiempo en los métodos de cálculo de la resistencia equivalente de una red de elementos de circuito. Los casos de conexión en serie y en paralelo son fáciles. La conexión de las dos resistencias en la Fig. 4.14, de valores R_1 y R_2, es en serie. La resistencia equivalente es

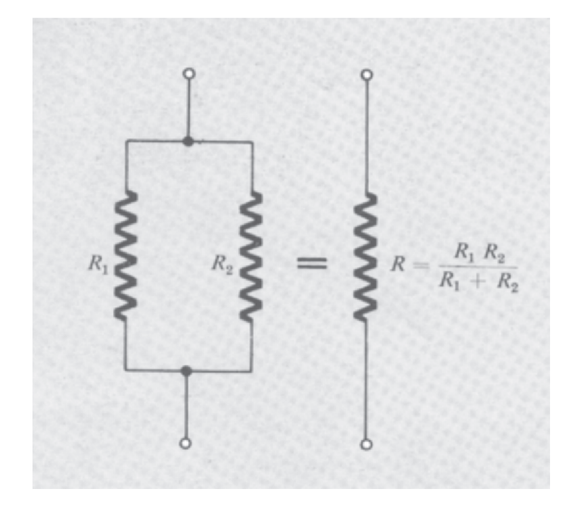
$$R = R_1 + R_2 \tag{22}$$

Las resistencias conectadas en la Fig. 4,15 lo son en paralelo. Por un razonamiento sencillo, se demuestra que la resistencia equivalente R vale

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{o} \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{23}$$

Esto es todo lo necesario para manejar un circuito como el indicado en la Fig. 4.16 el cual, a pesar de aparatosidad, puede reducirse paso a paso a combinaciones en serie o en paralelo. Sin embargo, el circuito simple de la Fig. 4.17 *no puede* reducirse, se necesita un método más general. Toda red de resistencias por las que circula una corriente constante, tiene que satisfacer a estas condiciones:

Fig. 4.15 Resistencias en paralelo.



(1) La corriente a través de cada elemento debe ser igual a la diferencia de potencial entre los extremos de este elemento dividida por la resistencia del mismo.
(2) En un *nudo* de la red, un punto donde se reúnen tres o más hilos de conexión, la suma algebraica de las corrientes hacia el nudo debe de ser nula. (Esta es nuestra conocida condición de conservación de la carga, Ec. 7, expresada para los circuitos.)
(3) La suma de las diferencias de potencial, tomadas ordenadamente a lo largo de una *malla* de la red, un camino que empieza y termina en el mismo nudo, debe de ser nula. (Esta es la expresión para un circuito de la propiedad general del campo eléctrico estático: $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para todo camino cerrado.)

El planteo algebraico de estas condiciones, para cualquier red, nos dará exactamente el número de ecuaciones linealmente indepen-

Fig. 4.16 Reducción de una red que consta solamente de combinaciones de resistencias en serie y en paralelo.

dientes necesarias para afirmar que sólo hay una solución y sólo una para la resistencia equivalente entre dos nudos elegidos. Afirmamos esto sin demostrarlo. Es interesante notar que la estructura de un problema de redes en cc depende solamente de la *topología* de la red, es decir, de aquellos aspectos del diagrama de conexiones que son independientes de toda distorsión de las líneas del diagrama.

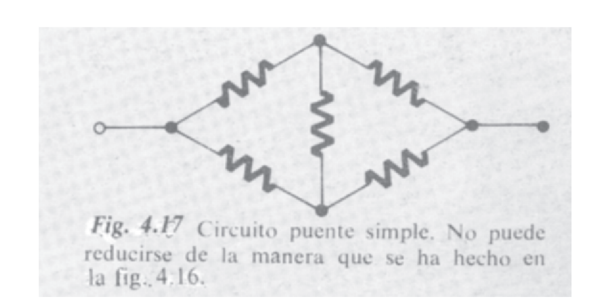


Fig. 4.17 Circuito puente simple. No puede reducirse de la manera que se ha hecho en la fig. 4.16.

Una red de cc de resistencias es un sistema lineal — los voltajes y corrientes están regidos por un sistema de ecuaciones lineales, la expresión de las condiciones (1), (2) y (3). Por lo tanto la superposición de distintos estados posibles de la red es también un estado posible. La Fig. 4.18 presenta una sección de una red con ciertas corrientes, I_1, I_2, ..., circulando por los hilos y ciertos potenciales V_1, V_2, ..., en los nudos. Si algún otro sistema de corrientes y potenciales como I_1', ..., V_1', ..., es otro estado de hechos posible en esta sección de la red, entonces también lo es el sistema $(I_1 + I_1')$, ..., $(V_1 + V_1')$, ... Estas corrientes y voltajes correspondientes a la superposición también satisfarán a las condiciones (1), (2) y (3). Ciertos teoremas generales, interesantes y útiles, al ingeniero electricista, acerca de las redes, están basados en lo anterior.

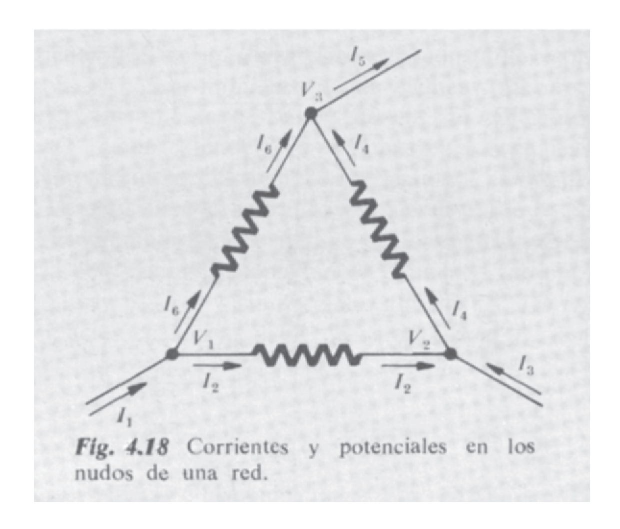


Fig. 4.18 Corrientes y potenciales en los nudos de una red.

4.8 *Disipación de energía en la circulación de corriente*

El flujo de corriente en una resistencia lleva consigo disipación de energía. Sea una fuerza **F** para mover un portador de carga con una velocidad media **v**, toda fuerza que cumpla lo dicho debe producir un trabajo por unidad de tiempo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Si un campo eléctrico **E** está moviendo un ion de carga q, entonces $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ y el trabajo efectuado en la unidad de tiempo es $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. La energía consumida de este modo se manifiesta eventualmente en forma de calor. En nuestro modelo de conducción iónica la explicación es evidente. El ion adquiere, entre colisiones, cierta energía cinética adicional al igual que cantidad de movimiento. Una colisión, o al menos unas cuantas colisiones, devuelven la dirección de su cantidad de movimiento al azar, pero no necesariamente restablecen la energía cinética a normal. Para que ocurra esto el ion tiene que transferir energía cinética al obstáculo que lo desvía. Supongamos que el portador de carga tiene una masa considerablemente menor que el átomo neutro con el que choca. El promedio de energía cinética transmitida es pequeño cuando una bola de billar choca con un bolo. Por lo tanto el ion (bola de billar) continuará acumulando energía cinética adicional hasta que su energía cinética sea tan elevada que el valor medio de la energía perdida en una colisión sea igual a la ganada entre colisiones. De esta manera, el trabajo efectuado por la fuerza eléctrica, al mover a los portadores de carga, se comunica eventualmente al medio en reposo como energía cinética al azar, o calor.

Supongamos que una corriente estacionaria de I ampere circula por una resistencia de R ohm. En cada segundo se transmiten I coulomb de carga a través de una diferencia de potencial de V volt, donde $V = IR$. De aquí que el trabajo efectuado en un segundo es I^2R, en joule (1 coulomb × 1 volt = 1 joule). El *watt* o volt-ampere

es la unidad correspondiente de potencia P (trabajo en la unidad de tiempo (1 watt = joule/seg).

$$P = I^2R \tag{24}$$

Naturalmente el flujo de corriente estacionario en un circuito de cc requiere cierta fuente de energía capaz de mantener el campo eléctrico que mueve los portadores de carga. Hasta ahora hemos evitado la cuestión de la *fuerza electromotriz* estudiando solamente partes del circuito completo; en la exposición se han excluido las « baterías ». En la Sec. 4.9 estudiaremos algunas fuentes de fuerza electromotriz.

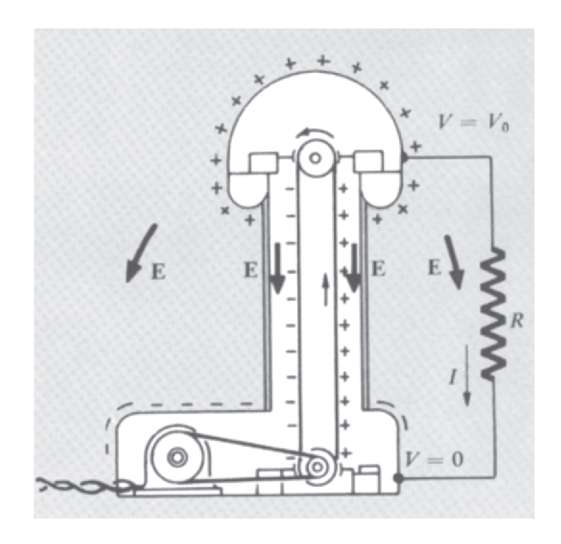


Fig. 4.19 En el generador Van de Graaff, los portadores de carga se transportan mecánicamente en un sentido, contrario al que los movería el campo eléctrico.

4.9 Fuerza electromotriz y pilas voltaicas

El origen de la fuerza electromotriz en un circuito de corriente continua es cierto mecanismo que transporta portadores de carga en un sentido *opuesto* al que el campo eléctrico intenta moverlos. Un generador electrostático de Van der Graaff (Fig. 4.19) es un ejemplo a gran escala. Con cualquier movimiento mantenido hallamos corriente en la resistencia externa, que circula en el sentido del campo eléctrico **E**, disipándose allí energía (que aparece en forma de calor) IV_0 o I^2R por unidad de tiempo. Dentro de la columna de la máquina, además, hay un campo eléctrico dirigido hacia abajo. (Pueden quitarse de la correa por un campo mucho más intenso localizado en la escobilla en el terminal. No necesitamos considerar aquí el medio para poner o quitar carga a la correa junto a las poleas.) La energía necesaria para mover la correa se suministra de cualquier parte — usualmente por un motor eléctrico conectado a la línea de suministro, pero puede ser un motor de gasolina, o incluso una persona dando vueltas a una manivela. Este generador de Van der Graaff es efectivamente una batería con una fuerza electromotriz, bajo estas condiciones, de V_0 volt.

En las baterías ordinarias, es la energía química la que hace que los portadores de carga se muevan en una región donde el campo eléctrico se opone a su movimiento. Es decir, un portador de carga *positiva* puede desplazarse a un lugar de potencial eléctrico *más elevado* si al hacerlo así puede intervenir en una reacción química que dará más energía que la requerida para escalar el desnivel eléctrico.

Para comprender lo que ocurre, examinemos una pila voltaica. El nombre genérico de los generadores químicos, de fuerza electromotriz, es el de *pilas voltaicas*. En los experimentos de Galvani hacia 1790, las famosas convulsiones de las piernas de la rana indicaron la producción química de corriente eléctrica. Fue Volta quien demostró que el origen no era la « electricidad animal », como sostenía Galvani, sino el contacto de metales distintos en el circuito. Volta construyó la primera batería, una pila de unidades elementales, cada una de las cuales consistía en un disco de cinc y uno de cobre separados por cartón humedecido. La pila que alimenta cualquier radiotransistor vie-

ne en un envase más pulcro, pero el principio de funcionamiento es el mismo. Existen diversas clases de pilas voltaicas en uso, que difieren en su química pero que tienen aspectos comunes: dos electrodos de distinto material inmersos en un fluido ionizado o electrolito.

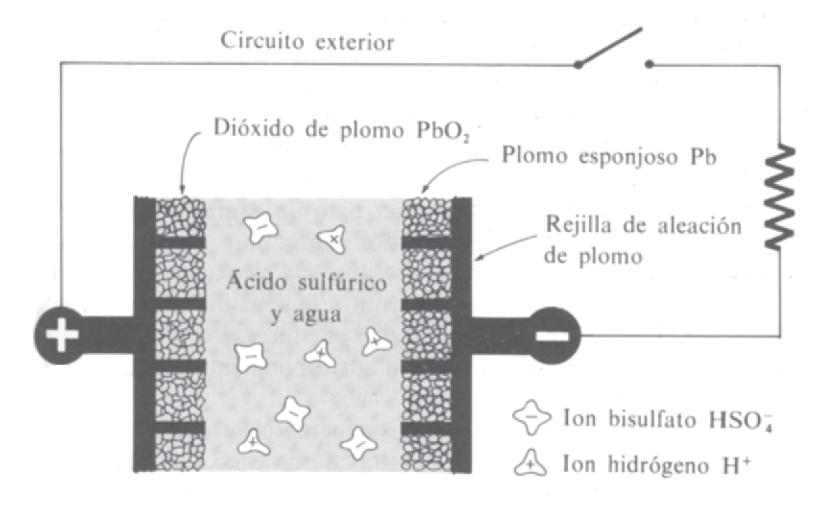
Como ejemplo describiremos la pila de plomo-ácido sulfúrico que es el elemento básico de la batería de los automóviles. Este acumulador tiene la importante propiedad que su funcionamiento se invierte fácilmente. Con una batería de acumuladores hecha con tales pilas, que pueden cargarse y descargarse repetidamente, podemos almacenar energía y recobrarla eléctricamente.

Un acumulador de plomo-ácido sulfúrico tiene placas positivas que contienen dióxido de plomo, PbO_2, como un polvo poroso, y placas negativas de plomo puro de textura esponjosa. El marco metálico o rejilla está hecha de aleación de plomo. Todas las placas positivas están conectadas entre sí y al terminal positivo del acumulador. Asimismo, las placas negativas conectadas igualmente, están intercaladas entre las placas positivas, con una pequeña separación. El diagrama esquemático de la Fig. 4.20 muestra solamente una pequeña porción de una placa positiva y de una negativa. El electrolito de ácido sulfúrico llena el acumulador, incluyendo los intersticios del material activo, la porosidad del cual proporciona una superficie de gran área para la reacción química.

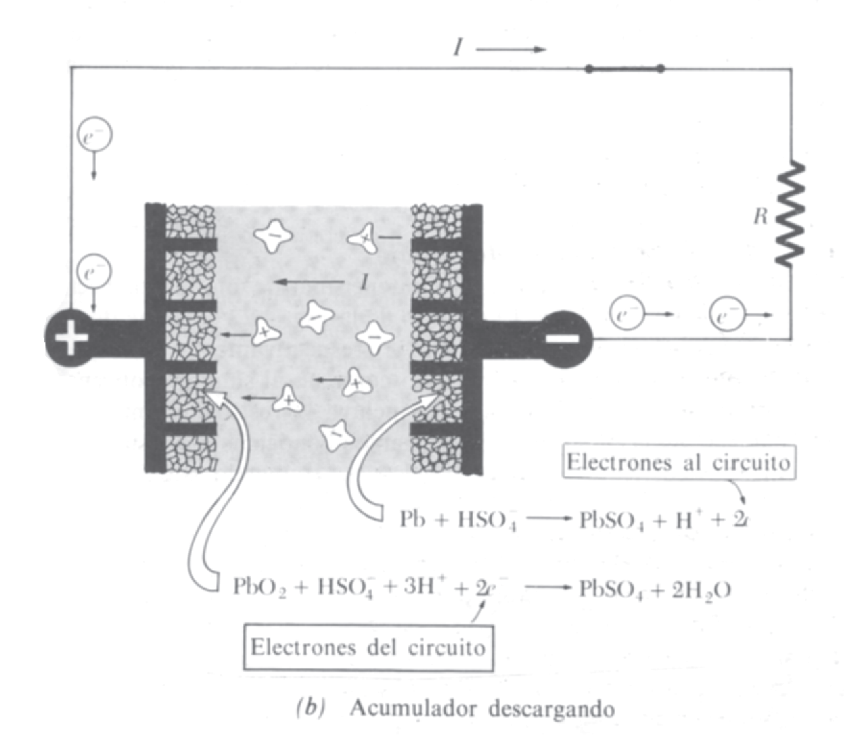
El acumulador permanece indefinidamente en esta condición si no hay circuito externo conectado a sus terminales. La diferencia de potencial entre estos terminales será muy próxima a 2,1 volts. Esta diferencia de potencial en circuito abierto se establece «automáticamente» por la interacción química de los constituyentes. Ésta es la ***fuerza electromotriz*** de la pila, para la cual se usa el símbolo $\mathscr{E}$. Su valor depende de la concentración de ácido sulfúrico en el electrolito, pero no del tamaño, número o separación de las placas.

Conectamos ahora los terminales del acumulador a un circuito exterior de resistencia R. Si R no es demasiado pequeña, la diferencia de potencial V entre los terminales del acumulador estará muy por debajo de su valor $\mathscr{E}$ en circuito abierto, y circulará una corriente $I = V/R$ por el circuito (Fig. 4.20*b*). Los electrones circulan hacia ***dentro*** del terminal positivo; otros electrones circulan hacia ***fuera*** del terminal negativo. En cada electrodo prosiguen las reacciones químicas, cuyo efecto total es convertir plomo, dióxido de plomo y ácido sulfúrico en sulfato de plomo y agua. Para cada molécula de sulfato de plomo producido así, ha pasado una carga e al circuito y se ha cedido la cantidad de energia $e\mathscr{E}$. De esta energía la cantidad eV aparece como calor en la resistencia R. La diferencia entre $\mathscr{E}$ y V se debe a la resistencia del propio electrolito, a través del cual debe circular la corriente I dentro del acumulador. Si representamos esta resistencia interna por R_i, el sistema puede describirse perfectamente por el circuito equivalente de la Fig. 4.21.

Al proseguir la descarga, el electrolito se diluye con agua, la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ disminuye algo. Normalmente, el acumulador se considera descargado cuando $\mathscr{E}$ ha descendido por debajo de 1,75



(a) Acumulador cargado



(b) Acumulador descargando

Fig. 4.20 Diagrama esquemático, no a escala, mostrando cómo funciona un acumulador de plomo-ácido sulfúrico. El electrolito, solución de ácido sulfúrico, impregna los gránulos de dióxido de plomo de la placa positiva y el plomo esponjoso de la placa negativa. La diferencia de potencial entre los terminales positivo y negativo es de 2,1 volts. Con el circuito externo cerrado, prosiguen las reacciones químicas en las interfases sólido-líquido de ambas placas, el agotamiento del ácido sulfúrico en el electrolito, y la transferencia de electrones al circuito externo del terminal negativo al positivo, lo cual constituye la corriente *I*. Para recargar el acumulador, sustituimos la carga ***R*** por una fuente con fuerza electromotriz mayor que 2,1 V, obligando así a la corriente a circular a través del acumulador en sentido contrario e invirtiendo ambas reacciones.

volts. Para recargar el acumulador, se obliga a circular una corriente por el circuito en sentido opuesto conectando una fuente de voltaje mayor que $\mathscr{E}$ en los terminales del acumulador. Entonces la reacción química se invierte hasta que el sulfato de plomo se convierte en dióxido de plomo y plomo. La energía empleada en cargar el acumulador es algo mayor que la que el acumulador cede en la descarga, pues la

resistencia interna R_i origina una pérdida de potencia I^2R_i cualquiera que sea la manera de circular la corriente.

Adviértase en la Fig. 4.20*b* que la corriente I en el electrolito se debe a un arrastre neto de iones positivos hacia la placa positiva. Evidentemente el campo eléctrico en el electrolito va hacia, no hacia fuera, de la placa positiva. Sin embargo la integral curvilínea de **E** alrededor de todo el circuito es nula, como debe ser para un campo electrostático. La explicación es la siguiente: Hay dos saltos muy pronunciados de potencial en la interfase de la placa positiva y el electrolito y en la interfase del electrodo negativo y el electrolito. Que es donde los iones se mueven *contra* un fuerte campo eléctrico por fuerzas originadas en las reacciones químicas. Ésta es la región correspondiente a la correa del generador Van de Graaff.

Cada tipo de pila voltaica tiene su fuerza electromotriz característica, que generalmente está en el intervalo de 1 a 3 volts. La energía que interviene, por molécula, en toda reacción química es esencialmente la ganancia o pérdida en la transferencia de un electrón externo de un átomo a otro distinto. Nunca es superior a unos pocos electrón volts. Podemos estar bastante seguros de que nadie va a inventar una pila voltaica de fuerza electromotriz de 12 voltios. La batería de un automóvil de 12 voltios consta de seis acumuladores de plomo conectados en serie.

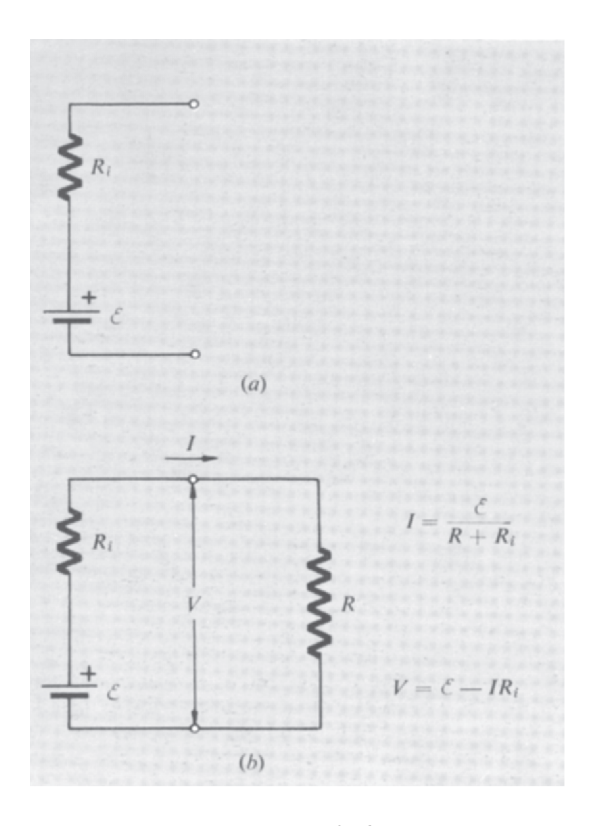


Fig. 4.21 (*a*) Circuito equivalente para una pila voltaica, que es simplemente una resistencia R_1 en serie con una fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ de valor fijo. (*b*) Cálculo de la corriente en un circuito que contiene una pila voltaica.

4.10 Redes con fuentes de voltaje

Una red de resistencias puede contener más de una fuerza electromotriz, o fuente de voltaje. El circuito de la Fig. 4.22 contiene dos baterías de fuerzas electromotrices $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ respectivamente. El terminal positivo de cada batería está indicado contiguo al símbolo convencional de batería. Supongamos que R_1 incluya la resistencia interna de una batería, R_2 la de la otra. Supongamos conocidas las resistencias, hallemos las corrientes en esta red eléctrica. Habiendo asignado senti-

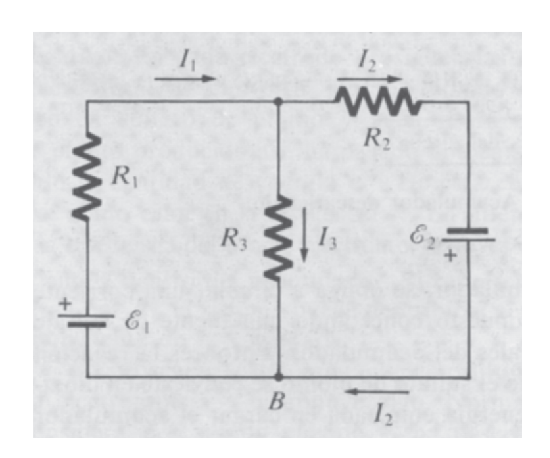


Fig. 4.22 Una red eléctrica con dos fuentes de voltaje.

dos arbitrarios a las corrientes I_1, I_2 e I_3 en las ramas, imponemos los requisitos establecidos en la Sec. 4.7 y obtenemos tres ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\ \mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Para comprobar los signos, notemos que al escribir las dos ecuaciones de las mallas, en cada una de ellas hemos considerado el sentido de la corriente el de circulación desde la batería en tal malla. Las tres ecuaciones pueden resolverse despejando I_1, I_2, e I_3 con el resultado:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \\ I_3 &= \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \end{aligned} \tag{26}$$

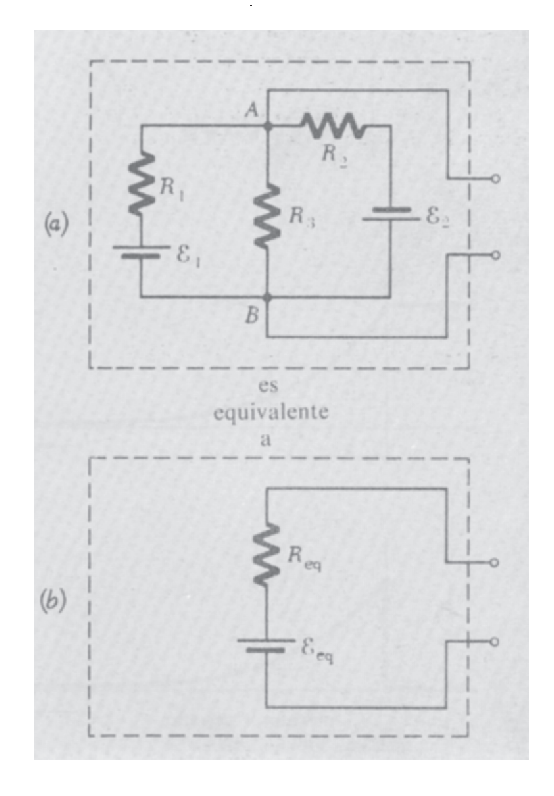
Si en algún caso particular el valor de I_3 resultase negativo, esto significa que la corriente en esta rama circula en sentido contrario al que habíamos asignado para la corriente positiva.

Supongamos que una red como ésta forme parte de un sistema más extenso, al cual está conectada en dos de sus nudos. Por ejemplo, conectemos hilos a nudos *A* y *B* y encerremos el resto en una «caja negra» con estos hilos como únicos terminales externos, como se ve en la Fig. 4.23 *a*. Un teorema general, llamado de Thévenin, nos afirma que esta caja con dos terminales es completamente equivalente, en su comportamiento en cualquier otro circuito al que puede conectarse, a una *sola* fuente de voltaje $\mathcal{E}_{eq}$ con una resistencia interna R_{eq}. Esto se cumple para cualquier red de fuentes de voltaje y resistencias, no importa lo complicado que sea. Los valores de $\mathcal{E}_{eq}$ y R_{eq} se determinan fácilmente. $\mathcal{E}_{eq}$ es el voltaje entre los dos terminales cuando no se ha conectado nada a los mismos fuera de la caja. En nuestro ejemplo es precisamente $I_3 R_3$, donde I_3 viene dada por la Ec. (26). La resistencia R_{eq} es la resistencia que mediríamos entre los dos terminales con todas las fuerzas electromotrices internas anuladas. En nuestro ejemplo, que sería la resistencia de R_1, R_2 y R_3 en paralelo, vale $R_1R_2R_3/(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)$.

¿Qué haríamos si no supiéramos lo que hay en la caja? Podríamos determinar $\mathcal{E}_{eq}$ y R_{eq} experimentalmente por dos medidas: La medida del *voltaje con circuito abierto*, con un voltímetro que consuma corriente despreciable, es la $\mathcal{E}_{eq}$. Ahora conectamos los terminales a través de un amperímetro de resistencia despreciable; éste nos da la *corriente en corto-circuito* I_{sc}. Entonces

$$R_{eq} = \frac{\mathcal{E}_{eq}}{I_{sc}} \tag{27}$$

Fig. 4.23 Hagamos R_{eq} igual a la resistencia que mediríamos entre los terminales en (*a*) si todas las fuerzas electromotrices fuesen nulas. Hagamos $\mathcal{E}_{eq}$ igual al voltaje observado entre los terminales en (*a*) con el circuito externo abierto. Entonces el circuito inferior es ***equivalente*** al circuito superior. No puede decirse que haya diferencia en estos terminales, para cualquier medida en corriente continua.

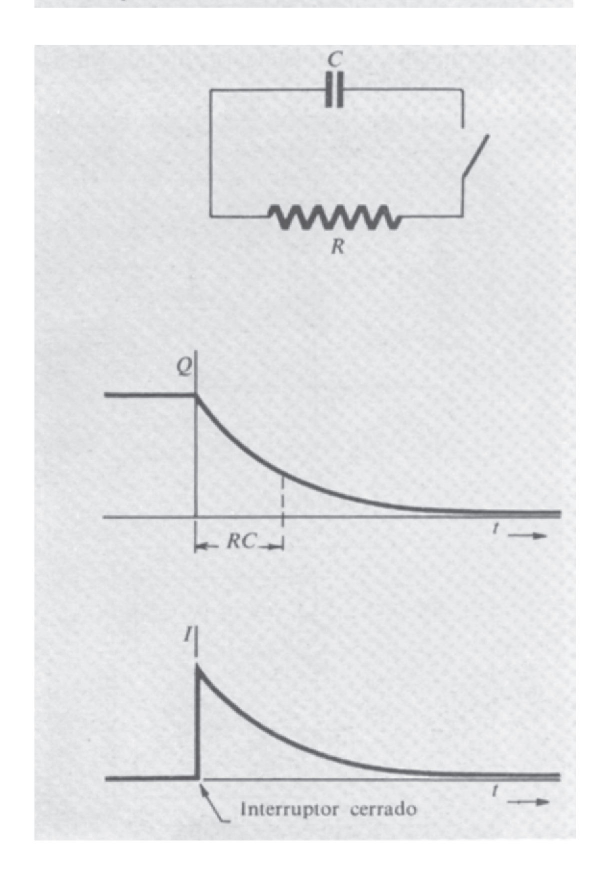


Al analizar un circuito complicado a veces nos ayuda sustituir una sección de dos terminales por su equivalente $\mathcal{E}_{eq}$ y R_{eq}. El teorema de Thévenin supone la linealidad de todos los elementos del circuito, incluyendo la reversibilidad de las corrientes a través de las baterías. Si alguna de nuestras baterías es una pila no recargable hay que tener cuidado con la corriente inversa.

4.11 Corrientes variables en condensadores y resistencias

Carguemos un condensador de capacidad C a cierto potencial V_0 y luego descarguémoslo conectando bruscamente una resistencia R. La Fig. 4.24 muestra el condensador indicado por el símbolo convencional ⊣⊢, la resistencia R y un interruptor que podemos imaginar cerrado en el instante $t = 0$. Es evidente que al circular corriente el condensador perderá gradualmente su carga, la diferencia de potencial entre sus armaduras disminuirá y esto a su vez hará que disminuya el flujo de corriente. Para ver exactamente lo que ocurre, necesitamos solamente formular las condiciones que rigen el circuito. Sea Q la carga en el condensador en cierto instante, V la diferencia de potencial entre las armaduras que es también la caída de potencial en la resistencia R. Sea I la corriente, considerada positiva si circula desde la armadura positiva del condensador. Estas magnitudes, todas función del tiempo, deben relacionarse como sigue:

Fig. 4.24 Carga y corriente en un circuito RC. La carga disminuye en el transcurso del tiempo RC en el factor $1/e$.



$$Q = CV \qquad I = \frac{V}{R} \qquad -\frac{dQ}{dt} = I \tag{28}$$

Eliminando I y V obtenemos la ecuación que rige la variación de Q con el tiempo

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \tag{29}$$

Que se puede escribir

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \tag{30}$$

podemos integrar los dos miembros, obteniendo

$$\ln Q = \frac{-t}{RC} + \text{const} \tag{31}$$

La solución de nuestra ecuación diferencial es por tanto:

$$Q = (\text{otra constante}) \times e^{-t/RC} \tag{32}$$

Hemos dicho que para $t = 0$, $V = V_0$, así que $Q = CV_0$ para $t = 0$. Esto determina la constante y ahora tenemos el comportamiento de Q luego de cerrar el interruptor:

$$Q = CV_0 e^{-t/RC} \tag{33}$$

El comportamiento de la corriente se halla directamente a partir de ésta:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \tag{34}$$

Al cerrar el interruptor la corriente aumenta inmediatamente hasta el valor V_0/R y luego « disminuye » exponencialmente hasta anularse. El tiempo que caracteriza esta es disminución la constante RC. No debe sorprendernos el hallar que el producto de resistencia por capacidad tenga las dimensiones de tiempo, pues sabemos que C tiene dimensiones de longitud y ya hemos señalado que *resistencia* × × *longitud*, cuando dimos las dimensiones de la resistividad, tiene las dimensiones de tiempo. Generalmente se habla de la « constante de tiempo RC » asociada a un circuito o a parte de un circuito.

La unidad de capacidad es el *farad*. Un condensador de capacidad un farad posee la carga de un coulomb para la diferencia de potencial de un volt. Con R en ohm y C en farad, el producto RC es un tiempo en segundos. Para comprobarlo notemos que ohm = volt/ampere = volt-seg/coulomb, mientras farad = coulomb/volt. Si realizamos el circuito de la Fig. 4.24 con un condensador de capacidad 0,05 microfarad y una resistencia de 5 megaohm, ambos valores razonables que se manejan en cualquier laboratorio, tendríamos $RC = 5 \times 10^6 \times 0{,}05 \times 10^{-6}$ ó 0,25 seg.

En cualquier sistema eléctrico constituido por conductores cargados y trayectorias de corriente resistivas, es completamente general una escala de tiempo — quizá no la única — para procesos en el sistema, establecida por un producto resistencia-capacidad. Esto está relacionado con nuestra observación anterior acerca de las dimensiones de la resistividad. Imaginemos un condensador plano con placas de área A y separación s. La capacidad C vale $\varepsilon_0 A/s$. Ahora imaginemos que el espacio entre las placas se llena de repente con un medio conductor de resistividad ρ. Para evitar toda cuestión de cómo puede esto afectar a la capacidad, supongamos que el medio es un gas muy ligeramente ionizado: una substancia de tal densidad que apenas afecte a la capacidad. El nuevo medio conductor descargará efectivamente el condensador como lo hacía la resistencia exterior en la Figura 4.24. ¿Con qué rapidez ocurrirá? La resistencia del medio, R, es $\rho s/A$. Por lo tanto la constante de tiempo RC vale $(\rho s/A)\,\varepsilon_0 A/s = \rho\varepsilon_0$. Por ejemplo, si nuestro gas ligeramente ionizado tuviese una resistividad de $10^6\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, la constante de tiempo para la descarga del condensador sería de unos 10 microsegundos. No depende de la forma o tamaño del condensador.

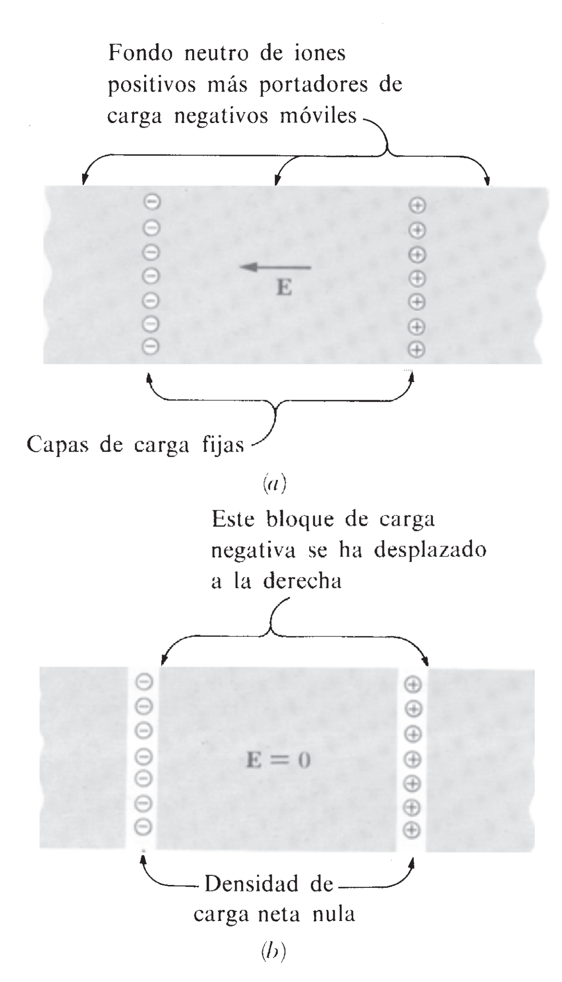


Fig. 4.25 En un medio conductor, representado aquí por un semiconductor tipo *n*, dos capas de carga fijas, una negativa y la otra positiva, pueden neutralizarse por un ligero movimiento del bloque entero de portadores de carga móviles situados entre ellas. (*a*) Antes de moverse el bloque de carga negativa. (*b*) Después que la densidad resultante de carga se ha reducido a cero en cada capa.

Lo que tenemos aquí es simplemente la constante de tiempo para el proceso de redistribución de carga o relajación del campo eléctrico en un medio conductor. Realmente no necesitábamos para nada las placas del condensador para exponer lo que ocurre. Imaginemos que pudiésemos colocar bruscamente dos distribuidores superficiales de carga, una capa positiva y la otra negativa, opuestas una a otra en un conductor —por ejemplo, en un semiconductor tipo *n* (Fig. 4.25*a*). ¿Qué hará que estas cargas desaparezcan? ¿Los portadores de carga negativa se mueven desde la capa de la izquierda, a través del espacio interpuesto, neutralizando las cargas positivas cuando lleguen a la capa de la derecha? Seguramente no —si el proceso fuera éste, el tiempo necesario sería proporcional a la distancia entre las capas. Lo que ocurre es esto. *Toda la población* de portadores de cargas negativas que llena el espacio entre las capas está obligada a moverse por efecto del campo eléctrico. Solamente es suficiente un ligero desplazamiento de esta nube de cargas para quitar el exceso de carga negativa de la izquierda, mientras que proporciona a la derecha la carga negativa necesaria para neutralizar la capa positiva, cómo se indica en la Fig. 4.25*b*. En otras palabras, dentro de un conductor, la neutralidad se restablece por un pequeño reajuste de toda la distribución de carga, no por unos cuantos portadores de carga moviéndose a grandes distancias. Esto explica por qué el tiempo de relajación puede ser independiente del tamaño del sistema.

Para un metal con resistividad típica 10^{-7} ohm·m, $\rho\varepsilon_0$ es de unos 10^{-18} s, orden de magnitud menor que el tiempo recorrido libre medio de un electrón de conducción en un metal. Como tiempo de relajación no tiene sentido. Nuestra teoría, en este estado, nada puede decirnos acerca de sucesos en una escala de tiempo tan corta como ésta.

Problemas

4.1 Tenemos 5×10^{10} iones positivos, doblemente cargados, por centímetro cúbico, moviéndose todos hacia el oeste con una celeridad de 10^7 cm/seg. En la misma región existen 10^{11} electrones por centímetro cúbico que se mueven hacia el nordeste con una celeridad de 10^8 cm/seg. (No preguntemos como se logra esto). ¿Cuál es la dirección de **J**? ¿Cuál es su módulo en ampere por metro cuadrado?

Resultado: 48,8° con el oeste hacia el sur; 1,75 A/m^2.

4.2 En un sincrotón de electrones de 6 gigaelectrón-volt (GeV), los electrones marchan por la máquina en una trayectoria aproximadamente circular de 240 metros de longitud. Es normal tener alrededor de 10^{11} electrones circulando en esta trayectoria durante un ciclo de aceleración. La celeridad de los electrones es prácticamente la de la luz. ¿Cuál es la corriente? Proponemos este problema muy sencillo para subrayar que en nuestra definición de corriente, como transporte de carga por unidad de tiempo, nada requiere que las velocidades de los portadores sean no relativistas y no hay

regla en contra de que una partícula dada se cuente varias veces durante un segundo como parte de la corriente.

Solución: 0,020 A.

4.3 En un generador electrostático de Van de Graaff, una correa de 30 cm de ancho va a una velocidad de 20 m/seg. Se da a la correa una carga superficial en el rodillo inferior, siendo la densidad superficial de carga suficiente para dar lugar a un campo de $12 \cdot 10^5$ V/m a ambos lados de la correa. ¿Cuál es la corriente en miliampere?

4.4 El primer mensaje telegráfico cruzó el Atlántico en 1858, por un cable de 3.000 km de longitud extendido entre Terranova e Irlanda. En este cable el conductor constaba de siete hilos de cobre, de 0,73 mm de diámetro cada uno, liados juntos y rodeados por una capa aislante.

(*a*) Calcular la resistencia del conductor. Usar $3 \cdot 10^{-8}$ ohm-m para la resistividad del cobre, el cual era de pureza algo dudosa.

(*b*) El camino de retorno de la corriente lo proporcionaba el propio océano. Dado que la resistividad del agua de mar es de unos 0,25 ohm-m, ver si se puede demostrar que la resistencia del retorno por el océano sería mucho menor que la del cable.

4.5 Demostrar que la cantidad total de carga en la unión de los dos materiales en la Fig. 4.6 es $\varepsilon_0 I(1/\sigma_2 - 1/\sigma_1)$, donde I es la corriente que circula a través de la unión, y σ_1 y σ_2 son las conductividades.

4.6 Un hilo de estaño puro se estira reduciendo su diámetro en un 25 por cien y aumentando su longitud. ¿En qué factor habrá aumentado su resistencia? Luego se aplana en forma de cinta, lo cual hace que aumente de nuevo su longitud, la cual es el doble de la original. ¿Cuál ha sido el cambio total de resistencia? Se supone que la densidad y la resistividad han permanecido constantes.

4.7 Un conductor estratificado se hizo depositando alternativamente capas de plata de 100 angstrom de espesor y capas de estaño de 200 angstroms de espesor. El material compuesto, considerado a gran escala, puede suponerse homogéneo pero anisótropo con una conductividad eléctrica $\sigma_\perp$ para las corrientes perpendiculares a los planos de las capas, y una conductividad diferente $\sigma_\parallel$ para las corrientes paralelas a este plano. Dado que la conductividad de la plata es 7,2 veces mayor que la del estaño, hallar la relación $\sigma_\perp/\sigma_\parallel$.

Solución: 0,457.

4.8 Un hilo de cobre de 1 km de longitud está conectado a una batería de 6 volts. La resistividad del cobre es de $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ ohm-m; el número de electrones de conducción por metro cúbico es $8 \cdot 10^{28}$. ¿Cuál es la velocidad de arrastre de los electrones de conducción bajo estas circunstancias? ¿Cuánto tardará un electrón en recorrer el circuito?

4.9 Normalmente en la atmósfera terrestre la densidad mayor de electrones libres (liberados por el ultravioleta de la luz solar) es de 10^{12} por m^3 y se halla a una altura de 100 km, donde la densidad del aire es tan baja que el recorrido medio de un electrón es de unos 10 cm. A la temperatura que prevalece allí la celeridad media de un electrón es de 10^7 cm/s. ¿Cuál es la conductividad?

Solución: $2 \cdot 10^{-2}$ (ohm-m)$^{-1}$.

4.10 Un ion en un líquido está rodeado tan de cerca por moléculas neutras que apenas puede hablarse de un «tiempo libre» entre choques. Sin embargo, es interesante ver qué valor de τ está implicado por la Ec. 17 si tomamos la conductividad observada del agua pura de la tabla 4.1 y los va-

lores dados para N_+ y N_-, 10^{19} por m^3. Una celeridad térmica típica para una molécula de agua es $5 \cdot 10^2$ m/s. ¿Cuánto recorre en este tiempo τ?

4.11 La resistividad del agua de mar es de unos 0,25 ohm-m. Los portadores de carga son mayormente iones Na^+ y Cl^-, y de cada uno de ellos hay unos $3 \cdot 10^{26}$ por m^3. Llenamos un tubo de plástico de 2 metros de largo con agua de mar y lo conectamos a una batería de 12 volt con los electrodos en cada extremo. ¿Cuál es la velocidad de arrastre resultante de los iones, en cm/s?

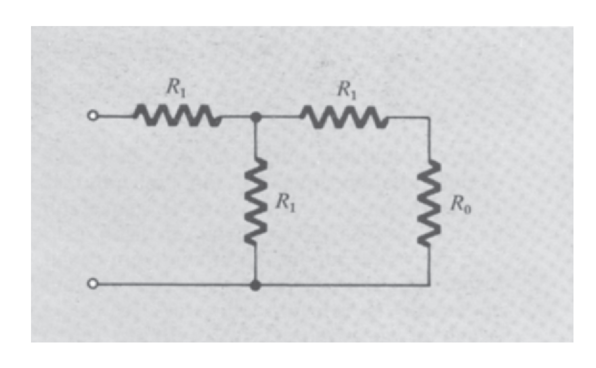
Solución: $2,5 \times 10^{-6}$ m.

4.12 Utilizando los valores, dados en la Sección 4.6, de la conductividad del silicio puro a 500 K y la densidad de los electrones de conducción y huecos a esta temperatura, deducir el tiempo libre medio entre colisiones, suponiendo que éste es el mismo para electrones y huecos.

4.13 En un diodo de unión de silicio, la región de la unión plana entre semiconductores tipo-*n* y tipo-*p* puede representarse aproximadamente como dos láminas de carga adyacentes, una negativa y otra positiva. Más allá de la unión, fuera de estas capas de carga, el potencial es constante, siendo su valor ϕ_n en el material tipo-*n* y ϕ_p en el material tipo-*p*. Dado que la diferencia de potencial entre ϕ_p y ϕ_n es 0,3 volts, y que el espesor de cada una de las dos capas de carga es de 0,01 cm, hallar la densidad de carga en cada una de las dos capas, y representar el potencial ϕ en función de la posición x a través de la unión. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en el plano medio?

4.14 Con referencia a la Ec. 20 y Fig. 4.10. Supongamos que $\tau_+ = \tau_-$ y $M_+ = M_- = m_e$ la masa del electrón. La presencia de 10^{15} electrones por cm^3 en la banda de conducción y el mismo número de huecos da por resultado una conductividad de 0,3 $(\text{ohm-cm})^{-1}$. ¿Cuál debe ser el valor del tiempo libre medio τ? La celeridad cuadrática media de un electrón a 500 K es $1,5 \cdot 10^7$ cm/s. Comparar el recorrido libre medio con la distancia entre átomos de silicio adyacentes, la cual es $2,35 \cdot 10^{-8}$ cm.

4.15 Supongamos que cada una de las resistencias en el circuito de la Fig. 4.16 tiene el valor de 100 ohm. ¿Cuál es la resistencia de una resistencia equivalente única?

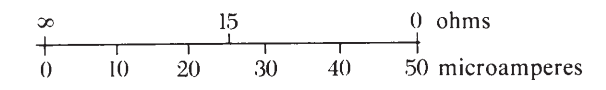


Prob. 4.16

4.16 En el circuito, si se conoce R_0, ¿cuál debe ser el valor de R_1 de manera que la resistencia de entrada entre los terminales sea igual a R_0?

4.17 Si el voltaje en los terminales de la batería de un automóvil cae de 12,3 a 9,8 volts cuando se conecta una resistencia de 0,5 ohm en dichos terminales, ¿cuál es la resistencia interna?

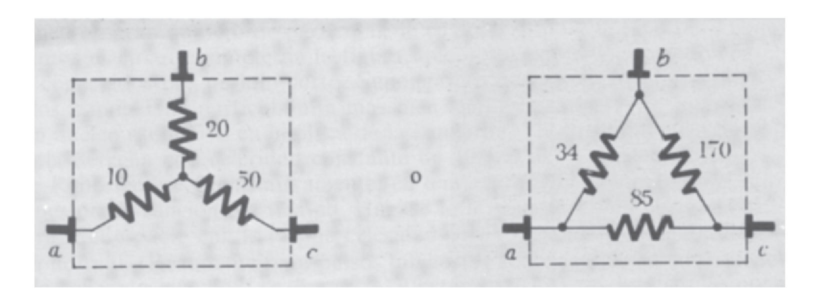
4.18 Demostrar que, si una batería de fem $\mathscr{E}$ fija y resistencia interna R_i se conecta a una resistencia variable externa R, se libera la potencia máxima al circuito exterior cuando $R = R_i$.



Prob. 4.19

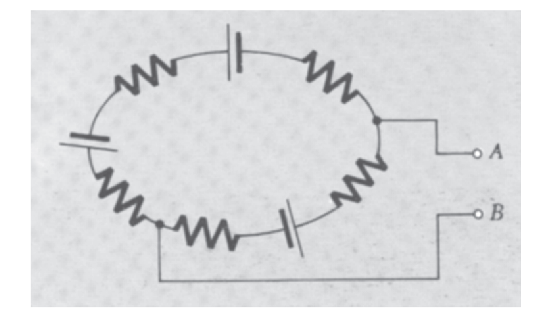
4.19 Tenemos un microamperímetro que indica 50 microamperes a fondo de escala, y la bobina en el cuadro móvil tiene una resistencia de 20 ohm. Añadiendo dos resistencias R_1 y R_2 y una batería de 1,5 volts podemos convertirlo en un óhmetro. Cuando los dos conductores exteriores de este óhmetro se cortocircuitan, el medidor debe indicar cero ohms desviándose exactamente a fondo de escala. Cuando los conductores se conectan a una resistencia R, la desviación indicará el valor de la resistencia si la escala está graduada adecuadamente. En particular deseamos que una desviación de media escala indique 15 ohm. ¿Qué valores de R_1 y R_2 se necesitan, cómo se harían las conexiones, y dónde se grabaría la escala de ohm (con referencia al calibrado del primitivo microamperímetro) para 5 ohm y para 50 ohm?

4.20 Una caja negra con tres terminales a, b y c solamente contiene tres resistencias e hilo de conexión. Midiendo la resistencia entre pares de terminales, hallamos R_{bc} = 70 ohm, R_{ab} = 30 ohm y R_{ac} = 60 ohms. Demostrar que lo que contiene la caja puede ser una de dos



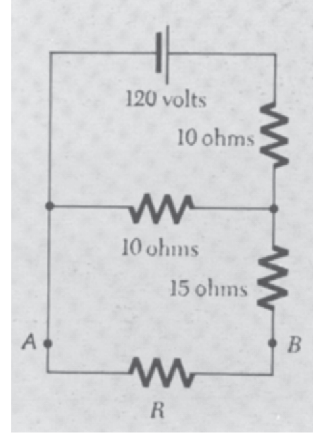
¿Hay otra posibilidad? ¿Las dos cajas son completamente equivalentes, o existe una medida externa que las podría distinguir una de otra?

4.21 En el circuito todas las resistencias tienen el mismo valor, 100 ohms, y cada pila tiene una fuerza electromotriz de 1,5 volts. Hallar el voltaje en circuito abierto y la corriente en cortocircuito para los terminales A, B. Luego hallar $\mathscr{E}_0$ y R_0 para el circuito equivalente de Thévenin.



Prob. 4.21

4.22 Ha de conectarse una resistencia R entre los terminales A, B del circuito de la derecha. ¿Para qué valor de R la potencia disipada en la resistencia será mayor? Para contestar esto, construir el circuito equivalente Thévenin y luego aplicar el resultado del Problema 4.18. ¿Cuánta potencia se disiparía en R?



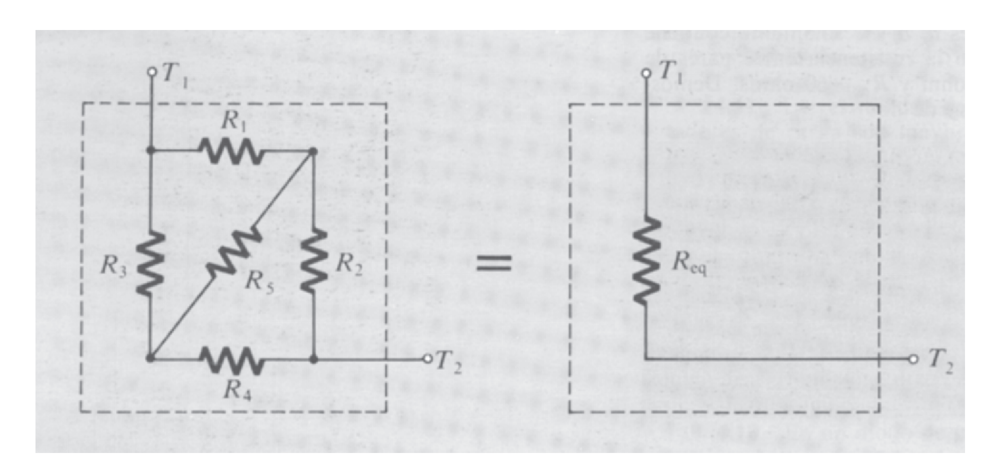
Prob. 4.22

4.23 Supongamos que el medio conductor en la Fig. 4.25 es silicio tipo-n con 10^{15} electrones por cm^3 en la banda de conducción. Supongamos que la densidad de carga inicial en las capas es tal que la intensidad del campo eléctrico es 30 000 V/m. ¿Qué distancia se ha de separar la distribución de electrones que intervienen para restablecer la neutralidad y reducir el campo eléctrico a cero?

4.24 Como ilustración de lo tratado en la primera nota al pie de página en la Sección 4.7 consideremos una caja negra cúbica de aproximadamente 10 cm de arista con dos terminales. Cada uno de estos terminales se conecta con un hilo a cierto circuito externo. Por lo demás, la caja está bien aislada en todas partes. A través de este elemento de circuito fluye una corriente de aproximadamente 1 ampere. Supongamos que la corriente que entra y la que sale difieren en uno por un millón. ¿Aproximadamente cuánto se tardaría, a menos que le ocurra algo, para que el potencial de la caja se elevase en 1000 volts?

4.25 Volviendo al ejemplo del condensador C que se descarga a través de la resistencia R que se ha tratado en el texto, demostrar que la energía total disipada en la resistencia coincide con la energía almacenada originalmente en el condensador. Supongamos ahora que alguien objeta que el condensador *realmente* nunca se descarga debido a que la Q solamente se anula para $t = \infty$. ¿Cómo puede rebatirse esta objeción? Puede hallarse cuánto tardaría en reducirse la carga a la de un electrón, con ciertas hipótesis razonables.

4.26 Dos varillas de grafito tienen la misma longitud. Una es un cilindro de radio a. La otra es cónica que se va adelgazando linealmente desde el radio a en un extremo al radio b en el otro. Demostrar que la resistencia



Prob. 4.27

eléctrica de extremo a extremo de la varilla cónica es a/b veces la de la varilla cilíndrica. *Sugerencia:* considerése la varilla constituida por discos delgados, todos en serie.

4.27 Esto corresponde a la resistencia equivalente R_{eq} entre los terminales T_1 y T_2 para el circuito de cinco resistencias. Una manera de deducir una fórmula para R_{eq} sería resolver el circuito para la corriente I que circula en T_1 para una diferencia de potencial V dada entre T_1 y T_2; luego $R_{eq} = V/I$. La solución implica pesados cálculos algebraicos en los que es fácil equivocarse, así que daremos la mayor parte de la respuesta:

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + ? + R_2R_3R_4 + R_5(R_1R_3 + R_2R_3 + ? + R_2R_4)}{R_1R_2 + R_1R_4 + ? + R_3R_4 + R_5(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}$$

Por consideraciones de simetría del circuito hallar los términos omitidos. Comprobar ahora la fórmula por cálculo directo de R_{eq} en tres casos particulares: (*a*) $R_5 = 0$, (*b*) $R_5 = \infty$, y (*c*) $R_1 = R_3 = 0$, y comparar los resultados con lo que da la fórmula.

4.28 Una batería de acumuladores de plomo-ácido de 12 volts con una capacidad de carga de 20 ampere-hora tiene una masa de 10 kg.

(*a*) ¿Cuántos kilogramos de sulfato de plomo se forman cuando esta batería se descarga. (El peso molecular del plomo es 303).

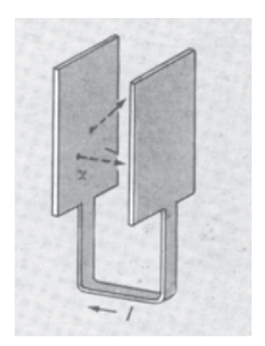
(*b*) ¿Cuántos kilogramos de batería de este tipo se necesitarían para almacenar la energía producida por 1 kg de gasolina mediante un motor de rendimiento del 20 por cien? (El calor de combustión de la gasolina es: $4{,}5 \cdot 10^4$ joules/g).

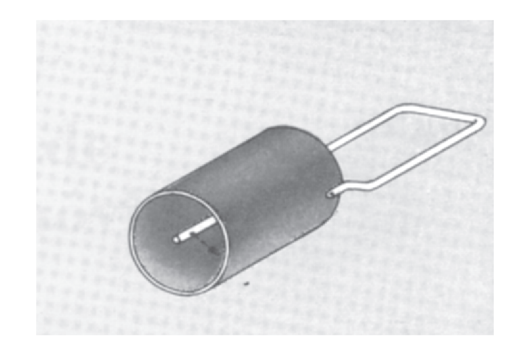
4.29 La pila seca corriente de 1,5 volts usada en flash e innumerables otros dispositivos produce su energía por oxidación de la caja de cinc que es su polo negativo, mientras reduce dióxido de manganeso MnO_2 a Mn_2O_3 en el electrodo positivo. (Se llama pila de carbón-cinc, pero la varilla de carbón es precisamente un conductor inerte). Una pila de tamaño D, que pesa 90 g, puede suministrar 100 miliamperes durante unas 30 horas.

(*a*) Compárese esta energía almacenada, en joules/kg, con la del acumulador de plomo descrito en el Problema 4.28. Desgraciadamente la pila no es recargable.

(*b*) ¿A qué altura podría elevarse uno mismo con una pila D alimentando un montacargas con un rendimiento del 50 por cien?

4.30 El resultado del Prob. 3.24 puede ayudarnos a comprender el flujo de corriente en un circuito, parte del cual consiste en partículas cargadas en movimiento por el espacio entre dos electrodos. La pregunta es cuál es la naturaleza de la corriente cuando atraviesa el espacio sólo *una* partícula. (Si se puede resolver esto, podemos describir fácilmente cualquier flujo en el que intervienen un gran número de partículas de cualquier tipo que penetren.) Consideremos el circuito simple de la figura, que consta de dos electrodos en el vacío conectados por un hilo corto. Supongamos que los electrodos están separados 2 mm. Una partícula alfa más bien lenta, de carga $+2e$, es emitida por un núcleo radiactivo en la placa de la izquierda. Va directamente a la placa de la derecha con celeridad constante de 10^6 m/seg y se detiene en esta placa. Represéntese cuantitativamente, en una gráfica, la corriente en el hilo de conexión en función del tiempo. Hágase lo mismo para una partícula alfa que cruza el espacio con la misma celeridad pero formando un ángulo de 45° con la normal. (Realmente para pulsos tan cortos como éste, la inductancia del hilo de conexión, que aquí se desprecia, afectaría la forma del pulso.) Supongamos que los electrodos tienen disposición cilíndrica, y la partícula alfa se emite del hilo delgado situado en el eje de un pequeño electrodo cilíndrico. ¿Tendría la misma forma el pulso de corriente?

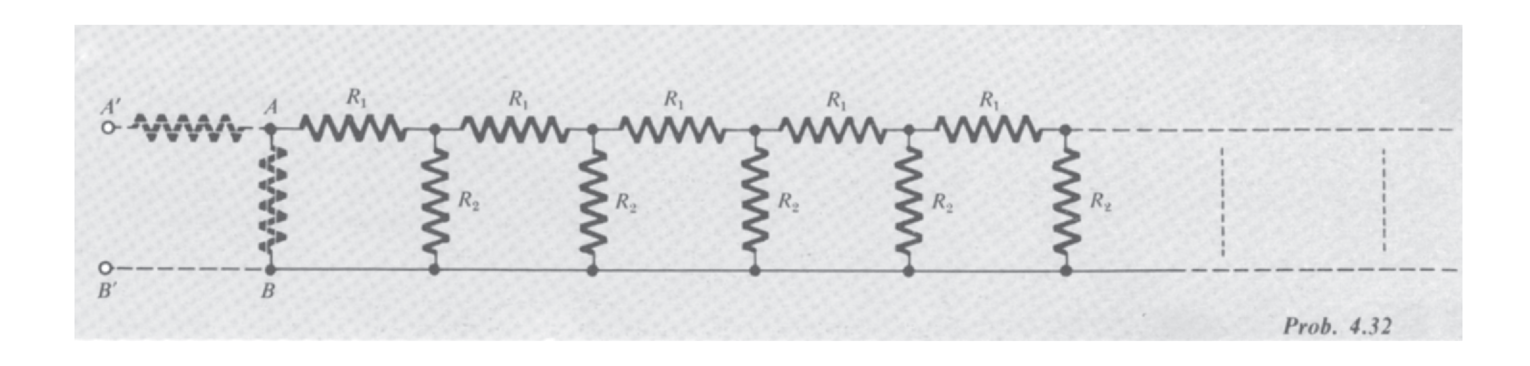




Prob. 4.30

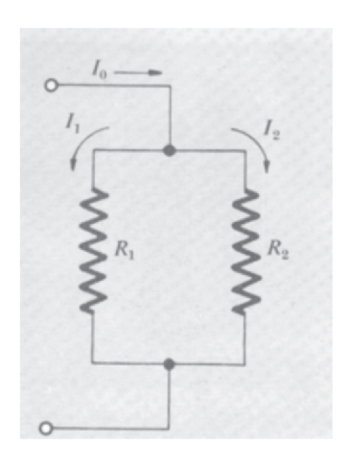
4.31 Un circuito puede dibujarse en el plano, si se adopta una forma convencional de representar un «cruce sin contacto» tal como . Supongamos que un cubo tiene una resistencia a lo largo de cada arista. En cada vértice están soldados los hilos de tres resistencias. Dibújese este circuito en un plano. Hállese la resistencia equivalente entre dos nudos que representan vértices diagonalmente opuestos del cubo, en el caso en que todas las resistencias tengan el mismo valor R_0. Para ello hay que resolver un sistema de ecuaciones; en su lugar, utilícese la simetría. Hállese luego la resistencia equivalente entre dos nudos que correspondan a vértices diagonalmente opuestos en una cara del cubo. Aquí también, las consideraciones de simetría reducirán el problema a uno muy simple. Para ambos cálculos, el dibujo de la estructura como cubo, mejor que aplanada, ayudará a encontrar las simetrías necesarias en las corrientes.

4.32 Algunos tipos importantes de redes son de extensión infinita. La figura muestra una cadena de resistencias en serie y en paralelo que se extienden indefinidamente hacia la derecha. La línea inferior es el hilo de retorno de todas ellas, sin resistencia. A veces a esto se le llama cadena atenuadora o red en escalera. El problema consiste en hallar la «resistencia de entrada», es decir, la resistencia equivalente entre los terminales A y B. El interés de este problema estriba principalmente en el método de solucionarlo, que toma un giro singular y que puede utilizarse en otras partes de la física donde haya repetición de dispositivos idénticos (incluso una cadena indefinida de lentes en óptica). Lo esencial es que la resistencia de entrada, que aún no conocemos —y llamamos R— no cambiará al añadir un nuevo juego de resistencias en la



Prob. 4.32

parte extrema frontal de la cadena y alargarla una unidad. Pero, al añadir esta sección, vemos que la nueva resistencia de entrada es precisamente R_1 en serie con la combinación en paralelo de R_2 y R. Se obtiene inmediatamente una ecuación que puede resolverse para hallar R. Demuéstrese que si se aplica una tensión V_0 a la entrada de una cadena de este tipo, la tensión en los nudos decrece en progresión geométrica. ¿Qué relación es necesaria entre las resistencias de manera que el atenuador reduzca a la mitad a la tensión en cada paso? Es evidente que una escalera realmente infinita no sería práctica. ¿Puede sugerirse una manera de terminarla después de unas cuantas secciones sin introducir ningún error en la atenuación?



Prob. 4.33

4.33 La figura muestra dos resistencias en paralelo, con valores R_1 y R_2. La corriente se divide de cierta manera entre ellas. Demuéstrese que la condición $I_1 + I_2 = I_0$ junto con el requisito de ***mínima potencia disipada*** conduce a los mismos valores de la corriente que calcularíamos con las fórmulas ordinarias. Esto ilustra un principio variacional general que se cumple en las redes de corriente continua: La distribución de corrientes en la red, para una corriente de entrada dada I_0, es siempre la que produce la disipación mínima de energía total.

5

Campos de cargas móviles

5.1 De Oersted a Einstein

En el invierno de 1819-20 Hans Christian Oersted era profesor de Electricidad, Galvanismo y Magnetismo para alumnos de cursos superiores en la Universidad de Copenhague. *Electricidad* significaba electrostática; el *galvanismo* se refería a los efectos producidos por las corrientes continuas de las baterías, un tema iniciado por el descubrimiento fortuito de Galvani y los subsiguientes experimentos de Volta; el *magnetismo* trataba de los ya antiguos conocimientos de la piedra imán, la brújula y el campo magnético terrestre. Para algunos, parecía evidente que debía existir una relación entre las corrientes galvánicas y la carga eléctrica, aunque existía poco más que la evidencia directa de que ambas podían causar sacudidas. Por otro lado, el magnetismo y la electricidad no parecían tener nada en común. No obstante, Oersted tenía una noción, algo vaga, pero mantenida tenazmente, de que el magnetismo, como la corriente galvánica, debían ser una especie de « forma oculta » de la electricidad. Intentando hallar alguna manifestación de esto, antes de la clase, realizó el experimento de hacer circular una corriente galvánica por un hilo por encima y perpendicular a la aguja de una brújula. No hubo efecto. Después de la clase, algo le impulsó a ensayar de nuevo el experimento con un hilo paralelo a la aguja de la brújula. La aguja giró notablemente — y al invertir la corriente galvánica se invirtió el sentido de giro.

El mundo científico estaba más que preparado para esta revelación. Un fermento de experimentación y descubrimientos siguieron apenas lo enunciado llegó a los demás laboratorios. Sin mucho tardar, Ampère, Faraday y otros efectuaron una descripción esencialmente completa y exacta de la acción magnética de las corrientes eléctricas. El descubrimiento de la inducción electromagnética, debido a Faraday, llegó transcurridos menos de 12 años del experimento de Oersted. En los dos siglos anteriores, desde la publicación en 1600 del gran trabajo de William Gilbert, *De Magnete*, los conocimientos humanos del magnetismo no habían avanzado en absoluto. Además de estos descubrimientos experimentales se desarrolló la teoría clásica completa del electromagnetismo. Formulada matemáticamente por Maxwell, fue triunfalmente corroborada por la demostración de Hertz de las ondas electromagnéticas, en 1888.

La relatividad restringida tiene sus raíces históricas en el electromagnetismo. Lorentz, explorando la electrodinámica de las cargas móviles, llegó muy cerca de la formulación final de Einstein. Y el gran artículo de Einstein, en 1905, no fue titulado « Teoría de la Relatividad » sino « Acerca de la electrodinámica de los cuerpos móviles ». Hoy en día vemos en los postulados de la relatividad, y en lo que ella implica, un amplio alcance que abarca todas las leyes físicas, no sólo las del electromagnetismo. Esperamos que toda teoría física completa sea relativísticamente invariante. Debe expresar lo mismo en todos los sistemas de referencia inerciales. Dio la casualidad que la física ya *tenía* una teoría relativísticamente invariante — la teoría electro-

magnética de Maxwell — antes de que fuese reconocida la importancia de la invariancia relativista. El que si las ideas de la relatividad restringida podían haberse desarrollado, en ausencia de una teoría completa del campo electromagnético, es una cuestión para que especulen los historiadores de la ciencia; probablemente no puede contestarse. Solamente podemos decir que la historia actual muestra, tal vez, sencillamente un camino que va de la brújula de Oersted a los postulados de Einstein.

Sin embargo, la relatividad no es una rama del electromagnetismo, ni una consecuencia de la existencia de la luz. El postulado central de la relatividad restringida, que ninguna observación ha contradicho hasta ahora, es la equivalencia de los sistemas de referencia móviles con velocidad constante uno con respecto al otro. En realidad, es posible, sin mencionar la luz, deducir las fórmulas de la relatividad restringida solamente postulando la hipótesis de que todas las direcciones espaciales son equivalentes *. La constante universal c aparece en estas fórmulas como una velocidad límite, a la cual se acerca una partícula acelerada pero que nunca puede exceder. Su valor puede averiguarse por un experimento que ni implique luz ni nada (como neutrinos) que pueda imaginarse que se propague precisamente a tal velocidad. Dicho de otro modo, tendríamos relatividad restringida incluso si no existieran las ondas electromagnéticas.

En este capítulo y más adelante seguiremos el camino histórico de Oersted a Einstein casi al revés. Tomaremos la relatividad restringida como dato, y buscaremos cómo se ve en otro sistema de referencia un sistema electrostático de cargas y campos. De esta manera hallaremos las fuerzas que actúan sobre cargas eléctricas en movimiento, incluyendo la fuerza que actúa entre corrientes eléctricas. El magnetismo, desde este punto de vista, es un aspecto relativista de la electricidad **. Pero primero, pasemos revista al fenómeno que intentaremos explicar.

* Véase N. David Mermin, «Relativity Without Light», *American Journal of Physics,* 52:119 (1984), en el cual se demuestra que la ley más general para la adición de velocidades que está de acuerdo con la equivalencia de sistemas de referencia inerciales debe tener la forma $v = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$, idéntica a nuestra Ec. 6 en el Apéndice A. Para hallar el valor de la constante c en nuestro universo solamente necesitamos medir con adecuada precisión las tres celeridades más bajas v, v_1 y v_2. En el artículo de Mermin pueden hallarse referencias a otras deducciones de la relatividad restringida a partir de la equivalencia de sistemas de referencia.

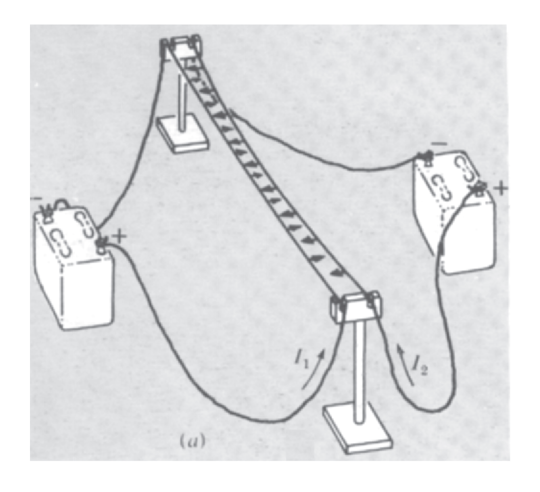
** La primera exposición de este punto de vista, que yo sepa, es el artículo de L. Page, A Derivation of the Fundamentals Relations of Electrodynamics from Those of Electrostatics, *American Journal of Science,* XXXIV:57 (1912). Era natural para Page, escribiendo solamente 7 años después del artículo revolucionario de Einstein, considerar la relatividad más como necesidad de confirmación que desde el punto de vista electrodinámico. Su conclusión es: «Desde otro punto de vista, el hecho de que hayamos sido capaces, por medio del principio de la relatividad, de deducir las relaciones fundamentales de la electrodinámica a partir de los de la electrostática, puede considerarse como cierta confirmación del principio de relatividad».

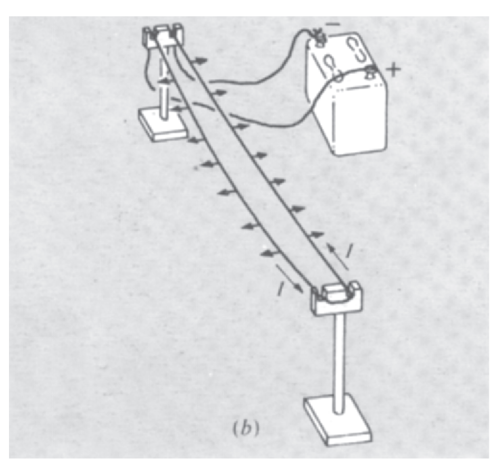
5.2 Fuerzas magnéticas

Dos hilos paralelos están recorridos por corrientes en el mismo sentido. La fuerza, por unidad de longitud, sobre uno de los hilos se comprueba que es directamente proporcional al producto de las dos corrientes e inversamente proporcional a la distancia entre los hilos (Fig. 5.1*a*). Invirtiendo el sentido de una de las corrientes, se invierte el de la fuerza que pasa a ser repulsiva. Así que las dos porciones de hilo en la Fig. 5.1*b*, que forman parte de un mismo circuito, tienden a separarse. Existe cierto tipo de « acción a distancia » entre los dos filamentos de corriente eléctrica estacionaria. Parece que no tiene relación con la carga eléctrica estática en la superficie del hilo. Pueden existir tales cargas, y los hilos pueden estar a distintos potenciales, pero la fuerza que estamos considerando depende solamente del *movimiento* de carga en los hilos, es decir, de las dos corrientes. Puede colocarse una lámina metálica entre los dos hilos sin afectar, en absoluto, a dicha fuerza (Fig. 5.1*c*). Estas nuevas fuerzas, que entran en juego cuando se mueven las cargas, se llaman *magnéticas*.

La brújula de Oersted (Fig. 5.2*a*) no se parece mucho a un circuito de corriente continua. Sin embargo, ahora sabemos, como Ampère fue el primero en sospechar, que el hierro imanado está lleno de cargas en movimiento incesante —corrientes eléctricas a escala atómica. Una bobina de hilo delgado con una batería para proporcionarle corriente (Fig. 5.2*b*), se comporta como la brújula bajo la influencia de una corriente próxima.

Observando el movimiento de una partícula cargada libre, en lugar de un hilo conductor de corriente, hallamos que ocurre el mismo hecho. En un tubo de rayos catódicos, los electrones que seguirían una trayectoria rectilínea, se desvían a un lado o al otro a causa de la corriente en un hilo exterior, según el sentido relativo de la corriente en este hilo (Fig. 5.3). Estamos familiarizados con estos hechos en el





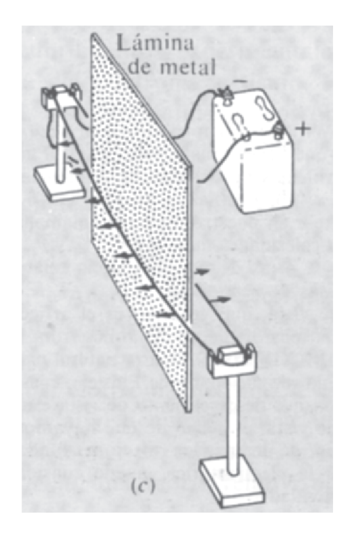
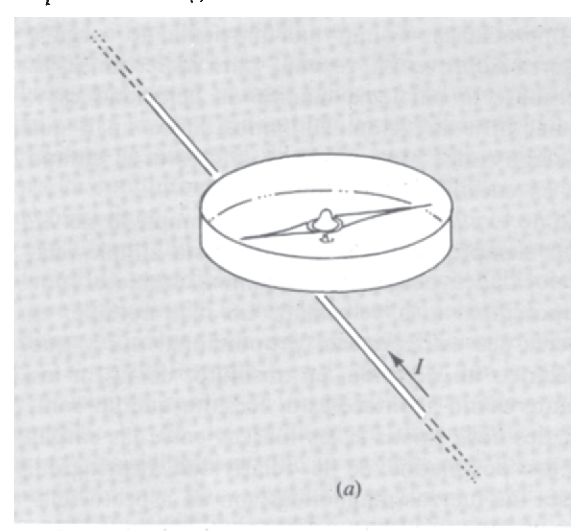


Fig. 5.1.
(a) Hilos paralelos que conducen corrientes en el mismo sentido, se atraen.
(b) Hilos paralelos que conducen corrientes en sentidos contrarios, se repelen.
(c) Estas fuerzas no se afectan colocando una lámina metálica entre los hilos.



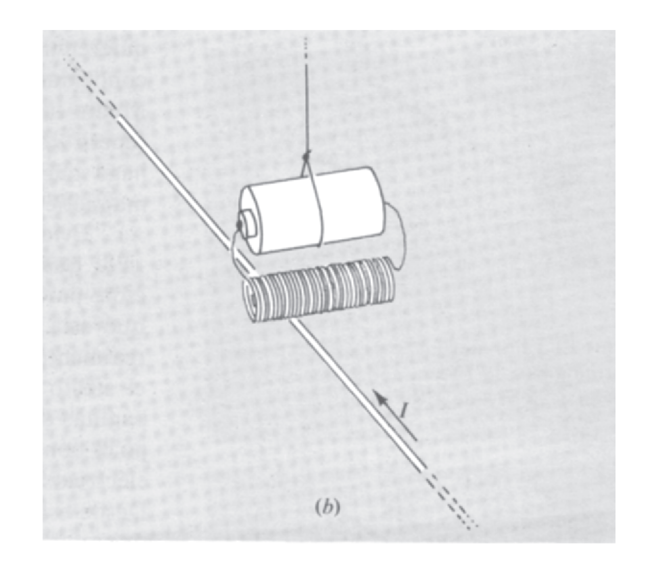


Fig. 5.2 Una aguja de brújula (*a*) y una bobina que conduce corriente (*b*) están influidos de manera parecida por la corriente en un conductor próximo. El sentido de la corriente *I* se entiende que es el de los iones positivos si ellos son los portadores de corriente. En el campo magnético terrestre el extremo negro de la brújula apunta hacia el norte.

laboratorio y sabemos que esta interacción entre corrientes y otras cargas móviles puede explicarse introduciendo un *campo magnético*. (Recordemos que el campo eléctrico era simplemente una manera de describir la « acción a distancia » entre cargas estacionarias, la que se expresa por la ley de Coulomb.) Decimos que una corriente eléctrica tiene un campo magnético asociado que ocupa el espacio que le rodea. Otra corriente, o cualquier partícula cargada móvil que se encuentre en este campo, experimenta una fuerza proporcional a la intensidad del campo magnético en aquella posición. Para una partícula cargada, la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad. La fuerza total sobre una partícula con la carga q está dada por

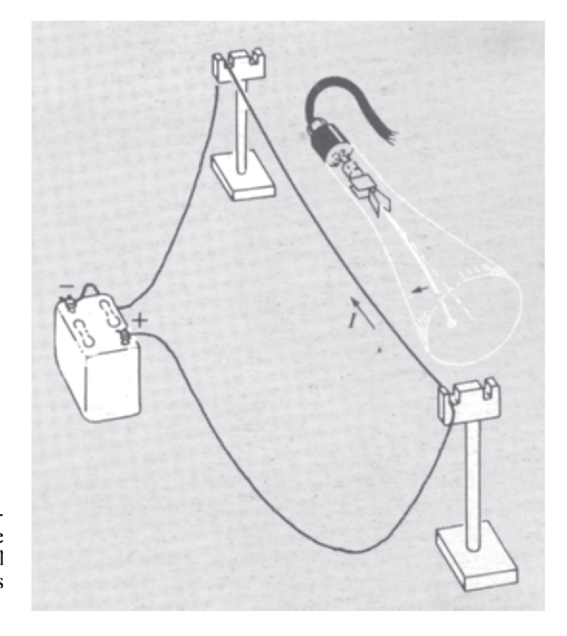
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (1)$$

donde $\mathbf{B}$ es el campo magnético*.

Tomaremos la Ec. 1 como la definición de $\mathbf{B}$.

Todo lo que nos interesa es que la intensidad del campo magnético es un vector que determina la parte proporcional a la velocidad de la fuerza sobre una carga móvil. Dicho de otro modo, si nos piden «Mídase el módulo y la dirección del vector $\mathbf{B}$ en tal punto» se re-

Fig. 5.3 Un ejemplo de atracción de corriente en el mismo sentido. Compárese con la FIG. 5.1*a*. Se puede también describir como la desviación de un haz de electrones por un campo magnético.



* Aquí es donde hacemos uso por vez primera del producto vectorial, de dos vectores. Recordemos: el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es un vector perpendicular a los dos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ y de módulo vB sen θ, donde θ es el ángulo entre las direcciones de $\mathbf{v}$ y de $\mathbf{B}$. La regla del tornillo determina el sentido de este producto $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En coordenadas cartesianas $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(v_yB_z - v_zB_y) \times \hat{\mathbf{y}}(v_zB_x - v_xB_z) + \mathbf{z}(v_xB_y - v_yB_x)$.

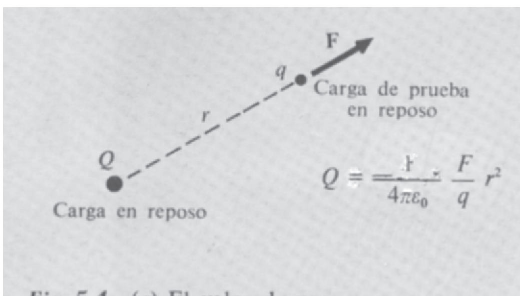
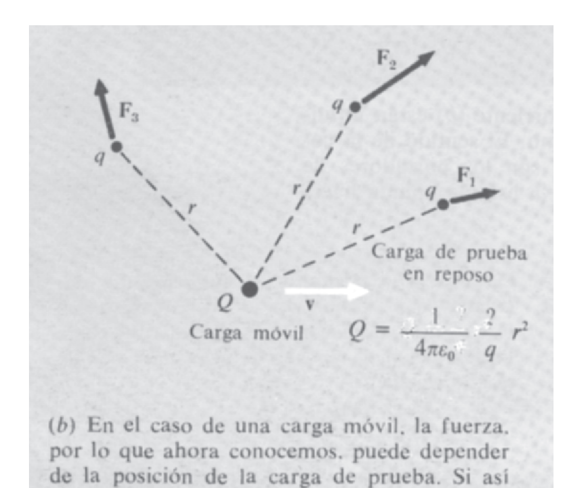
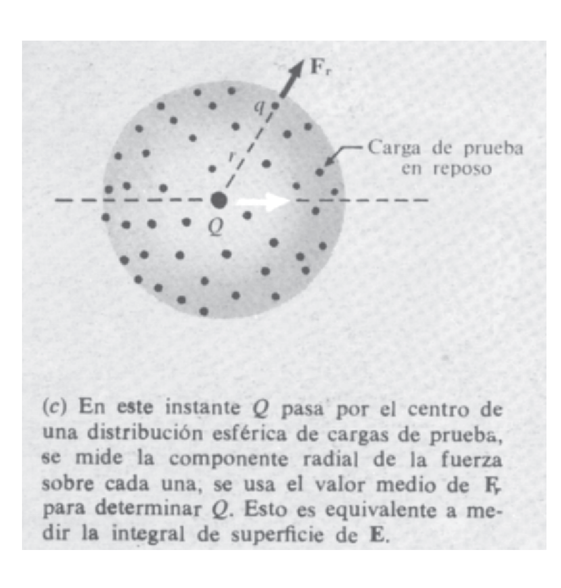


Fig. 5.4 (*a*) El valor de una carga en reposo se determina por la fuerza sobre una carga de prueba y la ley de Coulomb.



(*b*) En el caso de una carga móvil, la fuerza, por lo que ahora conocemos, puede depender de la posición de la carga de prueba. Si así es, no podemos usar el procedimiento (*a*).



(*c*) En este instante Q pasa por el centro de una distribución esférica de cargas de prueba, se mide la componente radial de la fuerza sobre cada una, se usa el valor medio de F_r para determinar Q. Esto es equivalente a medir la integral de superficie de **E**.

quieren las siguientes operaciones: Tomar una partícula de carga q conocida. Medir la fuerza sobre q en reposo, para determinar **E**. Medir luego la fuerza sobre la partícula cuando su velocidad es **v**; repetir con **v** en cualquier otra dirección. Hallamos ahora un **B** que haga que la Ec. 1 satisfaga todos estos resultados; éste es el campo magnético en el punto en cuestión.

Evidentemente esto no *explica* nada. ¿Por qué se cumple la Ec. 1? ¿Por qué *podemos* hallar siempre un **B** que satisfaga esta simple relación para todas las velocidades posibles? Queremos establecer por qué esta fuerza es proporcional a la velocidad. Lo más notable, es realmente, que esta fuerza sea estrictamente proporcional a **v** y que el efecto del campo eléctrico no dependa, en absoluto, de **v**. En las páginas siguientes veremos cómo acontece esto. Resulta que un campo **B** con estas propiedades *debe* existir si las fuerzas entre las cargas eléctricas obedecen a los postulados de la relatividad restringida. Desde este punto de vista las fuerzas magnéticas son un aspecto relativista de las cargas en movimiento.

En el apéndice A se da un resumen de las ideas y fórmulas esenciales de la relatividad restringida. Será una buena ocasión para leerlo de cabo a rabo.

5.3 *Medida de carga en movimiento*

¿Cómo vamos a medir la cantidad de carga eléctrica sobre una partícula móvil? Hasta que se establezca esta cuestión, es anodino preguntar el efecto que el movimiento tiene sobre la propia carga. Una carga solamente puede medirse por los efectos que produce. Una carga puntiforme Q que está en reposo, puede medirse determinando la fuerza que actúa sobre una carga de prueba q separada cierta distancia (Fig. 5.4*a*). Esto se basa en la ley de Coulomb. Pero si la carga que deseamos medir, se mueve, estamos en una base incierta. Ahora existe una dirección particular, la dirección instantánea del movimiento. Podría ser que la fuerza sobre la carga de prueba q dependiese de la *dirección* de Q a q, además de la distancia entre las dos cargas. Para diferentes posiciones de la carga de prueba, como en la Fig. 5.4*b*, observaríamos diferentes fuerzas. Sustituyéndolas en la ley de Coulomb nos conduciría a valores distintos para la misma cantidad Q. Hasta ahora tampoco tenemos seguridad de que la fuerza estará siempre en la dirección del radio vector **r**.

Para admitir esta posibilidad, convengamos en definir Q como promedio en todas direcciones. Imaginemos un gran número de cargas de prueba infinitésimas distribuidas uniformemente sobre una esfera (Fig. 5.4*c*). En el instante en que la carga móvil pasa por el centro de la esfera, se mide la fuerza sobre cada carga de prueba, y el valor medio de los módulos de estas fuerzas se utilizan para calcular Q. Ahora bien, esta operación sería precisamente la que se necesitaría para determinar la integral de superficie del campo eléctrico

sobre la esfera, en el instante t. Las cargas de prueba están aquí en reposo, recordemos: la fuerza sobre q por unidad de carga, por definición, nos da el campo eléctrico en este punto. Esto sugiere que, más que la ley de Coulomb, la ley de Gauss brinda la manera natural * de definir la cantidad de carga para una partícula cargada móvil, o para un conjunto de cargas móviles. Podemos componer una definición tal como sigue.

La cantidad de carga eléctrica en una región se define por la integral de superficie del campo eléctrico **E** extendida a una superficie S que comprenda la región. Esta superficie S está referida a cierto sistema coordenado de referencia F. El campo eléctrico **E** en un punto (x, y, z) en un instante t en F, se mide por la fuerza sobre una carga de prueba *en reposo en* F, en aquel instante y lugar. La integral de superficie ha de determinarse en un instante t particular. Es decir, los valores del campo que se utilizan son los que se han medido simultáneamente por observadores todos desplegados sobre S. (Esto no presenta dificultad, pues S es estacionaria en la referencia F.) A la integral de superficie sobre S, en el instante t, la denotamos por

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{2}$$

Definimos la cantidad de carga en el interior de S como $1/4\pi$ veces la integral:

$$Q = \varepsilon_0 \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{3}$$

Nos desconcertaría el que el valor de Q determinado así dependiese de la forma y tamaño de la superficie S. Para una carga estacionaria esto no ocurre — es la ley de Gauss. ¿Pero cómo sabemos que la ley de Gauss se cumple cuando las cargas son móviles? Afortunadamente se cumple. Podemos tomarlo como un hecho experimental. Esta propiedad fundamental del campo eléctrico de las cargas móviles nos permite definir la cantidad de carga por la Ec. 3. Desde ahora podemos hablar de la cantidad de carga en una región o en una partícula y esto tendrá un significado perfectamente definido incluso si la carga está en movimiento.

La Fig. 5.5 resume estas cuestiones con un ejemplo. Dos protones y dos electrones están en movimiento, en un instante determinado. Es cierto que la integral de superficie del campo eléctrico **E** sobre la superficie S_1 es precisamente igual a la integral de superficie sobre S_2

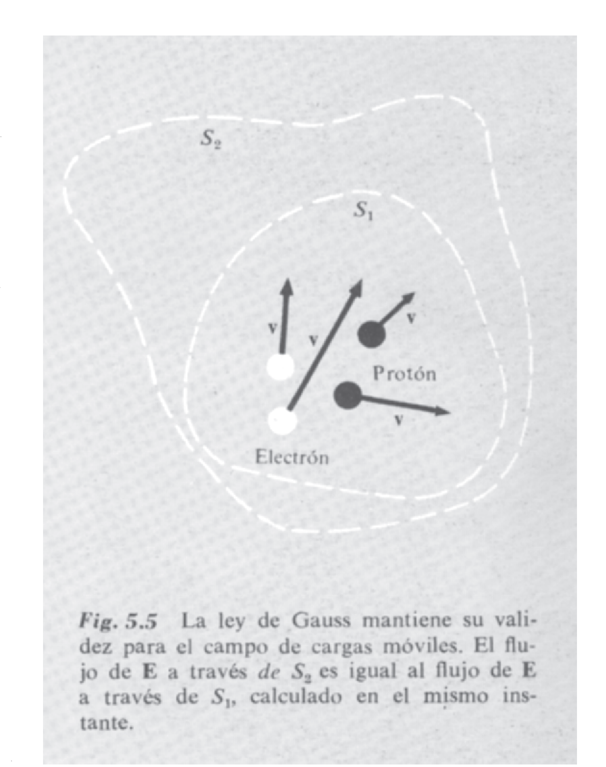


Fig. 5.5 La ley de Gauss mantiene su validez para el campo de cargas móviles. El flujo de **E** a través *de* S_2 es igual al flujo de **E** a través de S_1, calculado en el mismo instante.

* Ésta no es la única manera *posible*. Por ejemplo, podíamos adoptar la regla arbitraria de que la carga de prueba siempre debe estar colocada directamente por delante (en el sentido del movimiento) de la carga que ha de medirse. La carga definida así *no* tendría las propiedades simples que estamos dispuestos a discutir, y aquella teoría resultaría tosca y complicada.

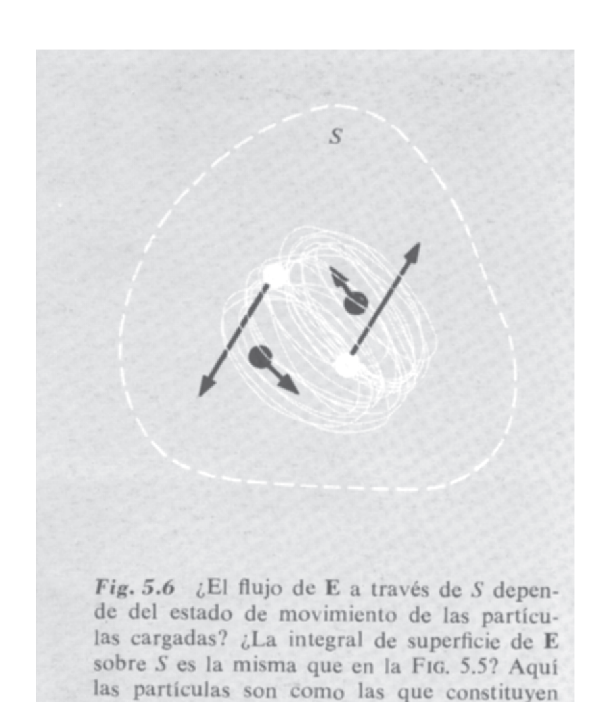


Fig. 5.6 ¿El flujo de **E** a través de S depende del estado de movimiento de las partículas cargadas? ¿La integral de superficie de **E** sobre S es la misma que en la FIG. 5.5? Aquí las partículas son como las que constituyen la molécula de hidrógeno.

calculada en el mismo instante, y podemos utilizar esta integral, como siempre hemos utilizado la ley de Gauss en electrostática, para determinar la carga total encerrada. La Fig. 5.6 promueve una nueva cuestión. ¿Qué ocurre si las mismas partículas tienen otras velocidades? Por ejemplo, supongamos que los dos protones y los dos electrones se combinan para formar una molécula de hidrógeno. ¿La carga total aparecerá exactamente igual que antes?

5.4 *Invariancia de la carga*

Existe evidencia experimental concluyente de que la carga total en un sistema, no varía por el movimiento de los portadores de carga. Estamos tan acostumbrados a tomarlo por supuesto, que raramente nos detenemos a pensar cuán notable y fundamental es este hecho. Para probarlo, podemos dirigirnos a la neutralidad eléctrica rigurosa de los átomos y moléculas. Ya hemos descrito, en el Cap. I, la prueba experimental de la neutralidad de la molécula de hidrógeno lo que demostró que el electrón y el protón transportan cargas iguales en valor absoluto, con error inferior a 1 por 10^{20}. Un experimento parecido se hizo con átomos de helio. Ahora bien, los átomos de helio contienen dos protones y dos electrones, las mismas partículas cargadas que forman la molécula de hidrógeno. En el átomo de helio su movimiento es muy diferente. En particular los protones en vez de girar lentamente separados 0,7 angstrom, están estrechamente ligados al núcleo de helio donde se mueven con energías cinéticas del orden de un millón de electrón volt. Si el *movimiento* tuviese efecto sobre la cantidad de carga, no podría haber anulación exacta entre la carga nuclear y la electrónica en *ambos*, átomo de helio y molécula de hidrógeno. En realidad, se demostró que el átomo de helio era neutro con casi la misma precisión experimental.

Otra evidencia proviene del espectro óptico de los isótopos del mismo elemento, átomos con distintas masas nucleares pero, nominalmente al menos, la misma carga nuclear. De nuevo hallamos aquí una marcada diferencia en el movimiento de los protones dentro del núcleo, pero la comparación de las líneas espectrales de las dos especies, no presentan discrepancia que pudiera atribuirse a ligera diferencia en la carga nuclear total.

La *masa* no es invariante de la misma manera. Sabemos que la masa de una partícula varía con su movimiento, en el factor $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Para subrayar la diferencia, mostramos en la Fig. 5.7 un experimento imaginario. En la caja de la derecha las dos partículas cargadas pesadas que están sujetas a los extremos de una varilla, que puede girar en torno un eje, se hace girar con celeridad v. La masa total en la derecha es *mayor* que la de la izquierda, como se demuestra pesando la caja con un dinamómetro o midiendo la fuerza necesaria

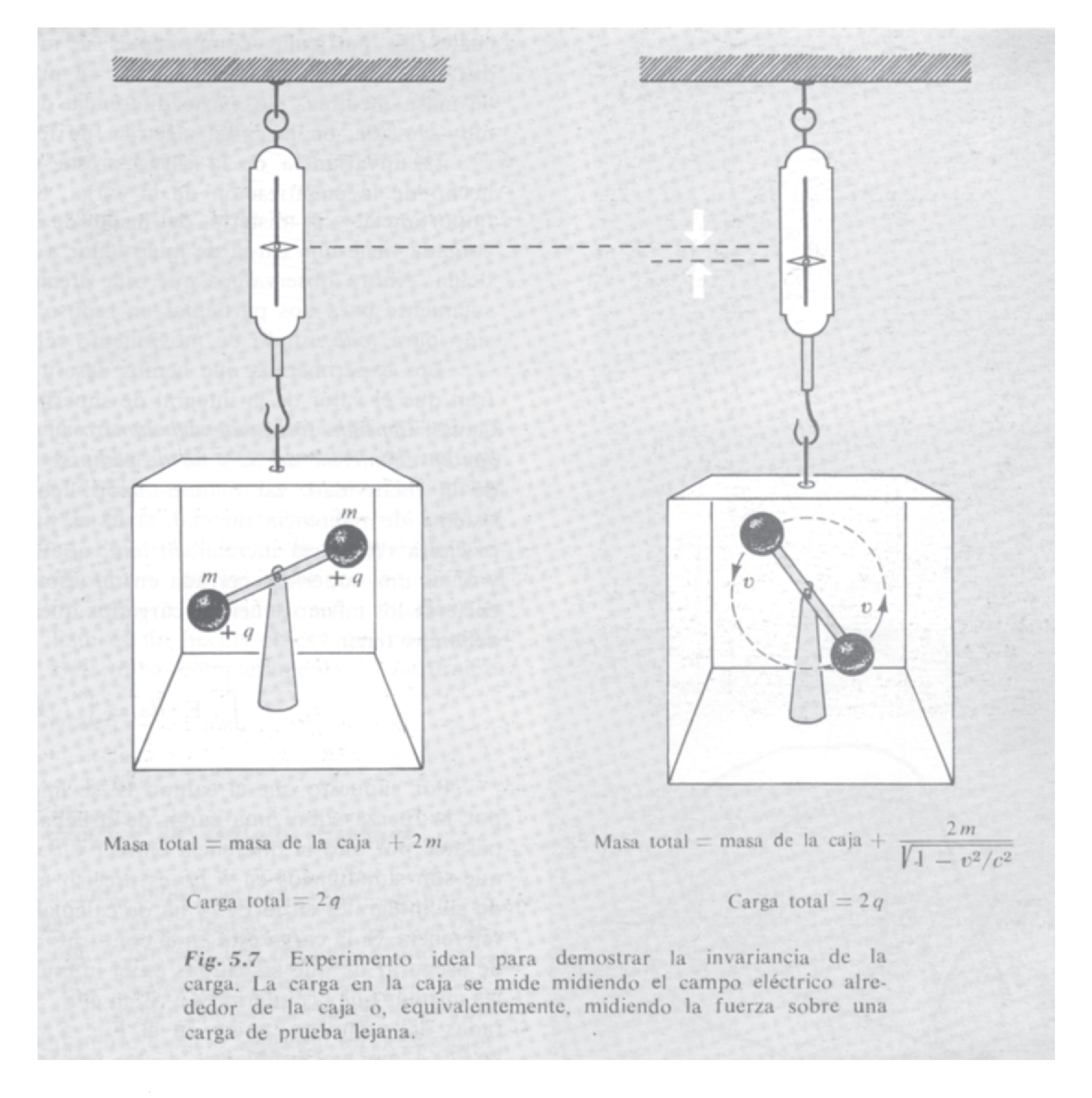


Fig. 5.7 Experimento ideal para demostrar la invariancia de la carga. La carga en la caja se mide midiendo el campo eléctrico alrededor de la caja o, equivalentemente, midiendo la fuerza sobre una carga de prueba lejana.

para acelerarla *. Sin embargo, la carga eléctrica total es invariable. Un experimento real equivalente a éste puede efectuarse con un espectrógrafo de masas, que puede revelar fácilmente una diferencia de masa entre una molécula de deuterio ionizado (2 protones, 2 neutrones, 1 electrón) y un átomo de helio ionizado (también 2 protones, 2 neutrones y 1 electrón). Estas estructuras son muy diferentes, en las

* La diferencia de masa no depende solamente de la energía cinética de las partículas sino también de toda variación en energía potencial como en las deformaciones elásticas en la varilla que une las partículas. Si la varilla es bastante rígida, esta contribución será pequeña comparada con el término v^2/c^2. Véase si se puede probar el por qué.

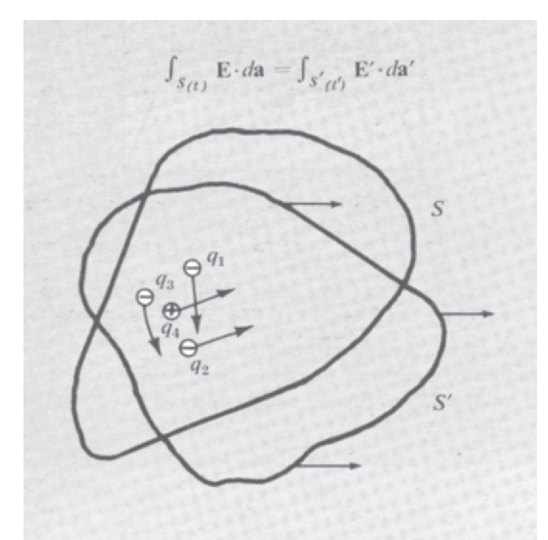


Fig. 5.8 La integral de superficie **E** sobre S es igual a la integral de **E**′ sobre S'. La carga es la misma en todos los sistemas de referencia.

cuales las partículas componentes se mueven con celeridades muy distintas. La diferencia de energía se presenta como una diferencia de masa medible. No existe diferencia detectable, con una precisión muy elevada, en la carga eléctrica de los dos iones.

La invariancia de la carga presta una especial importancia al hecho de la cuantización de la carga. Subrayamos en el Cap. I la importancia, y el misterio, del hecho de que cada partícula elemental cargada tiene una carga de igual valor a la de cualquier otra tal partícula. Ahora observamos que esta precisa igualdad se mantiene, no solamente para dos partículas en reposo una con respecto a la otra, sino para *todo* estado de movimiento relativo.

Los experimentos que hemos descrito, y algunos otros, demuestran que el valor de la integral de superficie $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ de nuestra ley de Gauss, *depende solamente del número y variedad de partículas cargadas en el interior de S, y no de cómo se mueven.* Según el postulado de la relatividad, tal manifestación debe ser cierta para *cualquier* sistema de referencia inercial, si lo es para uno. Por lo tanto si F' es cierta referencia inercial *distinta*, que se mueve con respecto a F, y S' es una superficie cerrada en *tal* sistema, la cual en el instante t' encierra los mismos cuerpos cargados que encerraba S en el instante t debemos tener

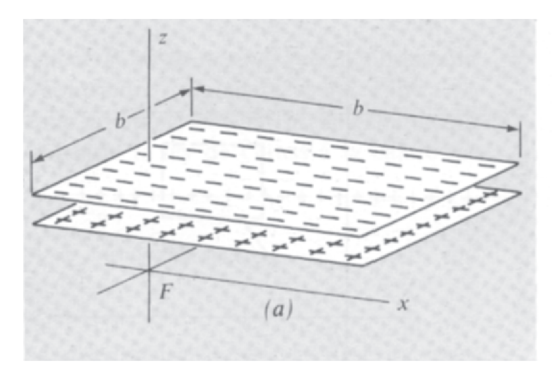
$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \tag{4}$$

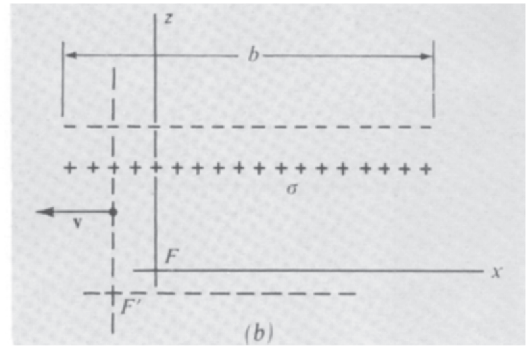
Por supuesto que el campo $\mathbf{E}'$ se mide en F', es decir, se define por la fuerza sobre una carga de prueba en reposo en F'. No debe pasarse por alto la diferencia entre t y t'. Como ya sabemos, sucesos que son simultáneos en F no es preciso que lo sean en F'. Cada una de las integrales en la Ec. 4 ha de calcularse, en cierto instante, en *su* referencia. Si la carga está en el contorno de S, o de S', ha de cuidarse de asegurar de que las cargas en el interior de S en el instante t, son las mismas que las interiores a S' en el t'. Si las cargas están bien separadas del contorno, como en la Fig. 5.8, que ilustra la relación de la Ec. 4, no hay problemas a este respecto.

La Ec. 4 es una expresión formal de la invariancia relativista de la carga. Podemos elegir nuestra superficie Gaussiana en *cierta* referencia inercial; la integral de superficie nos dará un número independiente de la referencia. Esto no es lo mismo que la conservación de la carga, que se estudió en el Cap. 4, y está expresada matemáticamente por la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{-\partial \rho}{\partial t}$$

La *conservación* de la carga implica que si tomamos una superficie cerrada fija en algún sistema coordenado, conteniendo materia cargada, y si las partículas no atraviesan el contorno, entonces la carga total





en el interior de esta superficie permanece constante. La *invariancia* de la carga implica que si consideramos este conjunto de materia desde cualquier otro sistema de referencia mediremos exactamente la misma cantidad de carga. La energía se conserva, pero la energía *no* es un invariante relativístico. En el lenguaje de la teoría de la relatividad, la energía es una componente de un cuadrivector, mientras que la carga es un escalar, un número invariante con respecto a la transformación de Lorentz. Este es un hecho observado, con implicaciones de largo alcance. Determina completamente la naturaleza del campo de cargas móviles.

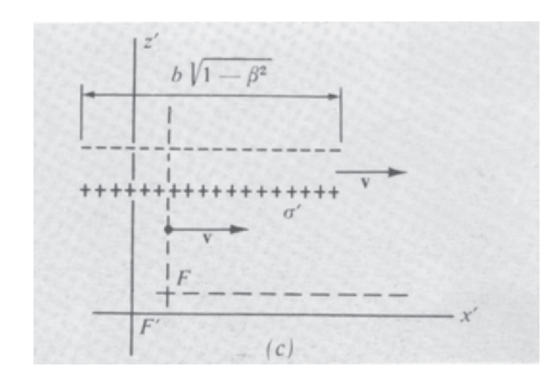
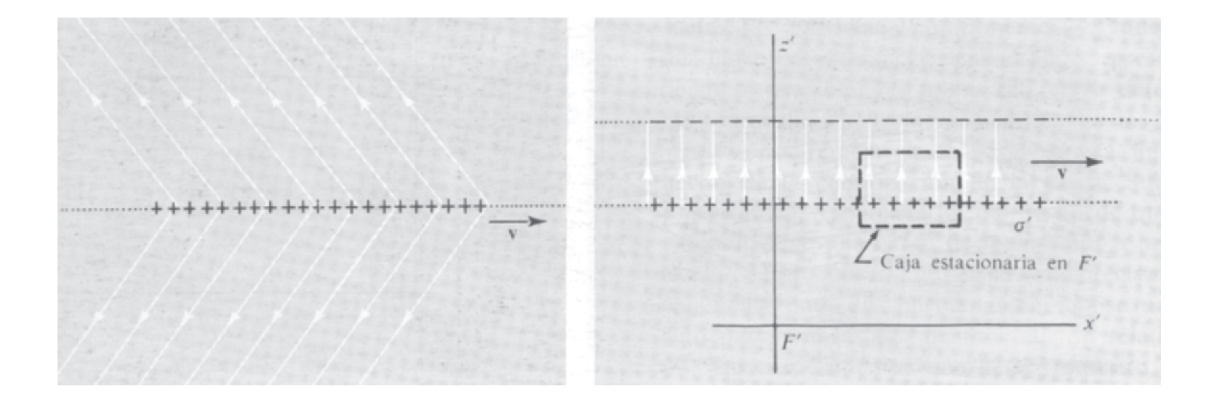


Fig. 5.9 Como se ve, el campo eléctrico en otro sistema de referencia (velocidad relativa perpendicular a la dirección del campo).
(*a*) Dos láminas de carga estacionaria de densidad uniforme.
(*b*) Sección recta del sistema visto en la referencia *F*.
(*c*) Sección recta del sistema visto en la referencia *F'*.

5.5 *Medida del campo eléctrico en distintos sistemas de referencia*

Si la carga ha de ser invariante, bajo una transformación de Lorentz, el campo eléctrico **E** ha de transformarse de una manera particular. « Transformar **E** » significa contestar una pregunta como ésta: Si un observador en cierta referencia inercial *F* mide un campo eléctrico **E** de tantos statvolt/cm, en un punto dado en el espacio y tiempo, qué campo medirá en el mismo punto espacio temporal un observador en distinta referencia inercial *F'*. Para cierta clase de campos, podemos contestar esta pregunta aplicando la ley de Gauss a algunos sistemas simples.

En la referencia *F* (Fig. 5.9*a*) tenemos dos láminas estacionarias de carga con densidad uniforme $+\sigma$ y $-\sigma$ C/m² respectivamente Son cuadrados de *b* cm de lado, que son paralelos al plano *xy*, y su separación se supone pequeña comparada con su extensión, de manera que el campo entre ellas pueda considerarse uniforme. El módulo de este campo, medido por un observador en *F* es, por descontado, $\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$. Ahora consideremos una referencia inercial *F'* que se mueva hacia la izquierda, con respecto a *F*, con velocidad **v**. Para un observador en *F'*, los « cuadrados » cargados ya no son cuadrados. Su dimensión *x'* se ha contraído de *b* a $b\sqrt{1-\beta^2}$ donde β vale v/c como de costumbre. Pero la carga total es invariante, es decir, independiente del



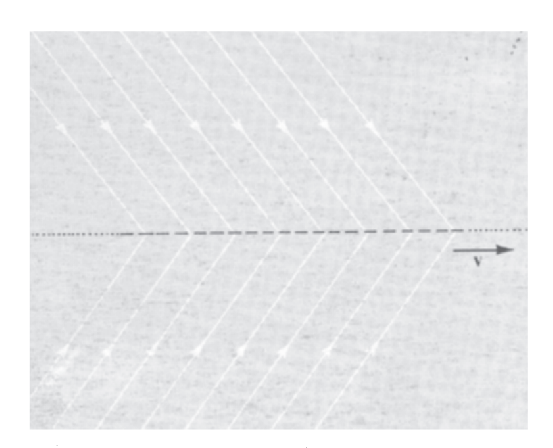


Fig. 5.10

(*a*) Apariencia hipotética del campo de una sola lámina móvil de carga positiva. (En realidad no lo es, pero aún no lo hemos probado).

(*b*) Apariencia hipotética del campo equiparable de una lámina de carga negativa.

(*c*) La superposición de los campos representados en (*a*) y en (*b*) se parecería a éste. Incluso si las Fig. 5.10*a* y 5.10*b* fueran correctas.

sistema de referencia, así que la *densidad* de carga medida en F' es *mayor* que σ, su relación es $1/\sqrt{1-\beta^2}$. La Fig. 5.9 muestra el sistema en sección recta, (*b*) tal como se ve en F y (*c*) como se ve en F'. ¿Qué podemos decir acerca del campo eléctrico en F', si todo lo que conocemos del campo eléctrico de las cargas móviles está contenido en la Ecuación 4?

Pero una cosa podemos afirmar, que el campo eléctrico es nulo en la parte exterior a las dos láminas y uniforme entre ellas, al menos en el límite cuando la extensión de las láminas se hace infinita. El campo de una lámina indefinida uniforme no depende de la distancia a la lámina, ni de la posición a lo largo de la misma. (No hay nada en el sistema para fijar una posición a lo largo de la lámina. Pero por todo lo que sabemos ahora, el campo de una sola lámina de carga móvil positiva *debe* parecerse a la Fig. 5.10*a*. Sin embargo, incluso así, el campo de una lámina de carga negativa móvil con la misma velocidad tendría que parecerse a la Fig. 5.10*b*, y la superposición de los dos campos además debería dar campo nulo en el exterior de las dos láminas cargadas, y un campo uniforme perpendicular a las mismas, entre ellas, como en la Fig. 5.10*c*. (Realmente como demostraremos en breve, el campo de una sola lámina de carga móvil en su propio plano es perpendicular a la lámina, distinto a los campos hipotéticos representados en la Fig. 10*a* y *b*.)

Podemos aplicar la ley de Gauss a una caja estacionaria en la referencia F', la caja representada en sección recta en la Fig. 5.10*c* La carga contenida se determina por σ', y el campo es nulo al exterior de las láminas. La ley de Gauss nos indica que el valor de E_z', que es la única componente del campo en el interior, debe ser $\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma'$ ó $\sqrt{1-\beta^2}$.

$$E_z' = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma E_z \tag{5}$$

Imaginemos ahora un caso distinto con las láminas cargadas estacionarias en la referencia F orientadas perpendicularmente al eje x, como en la Fig. 5.11. El observador en F ahora indica un campo en la

dirección x de valor $Ex = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$. En este caso, la densidad superficial de carga observada en la referencia F' es la *misma* que la observada en F. Las láminas no se han contraído, solamente se ha contraído la distancia entre ellas, pero ésta no interviene en la determinación del campo. Ahora hallamos, aplicando la ley de Gauss a la caja estacionaria en F':

$$E_x' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma = E_x \qquad (6)$$

Esto está muy bien para la distribución de cargas descrita, particularmente simple; ¿nuestras conclusiones tienen validez más general? Esta cuestión nos lleva al fondo del significado de *campo*. Si el campo eléctrico **E** en un punto espacio temporal ha de tener significado único, la manera en que **E** aparece en otros sistemas de referencia, en el mismo punto espacio temporal, no puede depender de la naturaleza de las fuentes que producen **E**, dondequiera que puedan estar. En otras palabras, el observador en F, habiendo medido el campo en este punto en cierto instante, debe ser capaz de predecir, *solamente de estas medidas*, lo que medirán los observadores en otros sistemas de referencia en el mismo punto espacio temporal. Si esto no fuese cierto, el *campo* sería un concepto inútil. La evidencia de que esto *es* cierto es el eventual acuerdo de nuestra teoría del campo con la experiencia.

Vistas con esta luz, las relaciones expresadas en las ecuaciones 5 y 6 toman un significado más allá del caso particular de las cargas en láminas paralelas. Consideremos *cualquier* distribución de cargas todas en reposo con relación a la referencia F. Si un observador en F mide un campo E_z en la dirección z, entonces un observador en la referencia F' indicará, para el mismo punto espacio temporal, un campo $E'_z = \gamma E_z$. Es decir, obtendrá un número, como resultado de su medida de E'_z, γ veces mayor que el número obtenido por el observador en F en su medida de E_z. Por otro lado, si el observador en F mide un campo E_x en la dirección x, la dirección de la velocidad de F' con respecto a F, el observador en F' indica un campo E'_x *igual* a E_x. Evidentemente las direcciones z e y son equivalentes al ser transversales a la velocidad **v**. Todo lo dicho para E'_z se aplica igualmente a E'_y. Sea cual fuere la dirección de **E** en la referencia F, podemos considerarlo como la superposición de campos en las direcciones x, y, z, y de la transformación de cada uno de ellos predecir el vector campo **E**$'$ en tal punto en F'. Resumamos esto con palabras apropiadas al movimiento relativo en cualquier dirección: Las cargas en reposo en la referencia F son la fuente de un campo **E**. Supongamos que la referencia F' se mueve con velocidad **v** relativa a F. En cualquier punto de F descomponemos **E** en una componente « longitudinal » $E_\parallel$ paralela a **v** y una componente transversal $E_\perp$ perpendicular a la dirección de **v**. En el mismo punto espacio temporal en F' el campo **E**$'$ se descompone en dos $E'_\parallel$ y $E'_\perp$, siendo $E'_\parallel$ paralelo a **v** y $E'_\perp$ perpendicular

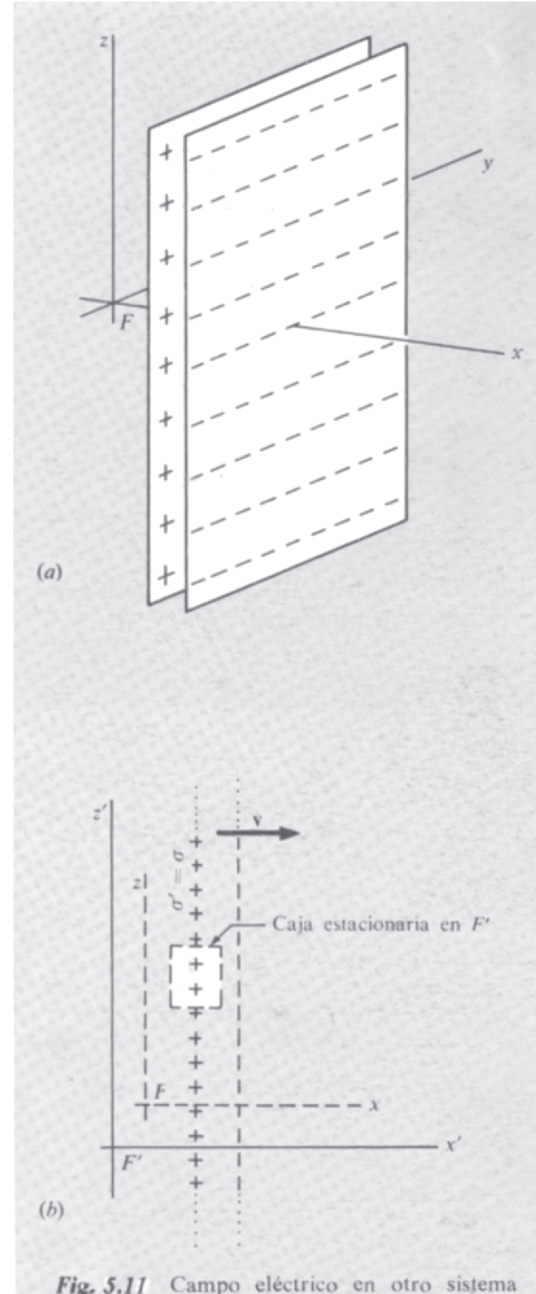


Fig. 5.11 Campo eléctrico en otro sistema de referencia (velocidad relativa paralela a la dirección del campo). (*a*) En la referencia F; (*b*) Sección recta en la referencia F'.

a ella. Hemos aprendido que

$$\boxed{\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= \gamma E_{\perp} \end{aligned}} \tag{7}$$

Nuestra conclusión se cumple solamente para campos originados por cargas estacionarias en F. Como veremos pronto, si las cargas en F se mueven, la predicción del campo eléctrico en F' implica el conocimiento de *dos* campos en F, el eléctrico y el magnético. Pero ya tenemos un resultado útil que es suficiente siempre que podamos hallar cualquier sistema de referencia inercial en el cual todas las cargas están en reposo. Lo usaremos ahora para estudiar el campo eléctrico de una carga puntiforme que se mueve con velocidad constante.

5.6 Campo de una carga puntiforme que se mueve con velocidad constante

En la referencia F la carga puntiforme Q está en reposo en el origen (Fig. 5.11*a*). En todo punto el campo eléctrico **E** tiene por módulo $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q/r^2$ y está dirigido radialmente hacia fuera. En el plano xz sus componentes, en el punto (x, z) son

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qx}{(x^2+z^2)^{3/2}} \\ E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qz}{(x^2+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Sea el sistema F' que se mueve en la dirección x, y sentido negativo, con celeridad v, con respecto a la referencia F. Necesitamos la relación entre las coordenadas de un suceso en las dos referencias, para lo cual usamos la transformación de Lorentz dada en la Ec. 2 del Apéndice A. Simplifica la descripción el suponer, como estamos libres de hacerlo, de que los dos orígenes coinciden en el instante cero según los observadores en ambos sistemas. Dicho de otro modo, este suceso, la coincidencia de los orígenes, puede ser el suceso A referido a la Ec. 2, con coordenadas $x_A = 0$, $y_A = 0$, $z_A = 0$, $t_A = 0$ en la referencia F y $x'_A = 0$, $y'_A = 0$, $z'_A = 0$, $t'_A = 0$ en la referencia F'. Entonces el suceso B es el punto espacio temporal que intentamos localizar. Podemos omitir el subíndice B y llamar a las coordenadas en F simplemente x, y, z, t y a las coordenadas en F', x', y', z', t'. Entonces la Ec. 2 del Apéndice A se convierte en

$$x' = \gamma x - \gamma\beta ct, \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta x}{c}$$

Sin embargo, *estas* transformaciones eran para una referencia F' moviéndose en el sentido positivo con respecto a F, como puede comprobarse notando que al aumentar el tiempo t, x' se hace más pequeña. Para escribir la transformación de Lorentz para nuestro problema, en el cual la referencia F' se mueve en sentido contrario, debemos inver-

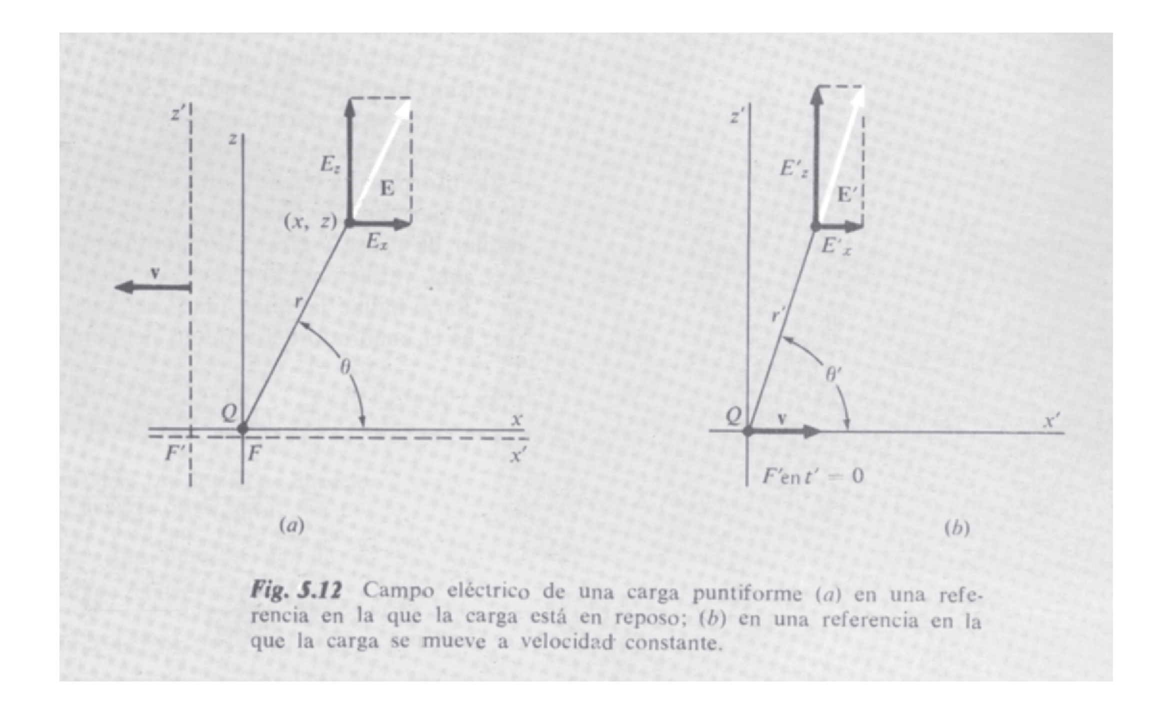


Fig. 5.12 Campo eléctrico de una carga puntiforme (*a*) en una referencia en la que la carga está en reposo; (*b*) en una referencia en la que la carga se mueve a velocidad constante.

tir el signo de β o conmutar las primas. Elegimos la última a causa de que queremos expresar x y z en función de x' y z'. La transformación de Lorentz que necesitamos es por tanto

$$x = \gamma(x' - \beta ct') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' - \frac{\beta x'}{c}\right) \tag{9}$$

Según las ecuaciones 5 y 6, $E'_z = \gamma E_z$ y $E'_x = E_x$. Usando las ecuaciones 8 y 9 podemos expresar las componentes del campo E'_z y E'_x en función de las coordenadas en F'. En el instante $t' = 0$, cuando Q pasa por el origen en F', tenemos:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma Q x'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \\ E'_z &= \gamma E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma Q z'}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^{3/2}} \end{aligned} \tag{10}$$

Advirtamos primero que $E'_z/E'_x = z'/x'$. Esto nos indica que el vector $\mathbf{E}'$ forma el mismo ángulo con el eje de las x' que el radio vector $\mathbf{r}'$. De aquí que $\mathbf{E}'$ se dirige radialmente hacia fuera a lo largo de una recta trazada desde la posición instantánea de Q', como en la Fig. 5.11*b*. Detengámonos un momento para profundizar en esta conclusión. Significa que si Q pasó por el origen del sistema prima precisamente a las 12,00 del mediodía, « tiempo prima », un observador estacionado en cualquier punto del sistema prima expresará que el campo eléctrico en este punto, a las 12,00 del mediodía, estaba dirigido exactamente radialmente desde el origen. Esto suena al pronto

como transmisión instantánea de información. ¿Cómo puede conocer, un observador distante un kilómetro, la posición de una partícula en el mismo instante? No puede. Esto no estaba sobreentendido. Recordemos que esta partícula se movía siempre a velocidad constante, en un « plan de marcha » que le exigía pasar por el origen al mediodía. Esta información ha sido utilizable durante largo tiempo. Es el pasado de la partícula lo que determina el campo observado, si se desea hablar de causa y efecto. Preguntaremos en breve qué ocurre cuando hay una variación imprevista en el plan de marcha.

Para hallar la intensidad del campo, calculamos $E_x'^2 + E_z'^2$ que es el cuadrado del módulo del campo, E'^2.

$$E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{\gamma^2 Q^2 (x'^2 + z'^2)}{[(\gamma x')^2 + z'^2]^3}$$

$$= \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Q^2(x'^2 + z'^2)}{\gamma^4 [x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2]^3}$$

$$= \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{Q^2(1 - \beta^2)^2}{(x'^2 + z'^2)^2 \left(1 - \dfrac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2}\right)^3} \tag{11}$$

(En este caso es mejor que figure β en la expresión.) Si r' representa la distancia desde la carga Q, que está momentáneamente en el origen, al punto (x', z') donde se mide el campo: $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$. Si θ representa el ángulo entre este radio vector y la velocidad de la carga Q, que se mueve en la dirección de las x' y sentido positivo en la referencia F', entonces ya que $z' = r' \operatorname{sen} \theta'$, el módulo del campo puede escribirse:

$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta')^{3/2}} \tag{12}$$

No hay nada especial acerca del origen de coordenadas, ni acerca del plano $x'z'$ comparado con cualquier otro plano a lo largo del eje x'. Por lo tanto podemos decir de manera completamente general que el campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme, en cierto instante dado, está dirigida radialmente desde la posición instantánea de la carga, y su módulo está dado por la Ec. 12 siendo θ' el ángulo entre la dirección del movimiento de la carga y el radio vector que va de la posición instantánea de la carga al punto de observación.

Para velocidades pequeñas el campo se reduce simplemente a $E' \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q/r'^2$ y es prácticamente igual, en cada instante, al campo de una carga puntiforme estacionaria en F' en la posición instantánea de Q. Pero si β^2 no es despreciable, el campo es más intenso en la dirección perpendicular al movimiento que en la dirección del movimiento, a igualdad de distancias a la carga. Si indicásemos la intensidad de campo por la densidad de líneas de campo, como se hace a

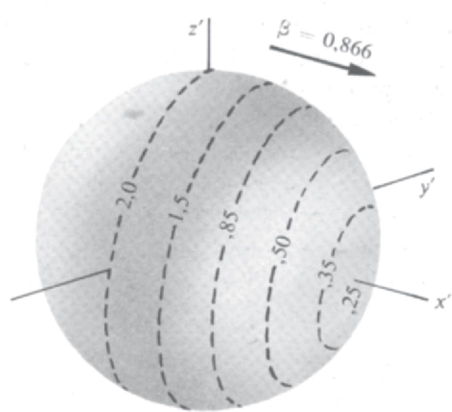


Fig. 5.13 Intensidad en distintas direcciones del campo de una carga móvil. En este instante la carga pasa por el origen de la referencia x'y'z'. Los números dan la intensidad del campo relativa a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q/r'^2$.

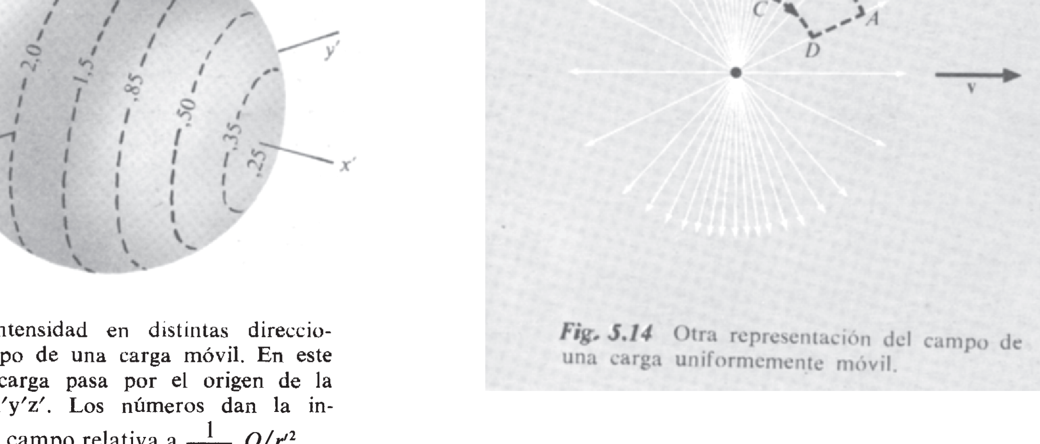


Fig. 5.14 Otra representación del campo de una carga uniformemente móvil.

menudo, las líneas tienden a concentrarse en un plano perpendicular a la dirección del movimiento. La Fig. 5.13 indica la densidad de líneas que atraviesan una esfera unidad, debidas a una carga móvil en la dirección x' con tal celeridad que $v/c = 0{,}866$. En la Fig. 5.14 se ve una representación más simple del campo, en la que la sección recta indica algunas líneas de campo en el plano indicado $x'\,z'$*.

Éste es un campo eléctrico notable. No tiene simetría esférica, lo cual no nos sorprende porque en esta referencia hay una dirección privilegiada, la dirección del movimiento de la carga. Sin embargo, el campo es simétrico respecto un plano perpendicular a la dirección del movimiento de la carga. A propósito, esto es suficiente para probar que el campo de una lámina de carga uniforme que se mueva en su plano debe ser perpendicular a la lámina. Consideremos este campo como la suma de los campos de los elementos de carga distribuidos uniformemente sobre la lámina. Ya que cada uno de estos campos individuales tiene la simetría de popa a proa de la Fig. 5.14 con respecto al sentido del movimiento, su suma no podría ser perpendicular a la lámina. No podría parecerse a la Fig. 5.10*a*.

El campo de la Fig. 5.14 es un campo que no podría producir *ninguna distribución estacionaria de cargas,* sea cual fuere su forma, pues, en este campo, la integral curvilínea de $\mathbf{E}'$ a lo largo de un camino

* Un diagrama *bidimensional* como el de la Fig. 5.14 no puede representar fielmente la intensidad del campo por la densidad de líneas de campo. A menos que despreciemos arbitrariamente algunas de las líneas, la densidad de líneas disminuye en la representación como $1/r'$, mientras que la intensidad del campo que intentamos representar disminuye como $1/r'^2$. Así que la Fig. 5.14 da solamente una indicación cualitativa de la variación de E' con r' y θ'.

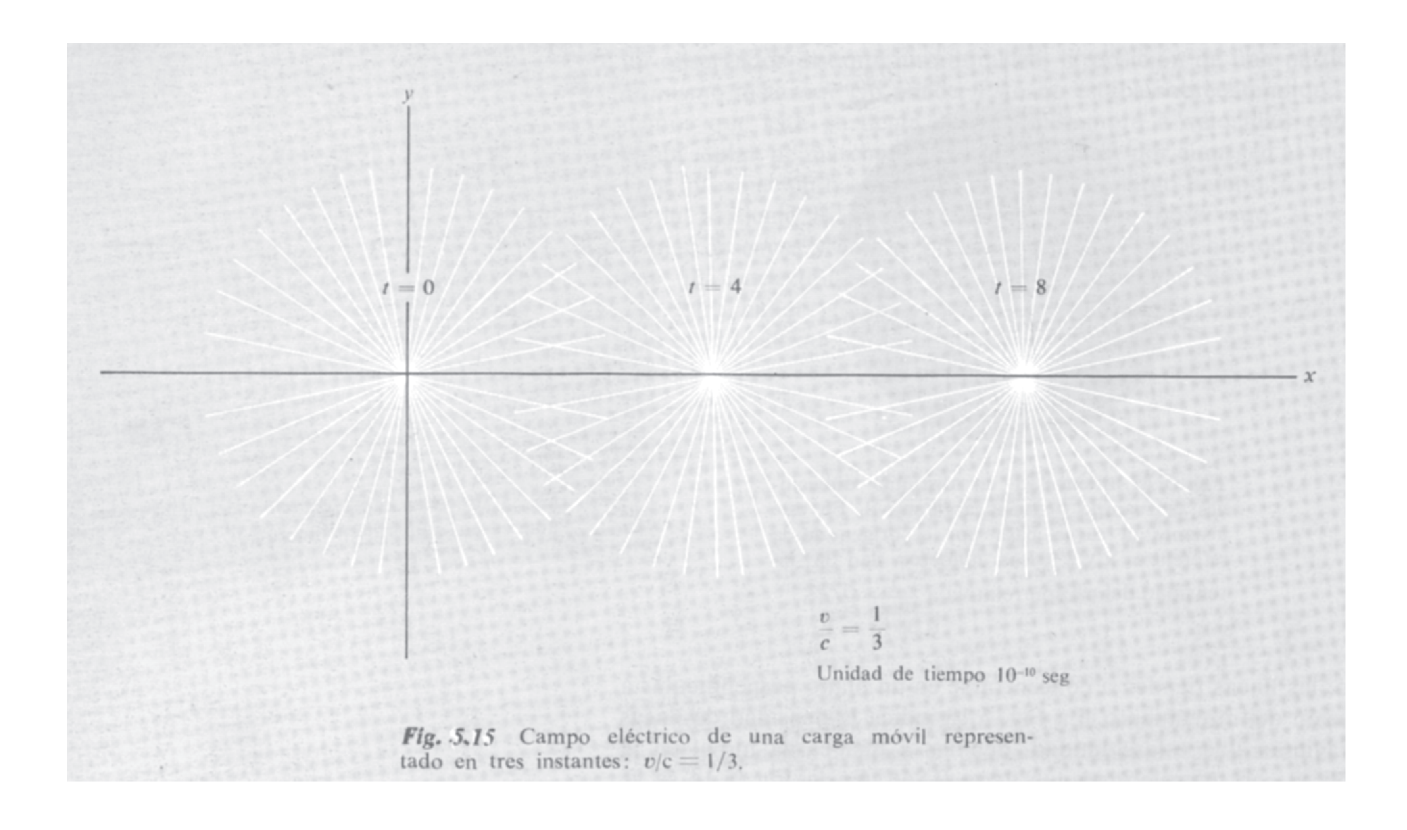


Fig. 5.15 Campo eléctrico de una carga móvil representado en tres instantes: $v/c = 1/3$.

cerrado *no es nula*. Por ejemplo, consideremos el camino cerrado *ABCD* en la Fig. 5.14. Los arcos circulares no contribuyen a la integral curvilínea, por ser perpendiculares al campo; en las secciones radiales el campo es *más intenso* a lo largo de *BC* que a lo largo de *DA*, así que la *circulación* de **E**', en este camino no es nula. Pero, tengamos presente que éste no es un campo electrostático. En el transcurso del tiempo el campo eléctrico **E**', en cada punto de referencia *F*', varía al moverse la carga fuente.

La Figura 5.15 presenta el campo eléctrico en ciertos instantes, observado en un sistema de referencia a través del cual un electrón se mueve a velocidad constante en la dirección *x* *. En la Fig. 5.15 la celeridad del electrón es 0,33*c*, su energía cinética es por lo tanto de unos 30 000 electrón-volt. (30 keV). El valor de β^2 es 1/9 y el campo eléctrico no difiere mucho del de una carga en reposo. En la Fig. 5.15, la celeridad es 0,8*c*, correspondiente a una energía cinética de 335 keV. Si se toma en cada diagrama la unidad de tiempo $1{,}0 \times 10^{-10}$ s, la esca-

* Precisamente teníamos la carga en reposo en la referencia no prima, móvil en la referencia prima. Aquí adoptamos *x y z* para la referencia en la que la carga se mueve para evitar confusión en las discusiones subsiguientes con primas.

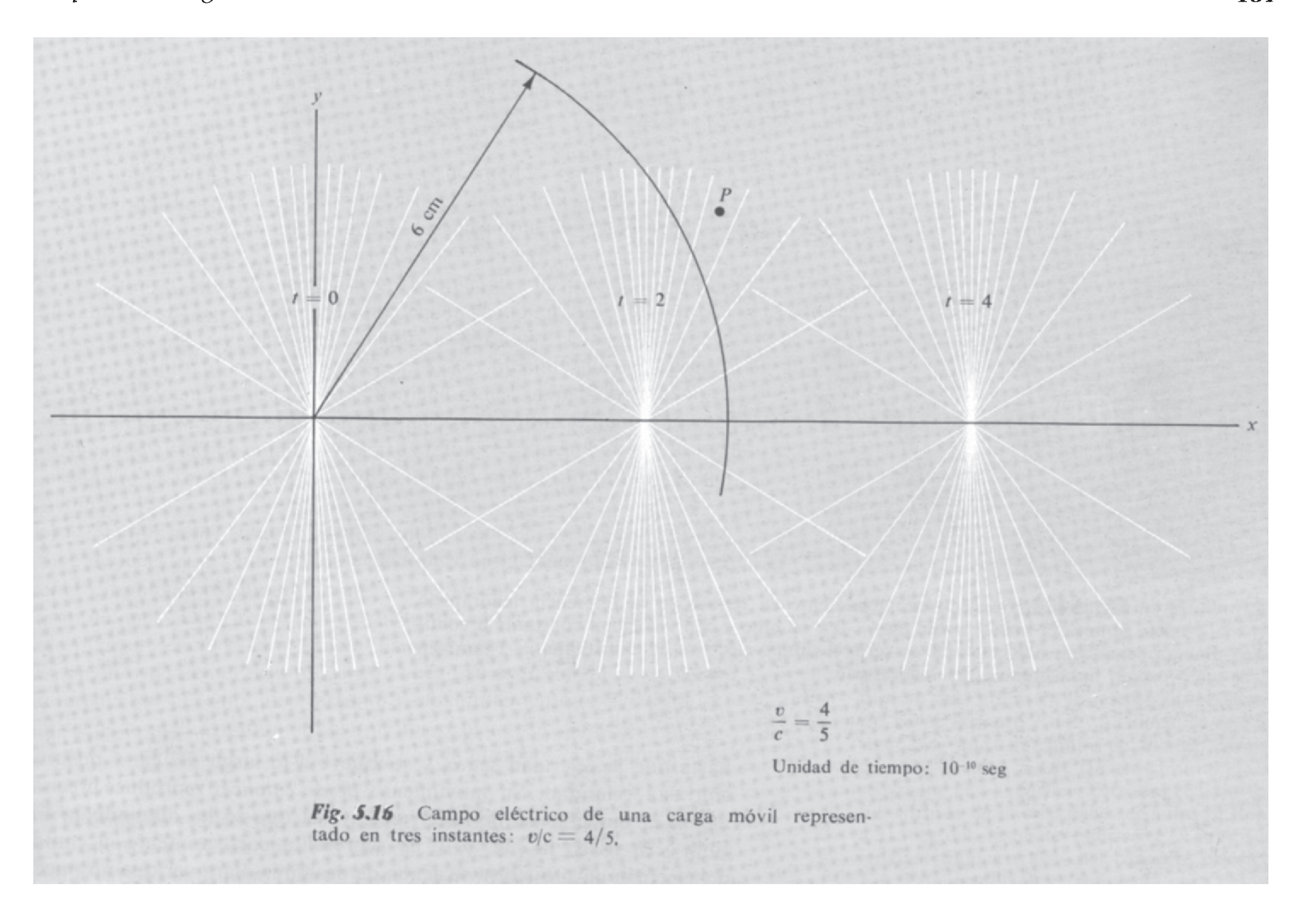


Fig. 5.16 Campo eléctrico de una carga móvil representado en tres instantes: $v/c = 4/5$.

la real de distancias es la dibujada. Por descontado que el diagrama se mantiene para *cualquier* partícula que se mueva a la fracción de la velocidad de la luz especificada. Mencionamos las energías equivalentes para un electrón, simplemente, para recordar al lector que las celeridades relativistas no son extraordinarias en el laboratorio.

5.7 *Campo de una carga que arranca o para*

Debe establecerse claramente que *velocidad uniforme,* tal como hemos usado este término, significa un movimiento a celeridad constante, en línea recta, que siempre ha estado en movimiento. ¿Qué ocurre si nuestro electrón *no* había estado viajando anteriormente a lo largo del eje negativo de las x hasta que entró en nuestro diagrama a $t = 0$? Supongamos que había estado tranquilamente en reposo en el origen esperando que el reloj indique $t = 0$. Inmediatamente antes de $t = 0$, algo comunica al electrón una gran aceleración brusca,

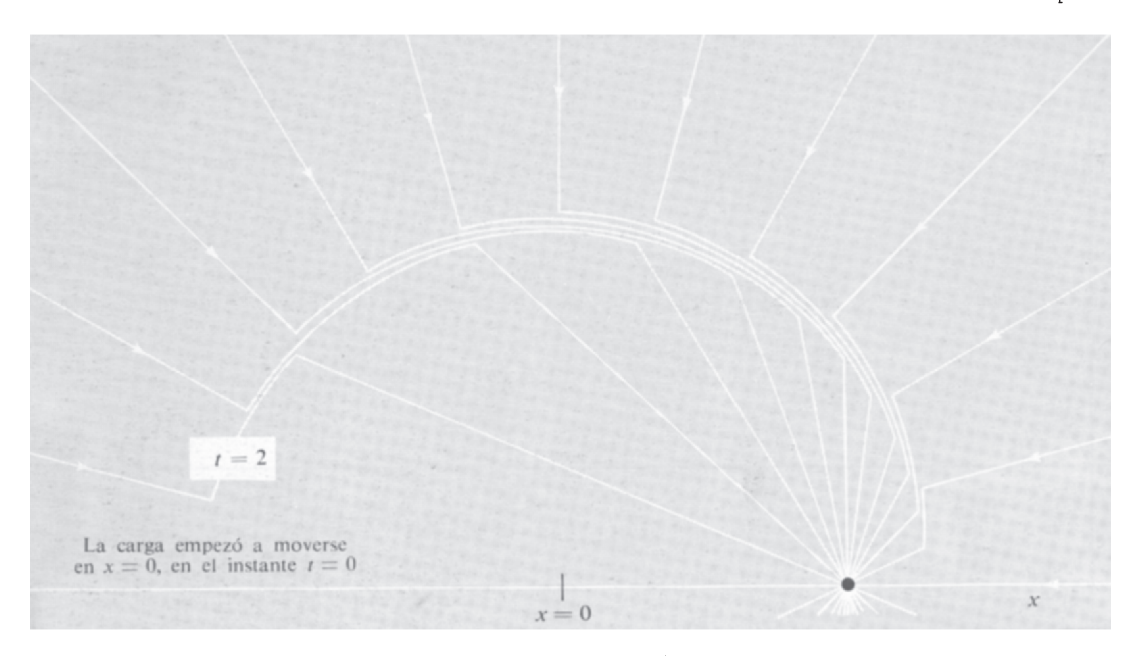


Fig. 5.17 Un electrón inicialmente en reposo en la referencia laboratorio se acelera bruscamente en $t = 0$ y se mueve con velocidad constante a continuación. Esto es cómo se vería el campo eléctrico en el instante $t = 2$ también en la referencia del laboratorio.

hasta que la celeridad sea v, y se mueve a lo largo del eje x positivo con esta celeridad. Su movimiento *desde entonces* reproduce precisamente el movimiento del electrón para el que se ha dibujado la Figura 5.16. Pero la Fig. 5.16 *no* representa correctamente el campo del electrón cuya historia se acaba de describir. Para ver que no puede hacerlo así, consideremos el campo en el punto P en el instante $t = 2$, que significa 2×10^{-10} s. En 2×10^{-10} s una señal luminosa recorre 6 cm. Ya que este punto se encuentra a una distancia del centro mayor que 6 cm, no puede haber recibido la noticia de que el electrón ha empezado a moverse en $t = 0$. A menos que haya una gran violación de la relatividad —y estamos tomando los postulados de là relatividad como base para toda la discusión— el campo en el punto P en el instante $t = 2$, y en realidad en todos los puntos exteriores a la esfera de radio 6 cm con centro en el origen, *debe ser el campo de una carga en reposo en el origen.*

Por otro lado, cerca de la misma carga móvil, lo que ocurrió en el pasado no puede ocasionar diferencia. El campo debe variar de algún modo, según consideremos regiones cada vez más alejadas de la carga, en el instante $t = 0$, del campo mostrado en el segundo diagrama de la Fig. 5.16 al campo de una carga en el origen. No podemos decir otra cosa que esto sin conocer cuán veloz se propaga la información. Supongamos — acabamos de suponer — que se mueve tan veloz como sea posible sin chocar con los postulados de la relatividad. Entonces

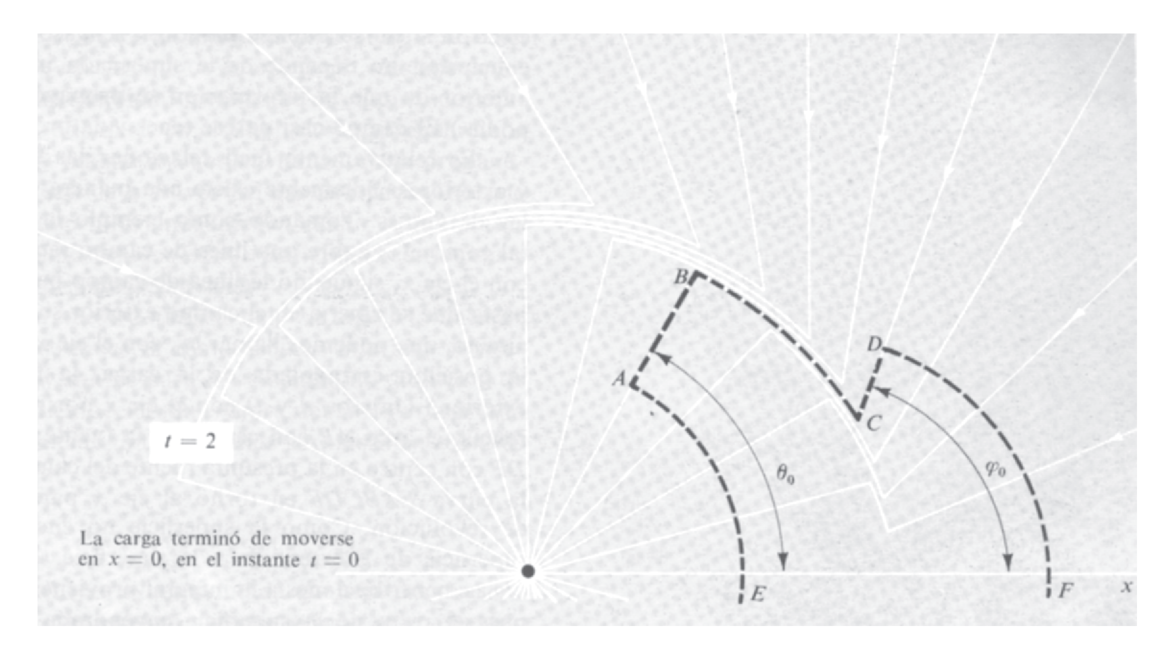


Fig. 5.18 Una carga que se ha estado moviendo a velocidad constante alcanza el origen en $t = 0$, se decelera bruscamente para pararla, y luego queda en reposo. Éste es el aspecto del campo en la referencia laboratorio en el instante $t = 2$. La línea de trazos sigue una línea de campo de *A* a *D*. Girando toda la línea *EABCDF* en torno al eje *x* se genera una superficie cerrada, el flujo total a través de la cual debe ser nulo. El flujo a través del casquete esférico *FD* debe ser igual al flujo a través del casquete esférico *EA*. Esta condición es suficiente para determinar la relación entre θ y φ_0.

si el período de aceleración se desprecia, contaríamos con que el campo en el interior de la esfera de 6 cm de radio, a $t = 2$, sea el campo de una carga puntiforme que se mueve uniformemente. Si esto es así, el campo del electrón que parte del reposo, y adquiere bruscamente la celeridad v en $t = 0$, debe parecerse al representado en la Fig. 5.17. Existe una capa esférica delgada (cuyo espesor en un caso real dependerá de la duración del intervalo requerido para la aceleración) dentro del cual tiene lugar la transición de un tipo de campo a otro. Esta capa se dilata simplemente con celeridad c, permaneciendo su centro en $x = 0$. Las puntas de flecha de las líneas de campo indican el sentido del campo cuando la fuente es una carga negativa, como hemos supuesto.

En la Fig. 5.18 se representa el campo de un electrón que se ha estado moviendo con velocidad uniforme *hasta* $t = 0$, en cuyo instante alcanza $x = 0$ y en donde se *paró* bruscamente. Ahora bien, la noticia de que se detuvo no puede alcanzar, en un tiempo t, ningún punto más alejado que ct del origen. El campo en el exterior de la esfera de radio $R = ct$ debe ser el que prevalecería si el electrón hubiese mantenido el movimiento con su celeridad original. Esto explica por qué vemos el «cepillo» de las líneas de campo a la derecha en la Fig. 5.18 dirigidas precisamente hacia la posición donde estaría el

electrón si no se hubiese parado. (Téngase en cuenta que esta última conclusión no depende de la suposición introducida en el parágrafo anterior de que la información se propagaba tan rápidamente como podía.) El campo casi parece tener vida propia.

Es relativamente fácil relacionar las líneas de campo interiores y exteriores. Solamente existe una manera que esté de acuerdo con la ley de Gauss. Tomando como ejemplo la Fig. 5.18, desde un punto tal como el A sobre una línea de campo radial que forma un ángulo θ_0 con el eje x, siguiendo la línea de campo por dondequiera que se dirija hasta que se emerja en el campo exterior sobre una línea que forma un ángulo, que podemos llamar φ_0, con el eje x. (Esta línea es radial desde la posición extrapolada de la carga, la fuente evidente del campo exterior.) Unimos A y D con el eje x por medio de arcos de circunferencia, el arco AE con centro en la fuente del campo interior, el arco DF con centro en la presunta fuente del campo exterior. Hagamos gira la curva $EABCDF$ en torno al eje x para engendrar una superficie de revolución. Como la superficie no encierra carga, la integral de superficie de **E** extendida a la superficie total debe de ser nula. Las únicas contribuciones a la integral provienen de los casquetes esféricos, pues el resto de la superficie engendrada por $ABCD$ es paralela al campo por su misma construcción. El campo sobre el casquete interior es el campo de una carga puntiforme en reposo; el campo sobre el casquete exterior es el campo de una carga puntiforme, como el dado por la Ec. 12, moviéndose con celeridad constante, que se habría localizado, en ese momento, en $x = 2v$. Si se resuelve el Problema 5.11, se encontrará que la condición «flujo a través de un casquete igual a flujo a través del otro» requiere

$$\text{tg } \phi_0 = \gamma \text{ tg } \theta_0 \tag{13}$$

La presencia de γ en esta fórmula no es sorprendente. Ya hemos advertido la «compresión relativista» de la representación del campo de una carga moviéndose rápidamente, ilustrada en la Fig. 5.14. El nuevo aspecto importante de la Fig. 5.18 es el zigzag en la línea de campo $ABCD$. La causa de esto no es la γ de la Ec. 13, sino el hecho de que la fuente aparente del campo exterior está desplazada de la fuente del campo interior. Si AB y CD pertenecen a la misma línea de campo, el segmento que los conecta, BC, ha de estar *casi perpendicular* a un vector radial. Aquí tenemos un campo eléctrico transversal, y uno que, a juzgar por lo apretado de las líneas de campo, es relativamente intenso comparado con el campo radial. En el transcurso del tiempo el zigzag en las líneas de campo se moverá radialmente hacia fuera con celeridad c. Pero el espesor de la capa de campo transversal no aumentará, pues éste se determinó por la duración del proceso de deceleración.

La capa siempre en expansión del campo eléctrico transversal prosigue *incluso si* en cierto instante posterior —digamos para $t = 3$— aceleramos bruscamente a su velocidad original. Esto solamente daría origen a una nueva capa que iría hacia fuera y tendría un aspecto muy

parecido al campo de la Fig. 5.17. El campo *tiene* vida propia! Lo que se ha creado aquí delante de nuestros ojos es una *onda electromagnética.* El campo magnético que también forma parte de ella no se representa en este esquema. Más adelante, en el Capítulo 9, aprenderemos cómo los campos eléctrico y magnético actúan juntos en la propagación de una perturbación eléctrica a través del espacio vacío. Lo que hemos descubierto aquí es que tales ondas *deben* existir si la naturaleza está de acuerdo con los postulados de la relatividad restringida y la carga eléctrica es un invariante relativista.

Se puede hacer más con nuestro análisis del «zigzag de la línea de campo». En el Apéndice B se muestra cómo deducir, más bien simplemente, una fórmula precisa y simple para la velocidad de radiación de energía por una carga eléctrica acelerada. Ahora debemos volver a la carga moviéndose uniformemente, que tiene más sorpresas en reserva.

5.8 Fuerza sobre una carga móvil

La Ec. 12 nos indica la fuerza experimentada por una carga estacionaria en el campo de otra carga que se mueve a velocidad constante. Ahora preguntamos una cuestión distinta: ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre una carga móvil, la cual se mueve en el campo de otras cargas? Primero consideremos el caso de una carga que se mueve en el campo producido por cargas estacionarias. Podría ser un electrón moviéndose entre las placas cargadas de un osciloscopio, o una partícula alfa moviéndose en el campo culombiano cerca del núcleo atómico. Las fuentes del campo, en cada caso están en reposo en cierto sistema de referencia que llamamos « lab ». En cierto lugar y tiempo, en la referencia « lab » observamos una partícula con carga q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, en este instante, en el campo electrostático. ¿Qué fuerza actúa sobre q?

La fuerza es sólo un nombre para la derivada temporal de la cantidad de movimiento, así que estamos realmente preguntando cuál es la variación de la cantidad de movimiento de la partícula, $d\mathbf{p}/dt$, en este lugar y tiempo, medida en nuestro sistema de referencia « lab »? (Esto es todo lo que entendemos por fuerza sobre una partícula móvil.) La respuesta está implícitamente contenida en lo que ya hemos aprendido. Consideremos el sistema desde una referencia F' que se mueve *con* la partícula, en el instante en cuestión. En esta referencia « partícula » la partícula estará en reposo, al menos momentáneamente. Son las otras cargas las que se mueven ahora. Este caso ya lo conocemos. La fuerza sobre la carga estacionaria q es precisamente $\mathbf{E}'q$ donde $\mathbf{E}'$ es el campo eléctrico observado en la referencia F'. Entonces sabemos hallar $\mathbf{E}'$ dado $\mathbf{E}$. La Ec. 7 es la que nos lo da. Así que conociendo $\mathbf{E}$ podemos hallar la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de la partícula observada en F'. Todo esto se mantiene al transformar *esta* cantidad a F. Así que nuestro problema gira en torno de la cuestión de cómo se transforma la fuerza, es decir, la derivada temporal de la cantidad de movimiento, de un sistema inercial a otro.

La respuesta a esta pregunta se da más adelante y está expresada por las Ec. 12 y Ec. 13 del Apéndice A. La componente de la fuerza *paralela* al movimiento relativo de las dos referencias tiene el *mismo* valor en la referencia móvil que en la referencia en reposo de la partícula. La componente de la fuerza *perpendicular* a la velocidad relativa de la referencia siempre es *menor,* en $1/\gamma$, que su valor en la referencia de la partícula en reposo. Resumimos esto en la Ec. 14, usando los subíndices $\perp$ y $\parallel$ para indicar las componentes de la cantidad de movimiento perpendicular y paralela a la velocidad relativa de F' y F, como se hizo en la Ec. 7.

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'}$$
$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp'_{\perp}}{dt'} \qquad (14)$$

Adviértase que ésta no es una relación simétrica entre las cantidades prima y no prima. La referencia en reposo de la partícula, a la que hemos elegido llamar F' en este caso, es especial. En la misma, el valor de la componente transversal de la fuerza es mayor que en cualquier otra referencia.

Equipados con la ley de transformación de la fuerza, Ec. 14, y la ley de transformación para el campo eléctrico, Ec. 7, volvamos ahora a nuestra partícula cargada moviéndose a través del campo eléctrico **E**, y hallamos un hecho sorprendentemente simple. Consideremos primero $E_{\parallel}$, la componente de **E** paralela a la dirección instantánea del movimiento de nuestra partícula cargada. La transformamos a una referencia F' que, en este instante, se mueve con la partícula. En esta referencia el campo eléctrico longitudinal es $E'_{\parallel}$, y según la Ec. 7, $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$. Así que la fuerza $dp'_{\parallel}/dt'$ es

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel}q = qE_{\parallel} \qquad (15)$$

En la referencia F, observadores miden la fuerza longitudinal, es decir, la derivada temporal de la componente longitudinal de la cantidad de movimiento $dp_{\parallel}/dt$. Según la Ec. 31, $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$, así que en la referencia F la componente longitudinal de la fuerza es:

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE_{\parallel} \qquad (16)$$

Por descontado que la partícula no *permanece* en reposo en F' en el transcurso del tiempo. Se acelera por el campo $\mathbf{E}'$, y la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula en la referencia inercial F' aumentará gradualmente desde cero. Sin embargo, como nos interesa la aceleración instantánea, solamente intervienen valores infinitesimales de v' y la restricción de la Ec. 31 se cumple rigurosamente. Para $E_{\perp}$, la componente transversal del campo en F, la transformación es $E' = \gamma E_{\perp}$, así que $(dp'_{\perp}/dt')$

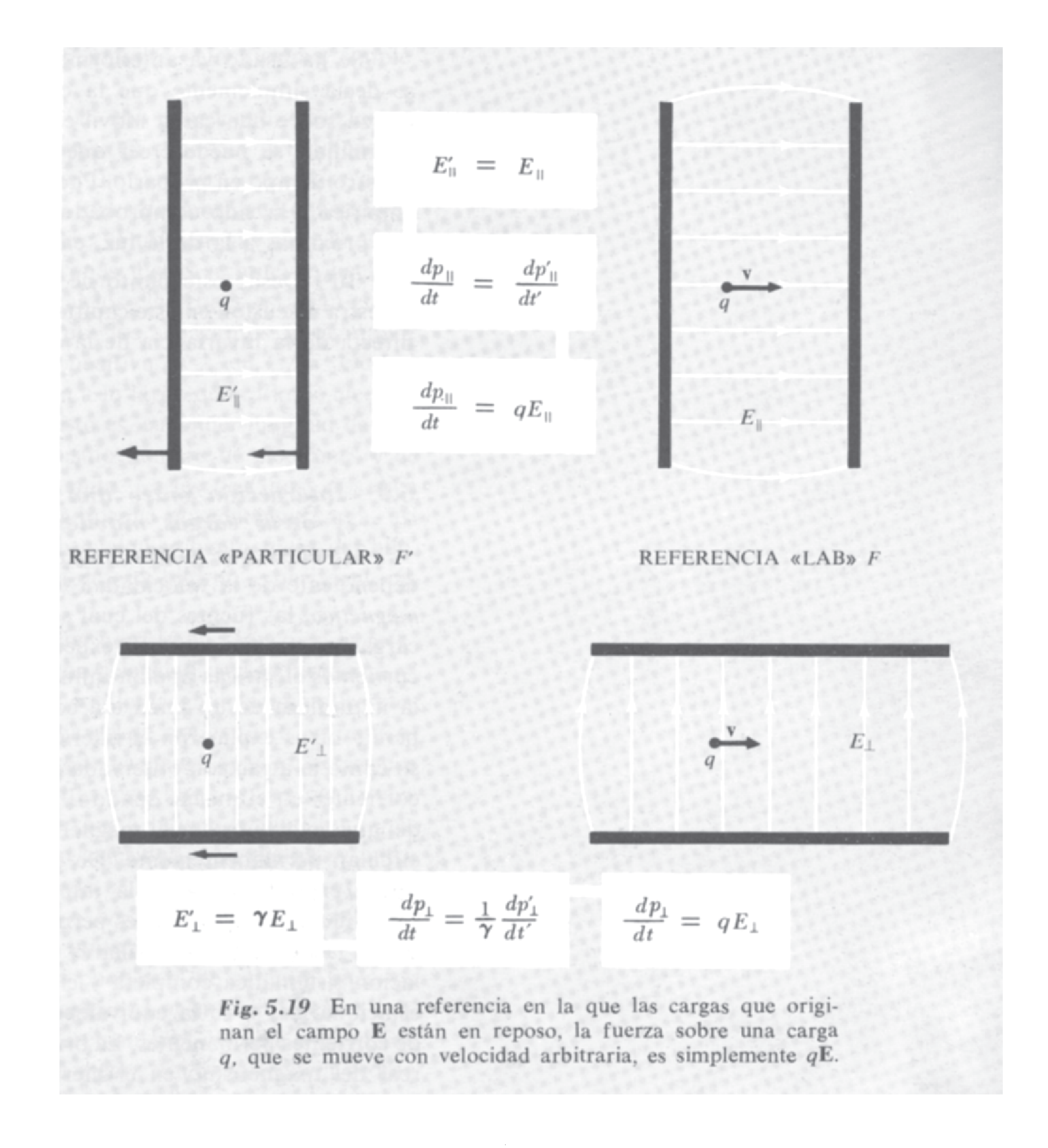


Fig. 5.19 En una referencia en la que las cargas que originan el campo **E** están en reposo, la fuerza sobre una carga q, que se mueve con velocidad arbitraria, es simplemente $q\mathbf{E}$.

$= qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp}$. Pero al transformar la fuerza a la referencia F tenemos $(dp_{\perp}/dt) = (1/\gamma)(dp'_{\perp}/dt')$ así que después de todo γ se simplifica:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma}(\gamma E_{\perp} q) = qE_{\perp} \qquad (17)$$

El mensaje de las Ecs. 16 y 17 es simplemente éste: la fuerza que actúa sobre una partícula cargada que se mueve a lo largo de F es q veces el campo eléctrico **E** en esta referencia, *estrictamente independiente* de la velocidad de la partícula. La Fig. 5.19 es un recordatorio de este hecho y de la manera de hallarlo.

Se ha usado ya anteriormente, en el curso, este resultado donde se decía simplemente que la contribución del campo eléctrico a la fuerza sobre una carga móvil es $q\mathbf{E}$. Debido a que esto es tan simple y familiar, se puede creer que es evidente y que hemos derrochado nuestro tiempo en probarlo. Podíamos haberlo tomado como un hecho empírico. Ha sido comprobado en una gran escala, para velocidades tan próximas a la de la luz, en el caso de electrones, que el factor γ vale 10^4. Desde este punto de vista es una ley de las más notables. Nuestra discusión en este capítulo ha demostrado ser una consecuencia directa de la invariancia de la carga.

5.9 *Interacción entre una carga móvil y otras cargas móviles*

Sabemos que puede haber una fuerza sobre una carga móvil dependiente de la velocidad. Esta fuerza está asociada con un *campo magnético*, las fuentes del cual son corrientes eléctricas, es decir, otras cargas en movimiento. El experimento de Oersted demostró que las corrientes eléctricas podían influir en los imanes, pero en aquel tiempo la naturaleza de un imán era completamente misteriosa. Pronto Ampère y otros explicaron la interacción de las corrientes eléctricas entre sí, como la atracción observada entre dos hilos paralelos que conducen corrientes en el mismo sentido. Esto condujo a Ampère a la hipótesis de que una substancia magnética contiene corrientes eléctricas que circulan permanentemente. De este modo, el experimento de Oersted puede entenderse como la interacción de la corriente « galvánica » en el hilo con las corrientes permanentes microscópicas que comunicaban a la brújula sus peculiares propiedades. Ampère dio una formulación sistemática completa y elegante de la interacción de corrientes estacionarias, y de la equivalencia de la materia imanada a sistemas de corrientes permanentes. La brillante conjetura acerca de la naturaleza real del magnetismo en el hierro tuvo que esperar un siglo, más o menos, para su última confirmación.

El que si las manifestaciones magnéticas de las corrientes eléctricas procedían de algo *más* que del simple transporte de cargas, no estaba claro para Ampère y sus contemporáneos. ¿El movimiento de un objeto cargado electrostáticamente causaría efectos como los producidos por una corriente galvánica continua? A finales del siglo pasado los trabajos teóricos de Maxwell sugirieron que la contestación debía de ser *sí*. La primera evidencia directa fue obtenida por Henry Rowland, a cuyo experimento volveremos a finales del Cap. 6.

Desde nuestro punto de vista, la interacción magnética de las corrientes eléctricas puede admitirse como un corolario inevitable de la ley de Coulomb. Si los postulados de la relatividad son válidos, si la carga es invariante, y si se cumple la ley de Coulomb, los efectos que llamamos corrientemente « magnéticos » están destinados a ocurrir. Surgirán tan pronto como examinemos la interacción eléctrica

entre una carga móvil y otras cargas móviles. Un sistema simple ilustrará esto.

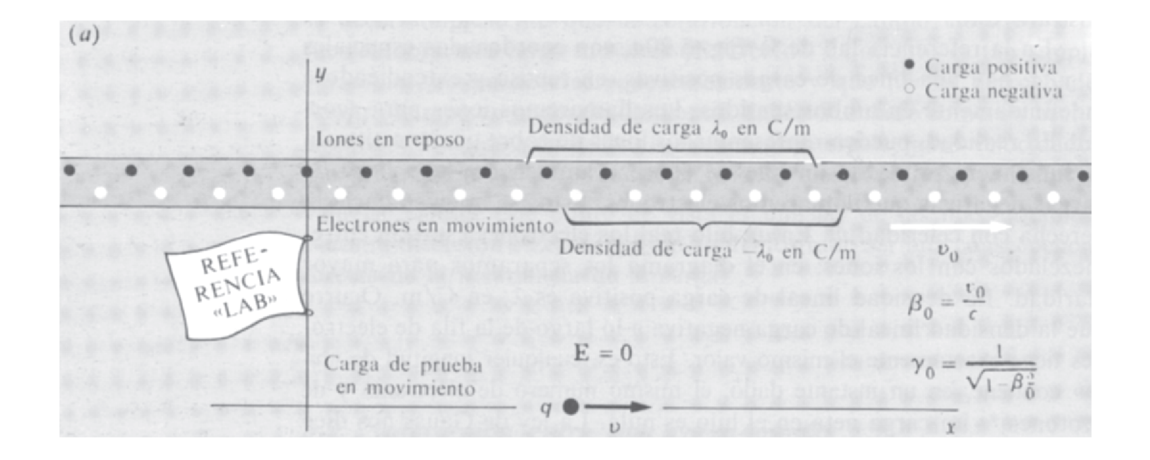
En la referencia lab de la Fig. 5.20*a*, con coordenadas espaciales x, y, z, hay una línea de cargas positivas, en reposo y extendiéndose indefinidamente en ambos sentidos. Les llamaremos iones para acortar. En realidad, pueden representar los iones de cobre que constituyen la substancia sólida de un hilo de cobre. También hay una línea de cargas negativas que llamaremos electrones. Éstos se mueven hacia la derecha con celeridad v_0. En un hilo real los electrones estarían entremezclados con los iones; en el diagrama los separamos para mayor claridad. La densidad lineal de carga positiva es λ_0 en C/m. Ocurre que la densidad lineal de carga negativa a lo largo de la fila de electrones tiene exactamente el mismo valor. Esto es, cualquier longitud de «hilo» contiene, en un instante dado, el mismo número de electrones y de protones *. La carga neta en el hilo es nula. La ley de Gauss nos dice que no puede haber flujo desde un cilindro que no contenga carga, así que el campo eléctrico debe ser nulo en cualquier punto fuera del hilo. Una carga de prueba q en reposo cerca de este hilo no experimentaría fuerza alguna.

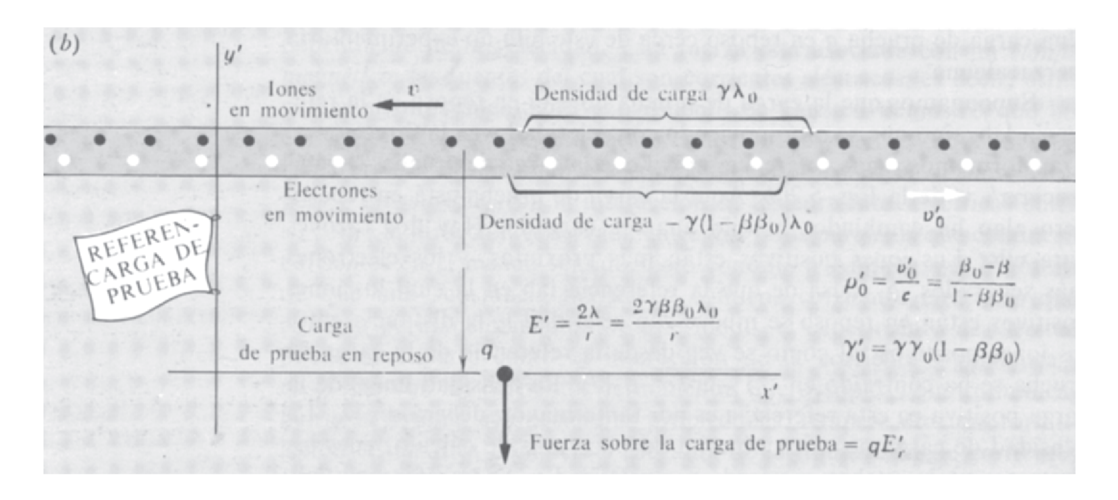
Supongamos que la carga de prueba no está en reposo en la referencia lab, sino que se está moviendo con celeridad v en la dirección x. Transformemos a una referencia móvil con la carga de prueba, la referencia x', y' de la Fig. 5.20*b*. Aquí la carga de prueba está en reposo, pero algo ha cambiado: El hilo aparece cargado. Hay dos razones para ello: Los iones positivos están más próximos, y los electrones más separados. A causa de que la referencia lab en la cual los iones positivos están en reposo se mueve con celeridad v, la distancia entre los iones positivos tal como se ven desde la referencia de la carga de prueba se ha contraído en $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, o $1/\gamma$. La densidad lineal de la carga positiva en esta referencia es por tanto mayor; deberá ser $\gamma\lambda_0$. La densidad de carga negativa necesita un poco más de cálculo, pues los electrones ya se estaban moviendo con celeridad v_0 en la referencia lab. De donde su densidad lineal en la referencia lab, que era $-\lambda_0$ ya fue incrementada por una contracción de Lorentz. En la referencia propia de los electrones en reposo su densidad de carga negativa debía haber sido $-\lambda_0/\gamma_0$, donde γ_0 es el *factor de Lorentz* correspondiente a v_0.

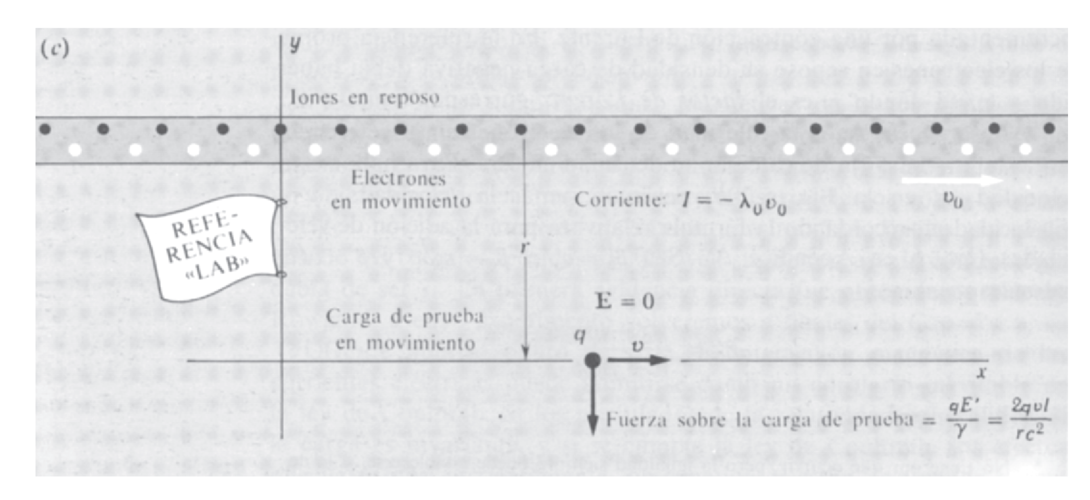
Ahora necesitamos la celeridad de los electrones en la referencia carga de prueba a fin de calcular su densidad en ésta. Para hallar esta velocidad (v_0' en la Fig. 5.20*b*) debemos sumar la velocidad $-v$ a la velocidad v_0, recordando la fórmula relativista para la adición de velocidades (Ec. 6 en Apéndice A). Sea $\beta_0' = v_0'/c$, $\beta_0 = v_0/c$ y $\beta = v/c$. Entonces

$$\beta_0' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \tag{18}$$

* No tiene por qué ocurrir, pero la igualdad siempre puede establecerse, si lo deseamos, por ajuste del número de electrones por unidad de longitud. Suponemos que se ha hecho.


(a)
y
● Carga positiva
○ Carga negativa
Iones en reposo
Densidad de carga λ_0 en C/m
Electrones en movimiento
Densidad de carga $-\lambda_0$ en C/m
v_0
REFERENCIA «LAB»
$\beta_0 = \frac{v_0}{c}$
E = 0
Carga de prueba en movimiento
$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$
q
v
x


(b)
y'
Iones en movimiento
v
Densidad de carga $\gamma\lambda_0$
Electrones en movimiento
Densidad de carga $-\gamma(1-\beta\beta_0)\lambda_0$
v_0'
REFERENCIA CARGA DE PRUEBA
$\beta_0' = \frac{v_0'}{c} = \frac{\beta_0-\beta}{1-\beta\beta_0}$
Carga de prueba en reposo
$E' = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{r}$
$\gamma_0' = \gamma\gamma_0(1-\beta\beta_0)$
q
x'
Fuerza sobre la carga de prueba = qE'

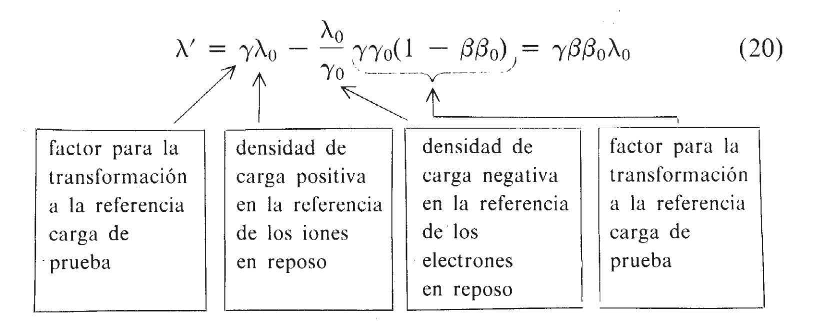

(c)
y
Iones en reposo
Electrones en movimiento
Corriente: $I = -\lambda_0 v_0$
v_0
REFERENCIA «LAB»
r
E = 0
Carga de prueba en movimiento
q
v
x
Fuerza sobre la carga de prueba = $\frac{qE'}{\gamma} = \frac{2qvI}{rc^2}$

El correspondiente factor de Lorentz γ_0', obtenido a partir de la Ec. 18 con un poco de cálculo, es

$$\gamma_0' = (1 - \beta_0'^2)^{-1/2} = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) \tag{19}$$

Éste es el factor por el que la densidad lineal de carga negativa, en la referencia propia del electrón en reposo, se acrecenta cuando se mide en la referencia carga de prueba. La densidad de carga lineal total en el hilo, en la referencia carga de prueba, λ', puede calcularse ahora:

$$\lambda' = \gamma\lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\gamma_0}\gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 \tag{20}$$



El hilo está cargado positivamente. La ley de Gauss garantiza la existencia de un campo eléctrico radial E_r' dado por nuestra familiar fórmula para el campo de un hilo infinito cargado:

$$E_r' = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} \tag{21}$$

En la posición de la carga de prueba q este campo tiene el sentido $-y'$. La carga de prueba experimentará una fuerza

$$F_y' = qE_y' = -\frac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'} \tag{22}$$

Volvamos ahora a la referencia lab, representada de nuevo en la Fig. 5.20*c*. ¿Cuál es el valor de la fuerza sobre la carga q medida aquí? Si su valor es qE_y' en la referencia en reposo de la carga de prueba, los observadores en la referencia lab darán cuenta de una fuerza menor por el factor $1/\gamma$. Ya que $r = r'$, la fuerza sobre nuestra carga de prueba móvil, medida en la referencia lab, es

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma} = \frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{23}$$

Ahora $-\lambda_0 v_0$ o $-\lambda_0\beta c$ es precisamente la corriente total I en el hilo, en la referencia lab, pues es la cantidad de carga que circula por segundo por un punto dado. Llamaremos corriente positiva si equivale a carga positiva circulando en el sentido positivo de las x. Nuestra corriente

Fig. 5.20 Una carga de prueba q se mueve paralela a una corriente en un hilo. (*a*) El hilo en el sistema de referencia lab, en el cual las cargas positivas están fijas, está en reposo. La corriente consiste en electrones que se mueven hacia la derecha con celeridad v_0. La carga neta en el hilo es cero. No hay campo eléctrico fuera del hilo. (*b*) En una referencia en la cual la carga de prueba está en reposo los iones positivos se mueven hacia la izquierda con celeridad v y los electrones se mueven hacia la derecha con celeridad v_0' La densidad lineal de carga positiva es mayor que la de la negativa. El hilo aparece cargado positivamente, con un campo externo E_r' que origina una fuerza qE_r' sobre la carga de prueba estacionaria q. (*c*) La fuerza transformada a la referencia lab tiene el valor qE_r'/γ, la cual es proporcional al producto de la celeridad v de la carga de prueba y la corriente en el hilo $-\lambda_0 v_0$.

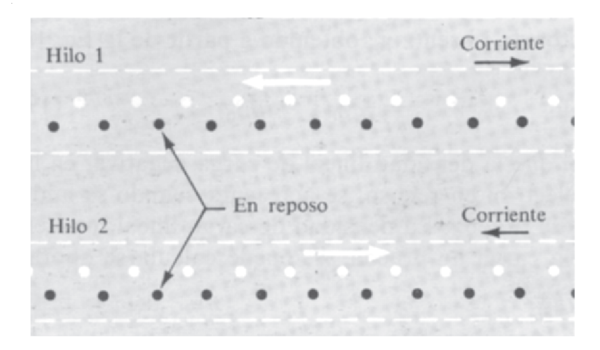
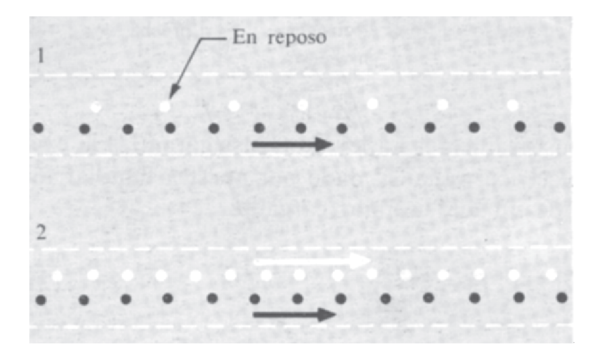
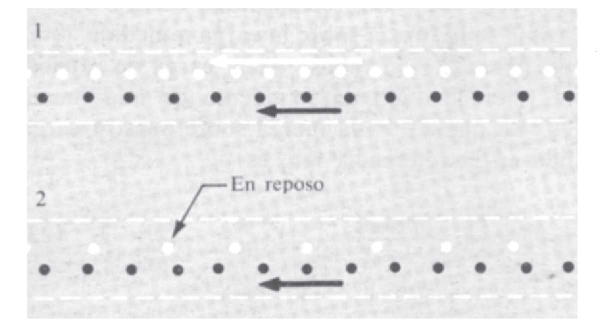


Fig. 5.21 (*a*) Referencia lab con dos hilos que conducen corriente en sentidos contrarios. Como en un hilo metálico la corriente se debe solamente al movimiento de iones negativos (electrones).



(*b*) Referencia resposo de los electrones en el hilo 1. Nótese que en el hilo 2 los iones positivos están comprimidos, pero la distribución de electrones está aún más contraída.



(*c*) Referencia reposo de los electrones en el hilo 2. Como en (*b*) el *otro* hilo parece a estos electrones en reposo que está cargado negativamente.

en este ejemplo es negativa. Nuestro resultado puede escribirse de esta manera:

$$F_y = \frac{Iqv_x}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} \tag{24}$$

Hemos hallado que en la referencia lab la carga de prueba móvil experimenta una fuerza en la dirección y que es proporcional a la corriente en el hilo, y a la velocidad de la carga de prueba en la dirección y sentido x.

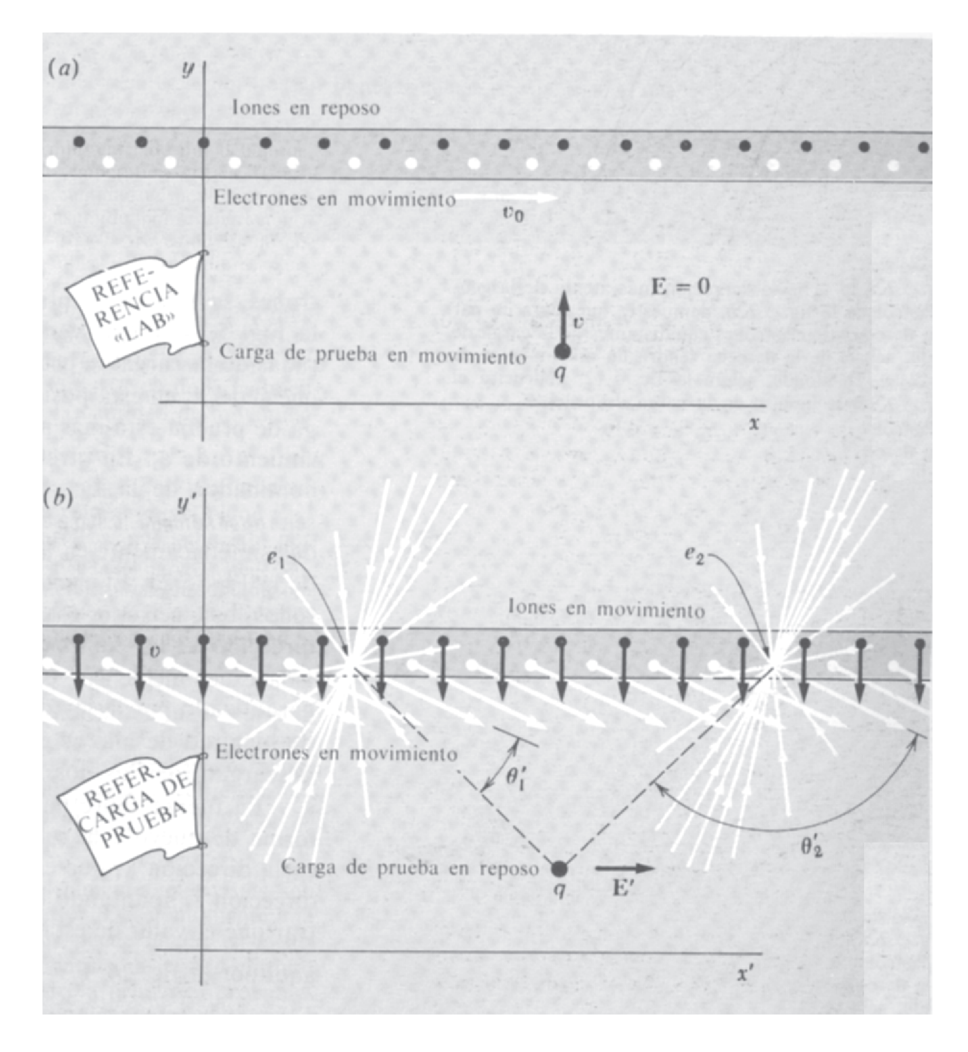
Es un hecho notable que la fuerza sobre la carga de prueba móvil no depende separadamente de la velocidad o de la densidad de los portadores de carga sino solamente de su producto, $\beta_0\lambda_0$, en nuestro ejemplo, que determina el transporte de carga. Si tenemos cierta corriente I, por ejemplo, 3,3 miliampere, no importa si esta corriente está constituida por electrones de elevada energía moviéndose con el 99 % de la celeridad de la luz, por electrones de un metal efectuando movimientos térmicos aleatorios con un ligero arrastre superpuesto en una dirección, o por iones cargados en una solución con iones positivos que se mueven en un sentido y negativos en el otro. O podría ser una combinación de éstos, como demostraremos en el Problema 5.18. Además la fuerza sobre la carga de prueba es estrictamente proporcional a la velocidad v de la carga de prueba. Nuestra deducción en ningún modo estuvo restringida a pequeñas velocidades, ni para los portadores de carga en el hilo ni para la carga de prueba q. La Ec. 24 es exacta sin restricciones.

Veamos cómo esto explica la repulsión mutua de conductores que conducen corrientes en sentidos contrarios, como se ve en la Fig. 5.1*b* al principio de este capítulo. Dos hilos tales se representan en la referencia lab en la Fig. 5.21*a*. Supongamos que los hilos están descargados en la referencia lab. Entonces no hay fuerza eléctrica entre hilos opuestos sobre los iones positivos que son estacionarios en la referencia lab. Transfiriendo a una referencia en la que un conjunto de electrones está en reposo (Fig. 5.21*b*), hallamos que en el otro hilo la distribución de electrones ha sufrido más contracción de Lorentz que la distribución de iones positivos. Debido a esto los electrones en reposo en esta referencia serán repelidos por el otro hilo. Pero cuando transfiramos a la referencia en la cual estos otros electrones están en reposo (Fig. 5.21*c*), hallamos la misma situación. Aún se repelerán. Estas fuerzas repulsivas también se observarán en la referencia lab, solamente modificadas por el factor γ. Concluimos que las dos corrientes de electrones se repelerán mutuamente en la referencia lab. Los iones positivos estacionarios, aunque no experimenten una fuerza eléctrica directa del otro hilo, serán soporte indirecto de esta fuerza repulsiva si los electrones permanecen confinados dentro del hilo. Así que los hilos se repelerán, como en la Fig. 5.1*b*, hasta que alguna fuerza externa equilibre la repulsión.

Una partícula cargada que se mueva paralelamente a un conductor que transporta corriente, experimenta una fuerza perpendicu-

lar a la dirección de su movimiento. ¿Qué ocurre si se mueve perpendicularmente al conductor? Una velocidad perpendicular al hilo dará lugar a una fuerza paralela al hilo; de nuevo, una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento de la partícula. Para ver cómo ocurre esto, regresemos a la referencia lab de este sistema y demos a la carga de prueba una velocidad v en la dirección y, como en la Fig. 5.22*a*. Transfiriendo a la referencia en reposo de la carga de prueba (Fig. 5.22*b*), hallamos a los iones positivos moviéndose verticalmente hacia abajo. Sin duda no pueden a causa de un campo horizontal en la posición carga de prueba. La componente x' del campo de un ion a la izquierda será exactamente anulada por la componente x' del campo de un ion situado simétricamente a la derecha. El efecto que estamos buscando se debe a los electrones. Todos ellos se mueven oblicuamente en esta referencia, hacia abajo y hacia la derecha. Consideremos dos electrones situados simétricamente e_1 y e_2. Sus campos eléctricos, comprimidos relativísticamente en la dirección y sentido del movimiento de los elec-

Fig. 5.22 *(a)* El «hilo» con su corriente de cargas negativas móviles, o electrones, es el mismo que en la Fig. 5.20, pero ahora la carga de prueba se mueve hacia el hilo. *(b)* En la referencia en reposo de la carga de prueba las cargas positivas, o «iones», se mueven en la dirección y sentido $-\hat{\mathbf{y}}$. Los electrones se mueven oblicuamente. A causa de que el campo de una carga móvil es más intenso en las direcciones más próximas a la perpendicular a su velocidad, un electrón a la derecha, tal como e_2, produce un campo más intenso en la posición de la carga de prueba, que un electrón colocado simétricamente a la izquierda. Por tanto el vector suma de los campos en esta referencia tiene una componente en la dirección $\hat{\mathbf{x}}'$.



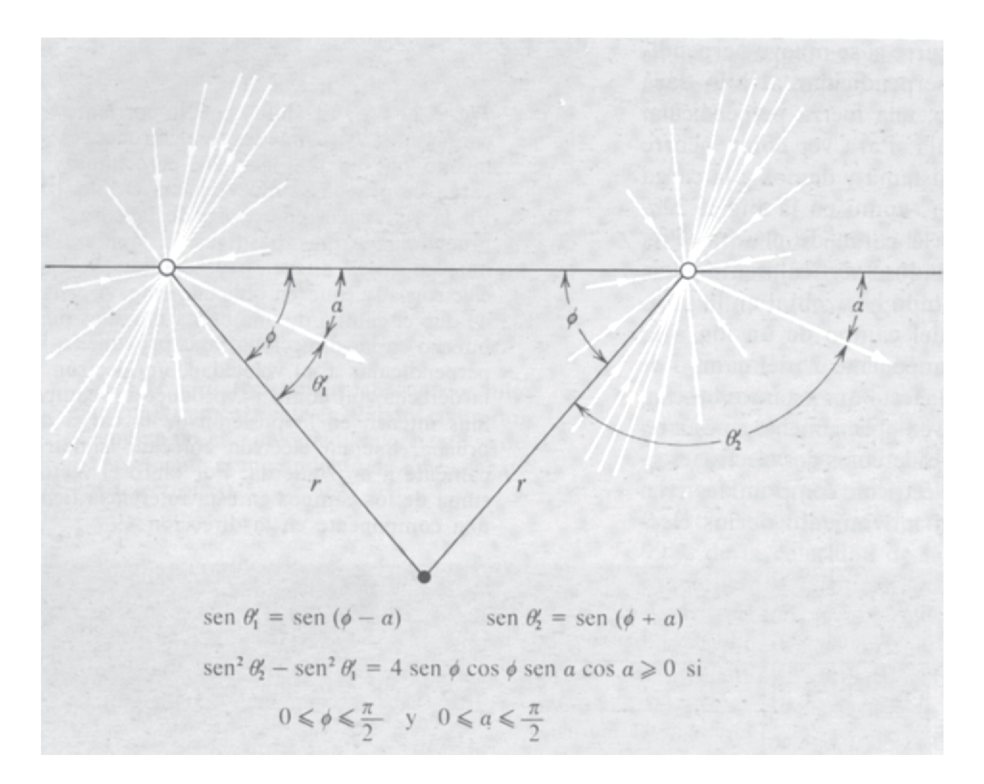


Fig. 5.23 Una observación más atenta de la geometría de la fig. 5.22*b*, demuestra que, para un par *cualquiera* de electrones equidistantes de la carga de prueba, el de la derecha tendrá un mayor valor de $\text{sen}^2\theta'$. De donde, según la Ec. 5.12, podrucirá el campo más intenso en la carga de prueba.

trones, se han representado por un cepillo de líneas de campo como en la Fig. 5.14. Puede verse que, aunque e_1 y e_2 están igualmente separadas de la carga de prueba, el campo del electrón e_2 será *más intenso* que el del e_1 en esta posición. Esto se debe a que la línea de e_2 a la carga de prueba está más próxima a la perpendicular a la dirección del movimiento de e_2. En otras palabras, el ángulo θ' que aparece en el denominador de la Ec. 12 es ahora diferente para e_1 y e_2, así que $\text{sen}^2\,\theta_2' > \text{sen}^2\,\theta_1'$. Esto será cierto para cualquier par de electrones situados simétricamente en la línea, como puede comprobarse con la ayuda de la Fig. 5.23. El electrón a la derecha siempre gana. Sumando para todos los electrones está obligado a dar un campo resultante E' en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$. La componente y' del campo de los electrones será anulada exactamente por el campo de los iones. El que E_y' sea cero está garantizado por la ley de Gauss, pues el número de cargas por unidad de longitud de hilo es el mismo que en la referencia lab. El hilo está descargado en las dos referencias.

La fuerza sobre nuestra carga de prueba, $q\text{E}'_x$, cuando se transforma de nuevo a la referencia lab, será una fuerza proporcional a v en la dirección x, que es la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ si $\mathbf{B}$ es un vector en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, apuntando hacia fuera en el diagrama. Podríamos demostrar que el valor de esta fuerza dependiente de la velocidad viene dada aquí por la Ec. 24: $\text{F} = \dfrac{qvI}{2\pi\varepsilon rc^2}$. Toda la física necesaria está en la Ec. 12, pero la integración es algo laboriosa y no la vamos a resolver aquí.

Problemas

5.1 Un condensador consiste en dos placas rectangulares paralelas con una separación vertical de 2 cm. La dimensión este-oeste de las placas es de 20 cm, la dimensión norte-sur 10 cm. El condensador se ha cargado conectándole momentáneamente una batería de 300 volt. ¿Qué exceso de electrones hay en la placa negativa? ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas? Calcúlense ahora las siguientes cantidades, que se han medido en un sistema de referencia que se mueve hacia el este, relativamente al laboratorio en el cual las placas están en reposo, con celeridad $0{,}6c$: las tres dimensiones del condensador; el número de electrones en exceso en la placa negativa; la intensidad del campo eléctrico entre las placas. Contéstense las mismas preguntas para un sistema de referencia que se mueve hacia arriba con una celeridad $0{,}6c$.

5.2 Un filamento de nylon de 0,01 cm de diámetro y 4 cm de longitud tiene $5{,}0 \cdot 10^8$ electrones extra distribuidos uniformemente en su superficie. Determinar la intensidad del campo eléctrico en la superficie del filamento:
(*a*) En la referencia en reposo del filamento.
(*b*) En la referencia en la cual el filamento se mueve con celeridad de $0{,}9c$ en una dirección paralela a su longitud.

5.3 Un haz de electrones de 9,5 megaelectrónvolts (MeV) ($\gamma = 20$) que equivale a una corriente de 0,05 microamperes, se mueve en el vacío. Las dimensiones transversales del haz son menores que 1 mm, y no hay cargas positivas en las proximidades.
(*a*) ¿En la referencia lab, cuál es aproximadamente el campo eléctrico a 1 cm del haz, y cuál es la distancia media entre un electrón y el siguiente delante de él, medida paralelamente al haz?
(*b*) Responder la misma cuestión para la referencia del electrón en reposo.

5.4 Consideremos la trayectoria de una partícula cargada que se mueve con una celeridad de $0{,}8c$ en la dirección x cuando entra en una gran región en la que existe un campo eléctrico uniforme en la dirección y. Demuéstrese que la componente x de la velocidad de la partícula debe realmente *disminuir*. ¿Qué le ocurre a la componente x de la cantidad de movimiento?

5.5 En la referencia F está fija una lámina de carga, con densidad superficial uniforme σ, que bisecta el ángulo diedro formado por el plano xy y el yz. El campo eléctrico de esta lámina estacionaria es, por supuesto, perpendicular a la lámina. ¿Cómo lo describirán los observadores en una referencia F' que se mueve en la dirección y sentido x con velocidad $0{,}6c$ con respecto a F? ¿Cuál es la densidad superficial de carga y cuál es la dirección e intensidad del campo eléctrico en F'? ¿Es perpendicular a la lámina?

5.6 En un anillo de almacenamiento de un haz de partículas un antiprotón va hacia el este y un protón al oeste, la distancia de mayor aproximación es de 10^{-8} cm. La energía cinética de cada partícula en la referencia lab era de 93 GeV, correspondiente a $\gamma = 100$. ¿En la referencia en reposo del protón, cuál era la máxima intensidad del campo eléctrico en el protón debido a la carga en el antiprotón? ¿Aproximadamente, en cuánto excede el campo a la mitad del valor máximo de su intensidad?

5.7 Las partículas cargadas más extraordinariamente relativistas son los rayos cósmicos que llegan desde el espacio exterior. Ocasionalmente una de estas partículas posee tanta energía cinética que puede iniciar en la atmósfera un «chaparrón gigante» de partículas secundarias, disipando en total una energía de 10^{19}eV (más de un joule). La partícula primaria, probablemente un protón, debe haber tenido $\gamma \approx 10^{10}$. ¿A qué distancia de tal protón

el campo se eleva a 1 volt/metro cuando él pasa? ¿Aproximadamente qué espesor tiene el «aglomerado» de líneas de campo a tal distancia?

Resultado: 4 metros; $4 \cdot 10^{-10}$ metros

5.8 En la referencia laboratorio un protón está en reposo en el origen a $t = 0$. En este instante un pión negativo que ha estado recorriendo el eje x con celeridad $0{,}6c$ alcanza el punto $x = 0{,}01$ cm. No hay ninguna carga en los alrededores. ¿Cuál es el valor de la fuerza sobre el pión? ¿Cuál es el valor de la fuerza sobre el protón? ¿Qué ocurre con la tercera ley de Newton?

5.9 Las placas desviadoras de un osciloscopio de rayos catódicos de alto voltaje son dos placas rectangulares, de 4 cm de longitud y 1,5 cm de anchura, separadas 0,8 cm. Hay una diferencia de potencial de 6000 volts entre las placas. Un electrón que ha sido acelerado mediante una diferencia de potencial de 250 kilovolts entra en este desviador desde la izquierda, moviéndose inicialmente paralelo a las placas y equidistante de las mismas. Deseamos hallar la posición del electrón y su dirección de movimiento cuando abandona el campo deflector en el otro extremo de las placas. Despreciaremos el efecto de bordes en el campo y supondremos que el campo eléctrico entre las placas es uniforme justo hasta el extremo. La masa en reposo del electrón puede tomarse de 500 keV. Primero efectuaremos el análisis en la referencia lab para responder estas cuestiones: ¿$\gamma =$? ¿$\beta =$? ¿p_x en unidades de mc, $=$? ¿tiempo transcurrido entre las placas $=$? (Despreciar la variación de velocidad horizontal discutida en el Problema 5.4); ¿componente transversal de la cantidad de movimiento adquirida, en unidades de mc, $=$? ¿velocidad transversal a la salida $=$? ¿posición vertical a la salida $=$? ¿dirección de la trayectoria a la salida? Ahora descríbase todo el proceso tal como aparecería en una referencia inercial que se mueva con el electrón en el momento en que entra en la región desviadora: ¿Qué parecen las placas? ¿Cuál es el campo entre ellas? ¿Qué le ocurre al electrón en este sistema de coordenadas? Nuestro principal objeto en este ejercicio es convencernos de que las dos descripciones son coincidentes.

5.10 En la referencia en reposo de una partícula con carga q_1 otra partícula con carga q_2 se acerca moviéndose con celeridad v no pequeña comparada con c. Si continúa moviéndose en línea recta pasará a una distancia d de la posición de la primera partícula. Su masa es tal que su desplazamiento del camino recto durante el encuentro es pequeño frente a d. Igualmente, la primera partícula es tan pesada que su desplazamiento de su posición inicial mientras la otra partícula pasa cerca es también pequeño comparado con d.

(*a*) Demostrar que el incremento de la cantidad de movimiento adquirida por cada partícula como resultado del encuentro es perpendicular a $\mathbf{v}$ y su módulo es $2\, q_1\, q_2/vd$. (Puede usarse la ley de Gauss).

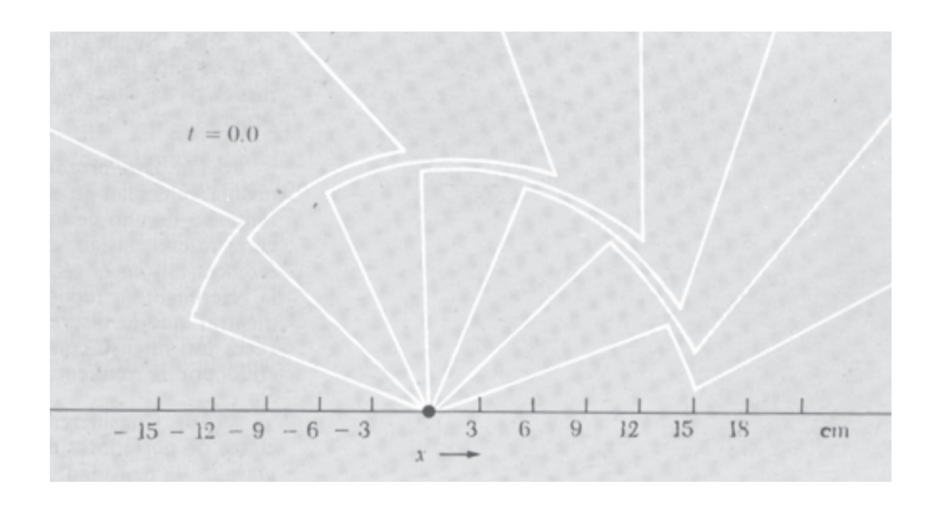
(*b*) Expresar en función de las demás cantidades el valor de las masas de las partículas para justificar nuestras hipótesis.

5.11 Deducir la Ec. 13 efectuando la integración a fin de hallar el flujo de E a través de cada casquete esférico descrito en lo escrito en la Fig. 5.18. En el casquete interno la intensidad del campo es constante, y el elemento de área puede tomarse como $2\,\pi r^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta$. En el otro casquete el campo se define por la Ec. 12 con los apropiados cambios en símbolos y el elemento de superficie es $2\,\pi r^2 \operatorname{sen} \phi\, d\phi$. La integral necesaria es

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

5.12 En el campo de la carga móvil Q, dada por la Ec. 12, deseamos hallar un ángulo δ tal que la mitad del flujo total de Q esté contenido entre dos superficies cónicas $\theta' = \pi/2 + \delta$ y $\theta' = \pi/2 - \delta$. Si se ha resuelto el Problema 5.11 ya se ha efectuado la mayor parte del trabajo. Se halla que, para $\gamma \gg 1$, el ángulo entre los dos conos es aproximadamente $1/\gamma$.

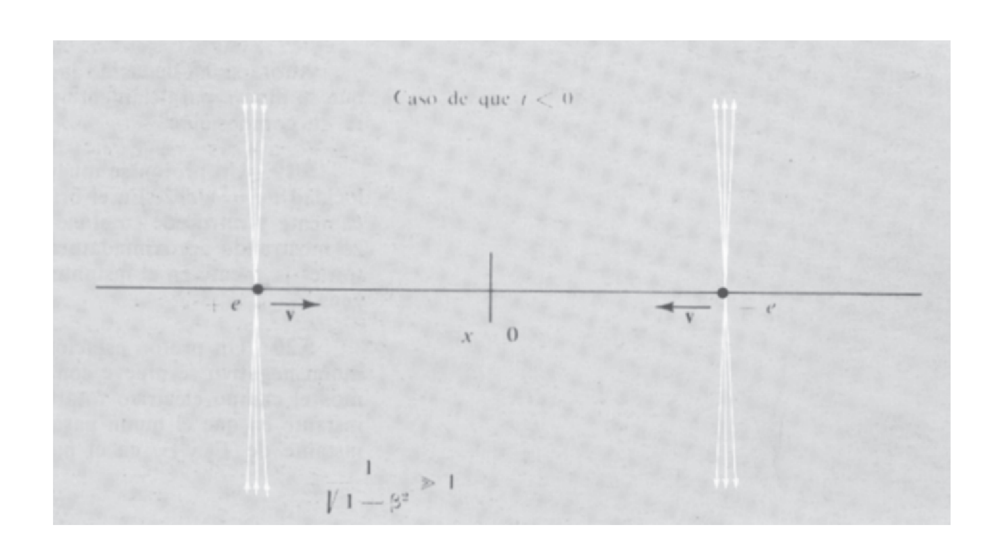
5.13 En la figura se ve un electrón en el instante $t = 0{,}0$ y el campo eléctrico asociado en este instante. Las distancias en el diagrama se dan en centímetros.




Prob. 5.13

(a) Descríbase qué ha estado sucediendo a lo largo del tiempo. Hágase la descripción tan completa como se pueda.
(*b*) ¿Dónde estaba el electrón en el instante $t = -7{,}5 \cdot 10^{-10}$s?
(*c*) ¿Cuál era la intensidad del campo eléctrico en el origen en este instante?

5.14 La figura representa una partícula positiva altamente relativista que se acerca al origen desde la izquierda y una partícula negativa aproximándose con igual celeridad desde la derecha. Chocan en el origen en el instante $t = 0$, hallan algún modo para disponer de su energía cinética, y permanecen aquí como un ente neutro. ¿Qué aspecto tiene el campo eléctrico en un instante $t > 0$? Bosquéjense las líneas de campo. ¿Cómo varía el campo con el tiempo?



Prob. 5.14

5.15 En la Fig. 5.20 el espaciado relativo de los puntos negros y blancos se designó para estar de acuerdo con $\gamma = 1{,}2$ y $\beta_0 = 0{,}8$. Calcular β_0'. Hallar el valor, como fracción de λ_0 de la densidad de carga neta en la referencia carga de prueba.

5.16 Supongamos que la velocidad de la carga de prueba en la Fig. 5.20 se hace igual a la de los electrones, v_0. ¿Cuáles serían las densidades lineales de la carga positiva y de la carga negativa, en la referencia carga de prueba?

5.17 Dos protones se mueven paralelamente a una distancia r, con la misma velocidad βc en la referencia lab. Según la Ec. 12, en la posición instantánea de uno de los protones el campo eléctrico E cerca del otro, medido en la referencia lab, es $\gamma e/r^2$. Pero la fuerza sobre el protón medida en la referencia lab *no es* $\gamma e^2/r^2$. Comprobarlo hallando la fuerza sobre el protón en la referencia en reposo y transformando esta fuerza a la referencia lab. Demostrar que la discrepancia puede explicarse si hay un campo magnético β veces tan intenso como el eléctrico que acompañe a este protón en su recorrido por la referencia lab.

5.18 Consideremos una carga lineal compuesta, consistente en varias clases de portadores de carga, cada uno con su propia velocidad. Para cierta clase, k, la densidad lineal de carga medida en la referencia F es λ_k y la velocidad es $\beta_k c$, paralela a la línea. La contribución de estos portadores a la corriente en F es pues $I_k = \lambda_k \beta_k c$. ¿Qué cantidad de estos portadores de carga tipo k contribuyen a la carga y corriente en la referencia F' que se mueve paralelamente a la línea a velocidad $-\beta_k c$ con respecto a F? Siguiendo los pasos que vimos en las transformaciones de la Fig. 5.20, puede demostrarse que

$$\lambda_k' = \gamma\left(\lambda_k - \frac{\beta I_k}{c}\right) \qquad I_k' = \gamma(I_k - \beta c\lambda_k)$$

Si cada componente de la densidad de carga lineal y corriente se transforman de esta manera, la total λ e I debe ser:

$$\lambda' = \gamma\left(\lambda - \frac{\beta I}{c}\right) \qquad I' = \gamma(I - \beta c\lambda)$$

Ahora se ha deducido la transformación de Lorentz para una referencia que se mueve paralelamente para *toda* carga lineal y corriente, sea cual fuera su composición.

5.19 Un protón se mueve a lo largo del eje x hacia el origen a una velocidad $v_x = -c/2$. En el origen choca con un núcleo pesado, rebota elásticamente y retrocede en el eje x con casi la misma celeridad. Hacer un esbozo mostrando aproximadamente cómo es el campo eléctrico del cual el protón es la fuente en el instante 10^{-10}s después de que el protón alcance el origen.

5.20 Un protón estacionario está situado sobre el eje z en $z = a$. Un muón negativo se mueve con celeridad $0{,}8c$ a lo largo del eje x. Consideremos el campo eléctrico total de las dos partículas, en esta referencia, en el instante en que el muón pasa por el origen. ¿Cuáles son los valores en este instante de E_x y E_z en el punto $(a,0,0)$ sobre el eje x?

Resultado: $E_x = -0{,}00645\ e/a^2$, $E_z = -0{,}354\ e/a^2$.

5.21 Llenar los espacios en blanco. Usar las constantes redondeadas: 1 eV= 1,6 · 10^{-19} joule; masa en reposo del electrón = 5 · 10^5 eV. En cierto aparato un electrón abandona el cátodo con velocidad despreciable y se acelera mediante una diferencia de potencial de 125 kilovolts. Cuando llega al ánodo, su energía cinética es _______ eV, su masa ha aumentado en un factor de _______, y su velocidad es _______ *c*. Su cantidad de movimiento es _________ kg. cm/s en la dirección *x*. Pasado el ánodo, el electrón pasa a unas placas metálicas paralelas. El campo entre las placas es _______ V/m; la fuerza sobre el electrón es _______ *N* hacia arriba. El electrón está _______ segundos entre las placas y emerge, habiendo adquirido cantidad de movimiento en la dirección *y* de valor p_y = _______ kg. cm/s. Su trayectoria ahora se inclina hacia arriba formando un ángulo θ = _______ radianes.

Un neutrón rápido que empieza a moverse con el electrón cuando ha pasado a través del ánodo registra los siguientes sucesos: «Estábamos situados aquí cuando el condensador se nos acercaba rápidamente a _______ cm/s. Su longitud era _______ m, así que nos rodeó durante _______ s. Esto no me preocupa, pero el campo eléctrico de _______ volts/cm aceleró el electrón de forma que cuando el condensador nos dejó el electrón se alejaba de mí a _______ cm/s.»

6

El campo magnético

6.1 Definición de campo magnético

Una carga que se mueva paralelamente a una corriente de otras cargas experimenta una fuerza perpendicular a su propia velocidad. Puede verse qué ocurre en la desviación del haz de electrones en la Fig. 5.3. En la Sección 5.9 hallaremos que concuerda con —en realidad es necesario por— la ley de Coulomb con la invariancia de la carga y la relatividad restringida. Y hallamos que una fuerza perpendicular a la velocidad de la partícula cargada también surge en el movimiento perpendicular a un hilo recorrido por una corriente. Para una corriente dada el valor de la fuerza, que calculamos para el caso particular de la Fig. 5.20*a*, es proporcional al producto de la carga q de la partícula y a su celeridad en nuestra referencia. Tal como definimos el campo eléctrico **E** como el vector fuerza por unidad de carga en reposo, podemos definir otro campo **B** por la parte *dependiente de la velocidad* de la fuerza que actúa sobre la carga en movimiento. La relación de definición se introdujo al principio del Capítulo 5. Vamos a establecerla más cuidadosamente.

En cierto instante t una partícula de carga q pasa por el punto (x, y, z) de nuestra referencia, moviéndose con velocidad **v**. En este instante la fuerza sobre la partícula (variación con el tiempo de su cantidad de movimiento) es **F**. El campo eléctrico en este instante y lugar se sabe que es **E**. Luego el campo magnético en este instante y lugar se define como el vector que satisface la ecuación vectorial

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (1)$$

Por supuesto que **F** aquí solamente incluye la fuerza dependiente de la carga y no, por ejemplo, del peso de la partícula que lleva la carga. Existe siempre un vector que satisfaga la Ec. 1. Dados los valores de **E** y **B** en alguna región, con la Ec. 1 podemos predecir la fuerza sobre cualquier otra partícula que se mueva en esta región con cualquier otra velocidad. Para los campos que varían con el tiempo y el espacio, la Ec. 1 debe entenderse que es para relaciones locales entre los valores instantáneos de **F, E, v** y **B.** Por descontado que todas estas magnitudes deben medirse en el mismo sistema inercial.

En el caso de nuestra «carga de prueba» en la referencia lab de la Fig. 5.20*a*, el campo eléctrico **E** era nulo. Con la carga q moviéndose en la dirección positiva del eje x, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}\, v$, hallamos que la fuerza sobre la misma era en la dirección y, sentido negativo, con módulo $Iqv/2\pi\varepsilon_0 rc^2$:

$$F = -\,\hat{y}\,\frac{Iqv}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} \qquad (2)$$

En este caso el campo magnético debe ser

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} \qquad (3)$$

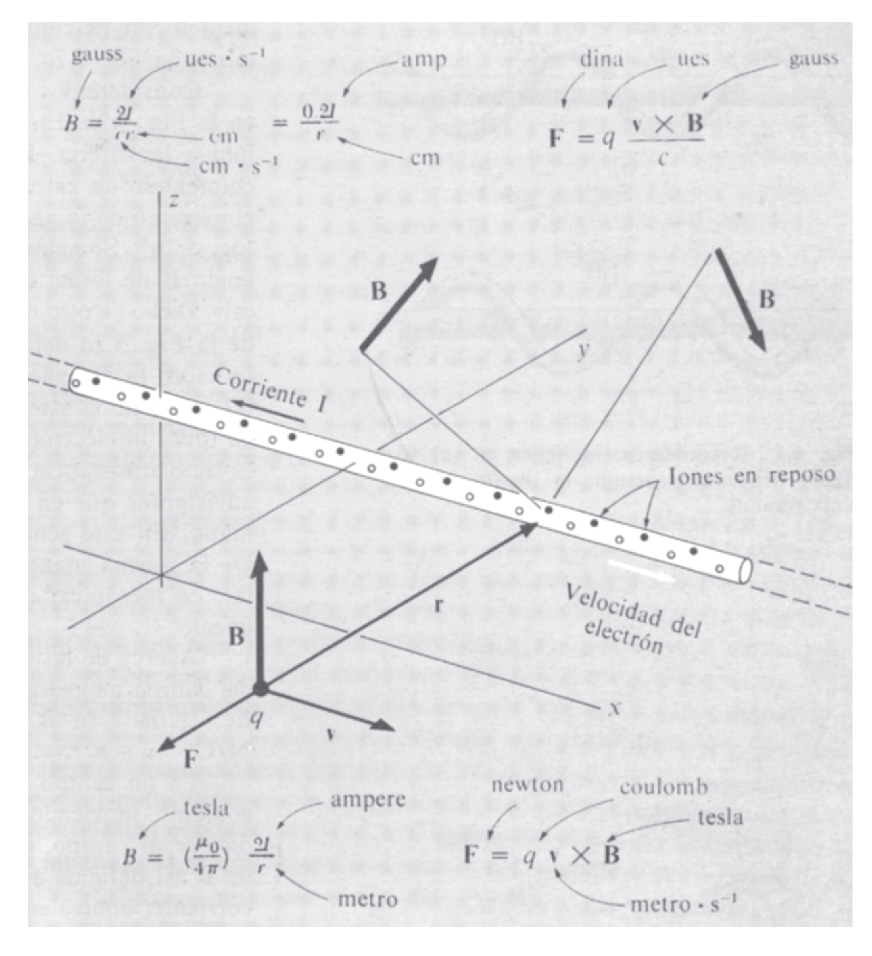


Fig. 6.1 Campo magnético de una corriente en un hilo recto largo y fuerza sobre una partícula cargada que se mueve en este campo.

pues entonces la Ec. 1 se convierte en

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}})\,(qv)\,\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} = -\,\hat{y}\,\frac{Iqv}{2\pi\varepsilon_0 rc^2} \tag{4}$$

de acuerdo con la Ec. 2.

La relación de **B** a **v** y a la corriente I puede verse en la Fig. 6.1. Intervienen tres direcciones mutuamente perpendiculares: la dirección de **B** en el punto de interés, la dirección del vector **r** desde este punto al hilo y la dirección de la corriente en el hilo. Aquí nos encontramos con una cuestión de «*mano*». Habiendo adoptado la Ec. 1 como definición de **B** y de acuerdo con el convenio para la dirección y sentido del producto vectorial, o sea, $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$, etc., en coordenadas como las de la Fig. 6.1, hemos determinado la dirección y sentido de **B**. Esta relación tiene un sentido, como puede verse imaginando una partícula que se mueva en el hilo en el sentido de la corriente mientras gira en torno al hilo en el sentido de **B**. Su trayectoria, indepen-

dientemente de como la miremos, formará una hélice dextrorsum, como en la Fig. 6.2*a*, no una hélice sinixtrorsum como la de la Fig. 6.2*b*.

Consideremos un experimento como el de Oersted, representado en la Fig. 5.2*a*. El sentido de la corriente quedó fijado al conectar el hilo a la batería. Hacia donde señala la brújula puede establecerse coloreando un extremo de la aguja. Por tradición anterior a Oersted el extremo de la aguja que «busca el norte» es el extremo negro de la Fig. 5.2*a**. Si comparamos esto con la Fig. 6.1 veremos que hemos definido **B** de forma que apunte en la dirección del «norte magnético local». Dicho de otro modo, la flecha de la corriente y la aguja de la brújula de la Fig. 5.2*a* definen una hélice dextrorsum (véase Fig. 6.2), como lo hacen la dirección y sentido de la corriente y el vector **B** en la Fig. 6.1. Esto no es para decir que haya algo intrínsecamente dextrorsum en torno al electromagnetismo. Solamente lo que aquí nos interesa es la autoconsistencia de nuestras reglas y definiciones. Sin embargo, advirtamos que en electrostática ***nunca podía surgir*** una cuestión de mano. En este sentido el vector **B** difiere en carácter del vector **E.** De la misma manera, un vector que represente una velocidad angular, en mecánica, difiere de un vector que represente una velocidad lineal.

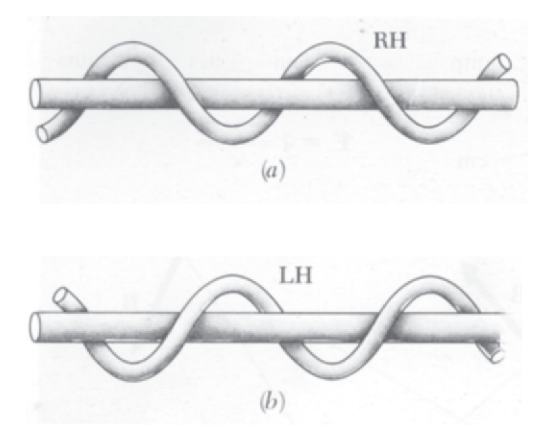


Fig. 6.2 Recordemos: la hélice en (*a*) se llama hélice dextrorsum, la de (*b*) hélice sinixtrorsum.

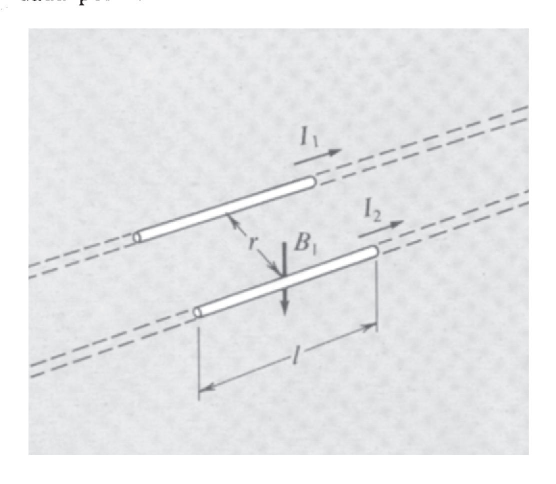
Acerca de las unidades en las que hay que expresar la intensidad del campo magnético, notemos que nuestra ecuación de definición, la Ec. 1, da a la **B** las dimensiones de *E/v*, por tanto serán las de $N/C \cdot m \cdot s^{-1} = N \cdot s/C \cdot m = kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$.

En un campo magnético de intensidad unidad, una carga de un coulomb moviéndose a la velocidad de un metro/segundo, perpendicular al campo, experimenta una fuerza de un newton. La unidad de **B** así definida se llama *tesla* (T). La relación entre el campo y la corriente, equivalente a la Ec. 3, toma la forma:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{3'}$$

donde **B** viene en tesla, *I* en ampere, *r* en metros y μ_0 es la constante $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$, cuyo valor se tomó $4\pi \cdot 10^{-7}$ (en unidades SI) en el XI C.G.P. y M. (1960) para la definición del ampere.

Fig. 6.3 La corriente I_1 produce el campo magnético *B* en el conductor 2. La fuerza sobre una longitud *l* de conductor 2 viene dada por la Ec. 7.



Usemos las Ecs. 1 y 3 para calcular la fuerza magnética entre hilos paralelos que conducen corriente. Sea *r* la distancia entre los hilos, sean I_1 e I_2 las corrientes que supondremos circulan en el mismo sentido, como se indica en la Fig. 6.3. Los hilos se suponen infinitamente largos —una razonable suposición en un caso práctico en el que la longitud es muy grande frente a la distancia *r* entre los mismos. Deseamos hallar la fuerza que actúa sobre una longitud

* Ahora sabemos que el campo magnético terrestre se ha invertido muchas veces en la historia geológica. En el caso improbable de que esta página sobreviva 10^5 años, puede necesitar revisión.

finita l de uno de los hilos. La corriente en el hilo 1 da lugar a un campo magnético de intensidad

$$B_1 = \frac{I_1}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r} \tag{5}$$

en la posición del hilo 2. Dentro del hilo 2 hay n_2 cargas móviles por cm de longitud, cada una con la carga q_2 y celeridad v_2. Ellas constituyen la corriente I_2:

$$I_2 = n_2 q_2 v_2 \tag{6}$$

Según la Ec. 1 la fuerza sobre cada carga es $q_2 v_2 B_1$*. La fuerza sobre cada centímetro de longitud de hilo es por consiguiente $n_2 q_2 v_2 B_1$, o simplemente $I_2 B_1$. En vista de la Ec. 4, la fuerza sobre una longitud l de hilo 2 es

$$F = \frac{I_1 I_2 l}{2\pi\varepsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \tag{7}$$

Evidentemente que la fuerza sobre una longitud igual de hilo 1 debido al campo del hilo 2 debe ser la misma fórmula. No nos hemos molestado en tener en cuenta los signos ya que sabemos que las corrientes en el mismo sentido se atraen.

La Ec. 7 constituye la definición primaria del ampere. Asignando a μ_0 el valor $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, si por estos hilos, situados a 1 m de distancia, circula una corriente de un ampere, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de longitud. O sea, si $I_1 = I_2 = 1$ A, $l = r = 1$ m, $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N.

Aquí F va en newtons, mientras que I_1 e I_2 están en amperes. Como el factor l/r que aparece en 7 es adimensional, tanto l como r pueden venir en cualquier unidad, aunque igual para ambas.

Apliquemos la Ec. 6 al par de hilos de la Fig. 6.4*a*. Son hilos de cobre de 1 mm de diámetro y separados 5 cm. En el cobre el número de electrones de conducción por metro cúbico, ya mencionado en el Capítulo 4, es $8{,}45 \cdot 10^{28}$, así que hay $(\pi/4)(10^{-6})(8{,}45 \cdot 10^{28})$ o bien $6{,}6 \cdot 10^{22}$ electrones de conducción en la longitud de 1 m de hilo. Supongamos que la velocidad media de arrastre $\bar{v}$ sea 0,003 m/s. (Por supuesto que sus celeridades al azar son mucho mayores.) La corriente en cada hilo es entonces

$$I = nq\bar{v} = 6{,}6 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}03 = 31{,}67 \text{ A} \tag{8}$$

* B_1 es el campo *dentro* del hilo 2, causado por la corriente en el hilo 1. Cuando estudiemos los campos magnéticos dentro de la materia en el Capítulo 11, hallaremos que en la mayoría de los conductores, entre ellos el cobre y el aluminio, pero *no* el hierro, tienen muy poca influencia sobre el campo magnético. De momento, convenimos en eludir tanto el hierro como los materiales ferromagnéticos. Entonces podemos, en manera cierta, suponer que el campo magnético dentro del hilo es prácticamente el que habría en el vacío circulando las mismas corrientes.

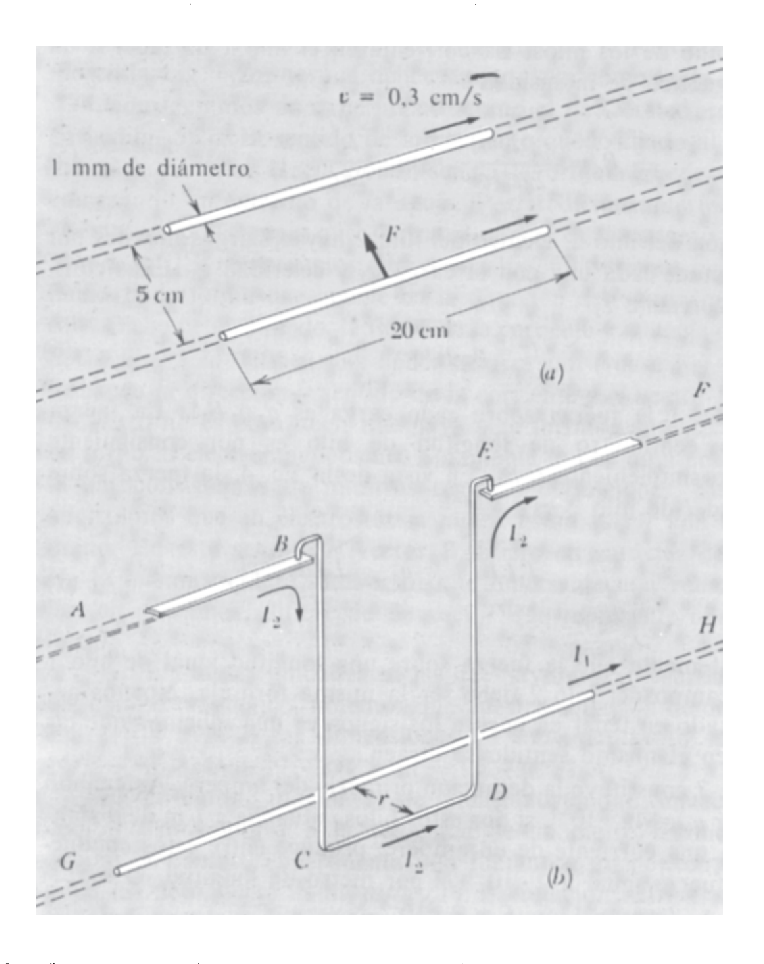


Fig. 6.4 (*a*) La corriente en cada hilo de cobre es de 31,67 A, y la fuerza *F* sobre la longitud de 20 cm de conductor es de $8 \cdot 10^{-4}$ *N*. (*b*) Una manera de medir la fuerza sobre cierta longitud de conductor. La sección *BCDE* se columpia como un péndulo debajo de los pivotes conductores. La fuerza sobre la longitud *CD* debida al campo del conductor recto *GH* es la única fuerza que desvía el péndulo de la vertical.

La fuerza atractiva sobre la longitud de 20 cm de hilo es

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \; \frac{31{,}67^2 \cdot 0{,}2}{0{,}05} = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{N} \tag{9}$$

Los $8 \cdot 10^{-4}$ N no es una fuerza muy grande pero puede medirse fácilmente. La Fig. 6.4*b* muestra cómo puede observarse la fuerza sobre una longitud dada de conductor. Y aquí con v menor que la celeridad de una hormiga sana, origina una fuerza respetable. La explicación es la inmensa cantidad de carga negativa que representan los electrones de conducción, carga que ordinariamente ha de neutralizarse por carga positiva, lo que apenas advertimos. Para apreciar esto, consideremos la fuerza con que los hilos de la Fig. 6.3 se repelerían si la carga de los $6{,}6 \cdot 10^{22}$ electrones por m *no* estuviera neutralizada. Hallaríamos que la fuerza es precisamente 40 billones de toneladas por centímetro de hilo. De modo que toda la materia es electricidad! Si los electrones de una gota de lluvia se sacasen de la tierra, el potencial de toda la tierra se elevaría en varios millones de volts.

La materia «a granel», desde las gotas de lluvia a los planetas, es casi exactamente neutra. Se encontrará que una cualquiera de esas porciones de materia, mucho mayor que una molécula, contiene casi el mismo número de electrones que de protones. Si no fuese así el campo eléctrico resultante sería tan intenso que el exceso de carga se expulsaría irresistiblemente. Esto ocurriría a los electrones en nuestro hilo de cobre incluso si el exceso de carga negativa no fuese más que el 10^{-10} del total. Por otro lado, un campo magnético no puede destruirse de esta manera. Independientemente de lo intenso que sea, no ejerce fuerza alguna sobre una carga estacionaria. Esto explica por qué las fuerzas que surjan del ***movimiento*** de cargas eléctricas pueden dominar el panorama. El segundo término de la derecha de la Ec. 1 puede ser mucho mayor que el primero. Gracias al segundo término, un motor eléctrico puede arrancar un coche. Sin embargo, en el dominio atómico, donde entra en juego la fuerza de coulomb entre pares de partículas cargadas, las fuerzas magnéticas ocupan el segundo lugar con relación a las fuerzas eléctricas. En general son más débiles, y tal como podíamos esperar, en un factor igual al cuadrado de la relación de la celeridad de la partícula a la celeridad de la luz.

Dentro de los átomos hallamos campos magnéticos tan grandes como 10^5 gauss. Los campos más intensos a gran escala producidos fácilmente en el laboratorio son de este orden de magnitud, aunque se han creado durante corto tiempo campos de varios millones de gauss. En la maquinaria eléctrica ordinaria, por ejemplo, los motores eléctricos, los más típicos son de 1 tesla *. La intensidad del campo magnético terrestre es de unas pocas decenas de microtesla en la superficie terrestre y presumiblemente muchas veces mayor en el interior del núcleo metálico de la tierra, donde circulan las corrientes que causan el campo. Vemos un espectacular despliegue de campos magnéticos en torno al sol. Una ***mancha solar*** es una erupción de campo magnético con intensidad local de unas décimas de tesla. Otras estrellas tienen campos magnéticos más intensos. El más intenso de todos es el campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones, o pulsar, donde la intensidad se cree que alcance el rango difícilmente concebible de 10^8 tesla. En una más amplia escala, nuestra galaxia está ocupada por campos magnéticos que se extienden sobre millares de años luz en el espacio interestelar. La intensidad del campo puede deducirse de las observaciones en radioastronomía. Es de unos 10^{-10} tesla —suficiente para hacer del campo magnético un factor importante en la dinámica del medio estelar.

* Nikola Tesla (1856-1943), inventor e ingeniero eléctrico en cuyo honor se dio nombre a la unidad del SI, inventó el motor de inducción de corriente alterna y otros útiles dispositivos electromagnéticos.

6.2 Algunas propiedades del campo magnético

El campo magnético, como el campo eléctrico, es un recurso para describir como interaccionan entre sí las partículas cargadas. Si decimos que el campo magnético en el punto (4,5, 3,2, 6,0) a las 12,00 del mediodía está dirigido horizontalmente en dirección y sentido negativo y que tiene 5 gauss de módulo, estamos manifestando acerca de la aceleración que presentaría una partícula cargada móvil en aquel punto espacio-temporal. La cosa notable es que manifestado en esta forma, dando simplemente una magnitud vectorial **B**, decimos todo lo que hay que decir. Con él puede predecirse únicamente la parte dependiente de la velocidad de la fuerza sobre *cualquier* partícula cargada móvil con *cualquier* velocidad. Esto hace innecesaria toda ulterior descripción de las otras partículas cargadas que son las fuentes de este campo. Dicho de otro modo, si existen dos sistemas completamente diferentes de cargas móviles para producir el mismo **E** y **B** en un punto particular, el comportamiento de cualquier partícula de prueba en el punto sería exactamente el mismo en los dos sistemas. Es por esta razón, solamente, que el concepto de campo es útil, como intermediario en la interacción de partículas. Y es por esta razón, que consideramos el campo como un ente independiente.

¿El campo es más, o menos, real que las partículas cuya interacción intentamos descubrir desde nuestro punto de vista? Ésta es una cuestión profunda que haríamos bien en dejarla a un lado de momento. Para algunos, los campos eléctricos y magnéticos eran vivamente reales — Faraday y Maxwell, para citar dos — con ello llegaron a nuevas penetraciones y grandes descubrimientos. Vamos a considerar el campo magnético, tal como ellos lo hicieron, y averiguar algunas de sus propiedades. Hasta aquí hemos estudiado solamente el campo magnético de un hilo recto o filamento de corriente estacionaria. Hallamos que la dirección del campo es en todo punto perpendicular al plano que contiene el filamento y el punto donde se observa el campo. El módulo del campo es proporcional a $1/r$. Las líneas de campo son circunferencias que envuelven el filamento, como está representado en la Fig. 6.5. El sentido de **B** se determina por el convenio, previamente adoptado, acerca del vector producto vectorial, por la decisión (arbitraria) de escribir el segundo término de la Ec. 1 como $+ q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, y por el *hecho físico* de que una carga positiva que se mueve en el sentido de una corriente positiva es atraída en vez de ser repelida. Todo esto es compatible si relacionamos el sentido de **B** al sentido de la corriente que es su fuente de la manera representada en la Fig. 6.5. Mirando en el sentido positivo de la corriente, las líneas de **B** giran en el sentido de las agujas del reloj. O si se prefiere para recordarla como la regla del tornillo.

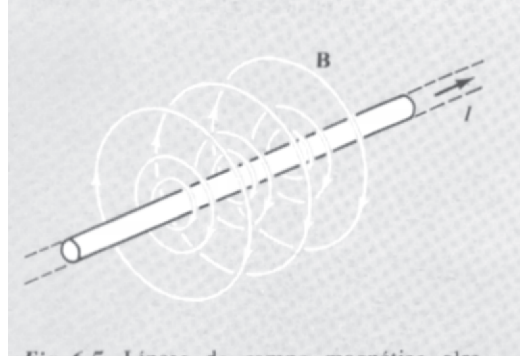
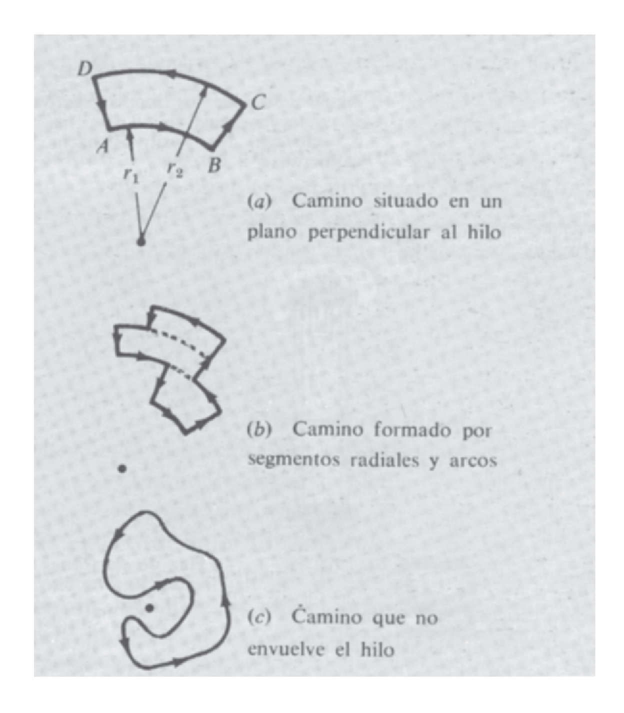


Fig. 6.5 Líneas de campo magnético alrededor de un hilo recto que conduce corriente.

Veamos la integral curvilínea de **B** a lo largo de un camino cerrado en este campo. (Recordemos que una cuestión similar, en el caso del campo eléctrico de una carga puntiforme, nos conduce a una propiedad simple y fundamental de todos los campos electrostáticos.) Consideremos primero el camino *ABCD* en la Fig. 6.6*a*. Está contenido en un plano perpendicular al hilo; en realidad, necesitamos solamente



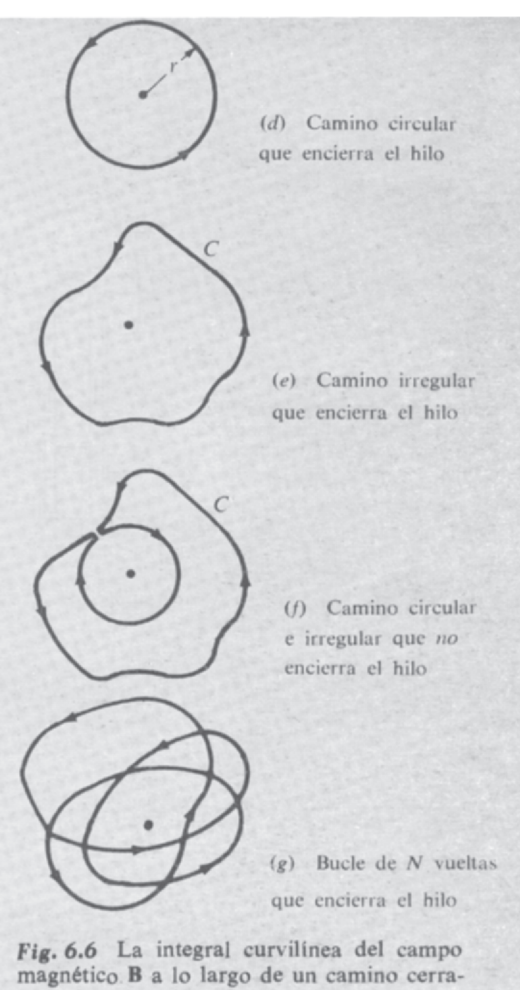


Fig. 6.6 La integral curvilínea del campo magnético **B** a lo largo de un camino cerrado solamente depende de la corriente encerrada.

operar en este plano, pues **B** no tiene componente paralela al hilo. La integral curvilínea de **B** a lo largo del camino representado es nula, por la siguiente razón. Los caminos *BC* y *DA* son perpendiculares a **B** y en nada contribuyen. A lo largo de *AB*, **B** es más intenso que a lo largo de *CD* en la relación r_2/r_1, pero *CD* es más largo que *AB* en la misma relación, pues estos dos arcos subtienden el mismo ángulo en el hilo. Como los dos arcos dan contribuciones iguales y de signo contrario, la integral total es nula.

Se deduce que la integral curvilínea es también nula a lo largo de todo camino que pueda construirse con segmentos radiales y arcos, tal como el camino en la Fig. 6.6*b*. A partir de aquí, es fácil concluir que la integral curvilínea es nula a lo largo de *todo* camino que no encierre el hilo. Para redondearlo solamente tenemos que demostrar que la integral a lo largo de un pequeño camino triangular se anula para un orden suficiente. El mismo paso intervino en el caso del campo eléctrico.

Un camino que no encierre el hilo es como el camino en la Figura. 6.6*c* el cual, si fuese de hilo, podría sacarse libremente. La integral curvilínea a lo largo de tal camino es nula.

Consideremos ahora un camino circular que rodee el hilo como en la Fig. 6.6*d*. La circunferencia mide $2\pi r$, el campo es $\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 rc^2}$ y en todo punto tangente al camino así que el valor de la integral curvilínea a lo largo de este camino particular es $(2\pi r)\,(2\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 rc^2}cr)$, o $\mu_0 I$. Pretendemos que *todo* camino que abarca una vez el hilo debe tener el mismo

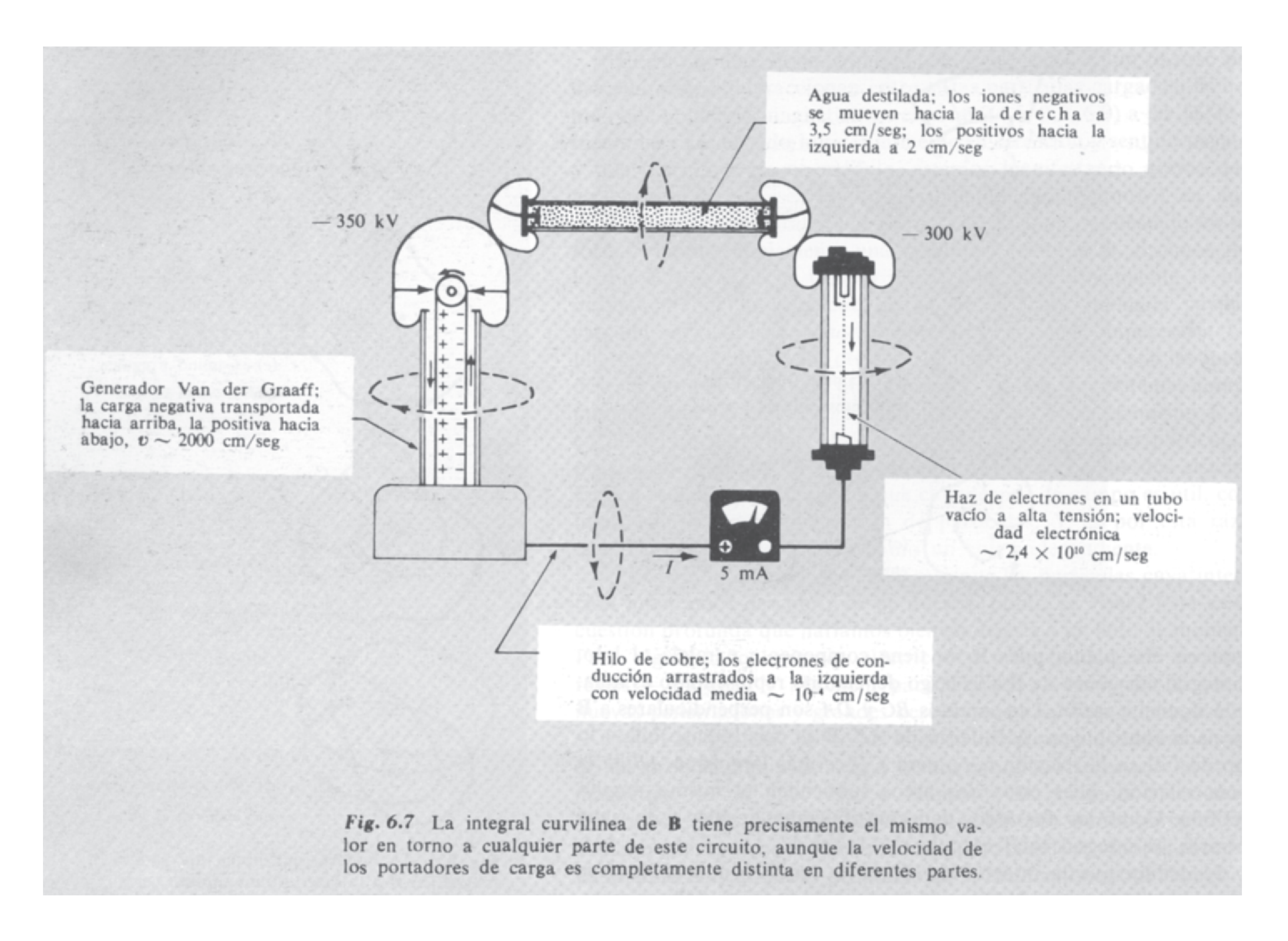


Fig. 6.7 La integral curvilínea de **B** tiene precisamente el mismo valor en torno a cualquier parte de este circuito, aunque la velocidad de los portadores de carga es completamente distinta en diferentes partes.

valor. Por ejemplo, consideremos el camino irregular C en la Fig. 6.6*e*. Construyamos el camino C' de la Fig. 6.6*f* constituido por un camino como el C y uno circular, pero que *no* abarque el hilo. La integral curvilínea a lo largo de C' debe ser nula y por lo tanto la integral a lo largo de C debe ser igual a la integral a lo largo de la circunferencia con el signo cambiado, la cual ya ha sido calculada en valor absoluto $\mu_0 I$. El signo depende del sentido de recorrido del camino. Nuestra conclusión general es:

$$\boxed{\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \times \text{corriente encerrada por el camino}} \qquad (10)$$

La Ec. 10 se cumple cuando el camino abarca una vez la corriente en el hilo. Evidentemente, un camino que la abarque N veces, como el de la Fig. 6.6*g*, dará un resultado N veces mayor para la integral curvilínea.

El campo magnético, como hemos subrayado anteriormente, depende solamente del transporte de carga con el tiempo, el número de unidades de carga que pasan, por un punto dado en el circuito, por segundo. En la Fig. 6.7 tenemos un circuito con una corriente de 5 mA. La velocidad media de los portadores de carga oscila desde 10^{-4} cm/seg en una parte del circuito a 0,8 veces la celeridad de la luz en otra. La integral curvilínea de **B** a lo largo de un camino cerrado, tiene el mismo valor en cualquier parte de este circuito, a saber:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 6{,}28 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T \cdot m} \qquad (11)$$

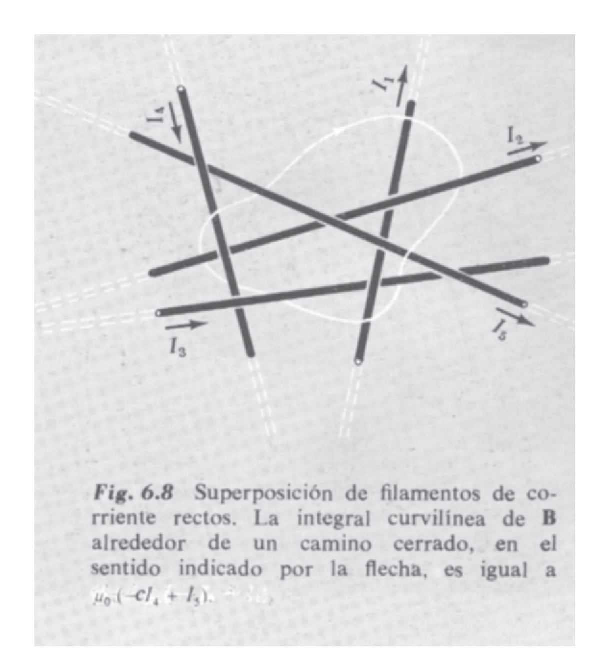


Fig. 6.8 Superposición de filamentos de corriente rectos. La integral curvilínea de **B** alrededor de un camino cerrado, en el sentido indicado por la flecha, es igual a $\mu_0(-cI_4 + I_5)$.

Lo que hemos demostrado en el caso de un filamento de corriente recto largo se cumple evidentemente, por superposición, para el campo de cualquier sistema de filamentos rectos. En la Fig. 6.8 varios hilos conducen corrientes en distintas direcciones. Si la Ec. 10 se cumple para el campo magnético de uno de estos hilos, debe cumplirse para el campo total que es la suma vectorial, en todo punto, de los campos de los hilos individuales. Este es un campo bien complicado. Sin embargo, podemos predecir el valor de la integral curvilínea de **B** a lo largo del camino cerrado en la Fig. 6.8, simplemente, advirtiendo qué corrientes encierra el camino y en qué sentido.

No obstante, nos interesan otros circuitos, además de los hilos rectos largos. Deseamos determinar el campo magnético de cualquier tipo de distribución de corriente — por ejemplo, el de una corriente que circula en un circuito cerrado. Resulta que, estos campos más generales, *obedecen exactamente a la misma ley*, la Ec. 10. La integral curvilínea de **B** alrededor de un hilo alabeado es igual a la de alrededor de un hilo recto largo, que conduce la misma corriente. Esto discurre fuera de lo deducido hasta aquí; así que debemos verlo como un postulado confirmado por las pruebas experimentales de sus consecuencias.

Para establecer la ley de manera más general, debemos hallar la distribución cúbica de corriente. Una distribución general de corriente estacionaria se determina por una densidad cúbica de corriente $\mathbf{J}(x, y, z)$ que varía de un lugar a otro, pero que es constante con el tiempo. Una corriente en un hilo es simplemente un caso particular en el cual **J** tiene un valor elevado dentro del hilo pero es nula en los otros puntos. Discutimos la distribución cúbica de corriente en el Cap. 4, donde señalamos que para las corrientes independientes del tiempo, **J** debía satisfacer la ecuación de continuidad, o condición de conservación de la carga,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \qquad (12)$$

Tomemos una curva cerrada C en una región donde circulen corrientes. La corriente encerrada por C es el flujo de **J** a través de la superficie abarcada por C, es decir, la integral de superficie $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$

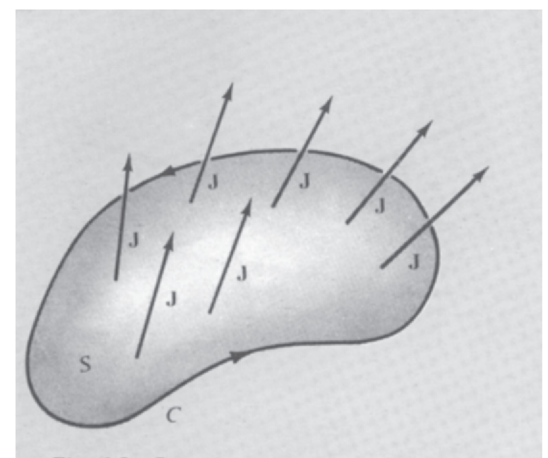
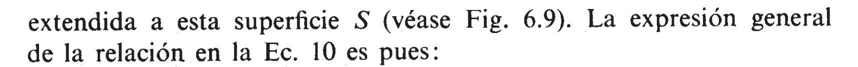


Fig. 6.9 **J** es la densidad de corriente local. La integral de superficie de **J** extendida a *S* es la corriente encerrada por la curva *C*



extendida a esta superficie *S* (véase Fig. 6.9). La expresión general de la relación en la Ec. 10 es pues:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \tag{13}$$

Comparémosla con el teorema de Stokes, que desarrollamos en el Cap. 2:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{ rot } \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} \tag{14}$$

vemos que tiene la siguiente expresión equivalente:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \tag{15}$$

Esta es la expresión más simple y más general de la relación entre el campo magnético y las cargas móviles que lo originan.

Sin embargo, la Ec. 15 no es suficiente para determinar $\mathbf{B}(x, y, z)$, dado $\mathbf{J}(x, y, z)$, pues distintos vectores campo podrían tener el mismo rotacional. Necesitamos completarla con otra condición. Mejor que pensemos en la divergencia de **B**. Volviendo al campo magnético de un sólo hilo recto, observamos que la divergencia de este campo es nula. No podríamos dibujar una pequeña caja, en cualquier parte, incluso una que envuelva el hilo, que tuviese un flujo resultante saliente o entrante. Esto es suficiente para notar que las cajas V_1 y V_2 en la Fig. 6.10 no tiene flujo resultante y pueden disminuir a cero sin mostrar algo. Para este campo entonces div $\mathbf{B} = 0$ y por tanto también para toda superposición de tales campos. De nuevo postulamos que el principio puede extenderse al campo de cualquier distribución de corrientes, así que la ecuación que acompaña a la Ec. 12 es la condición

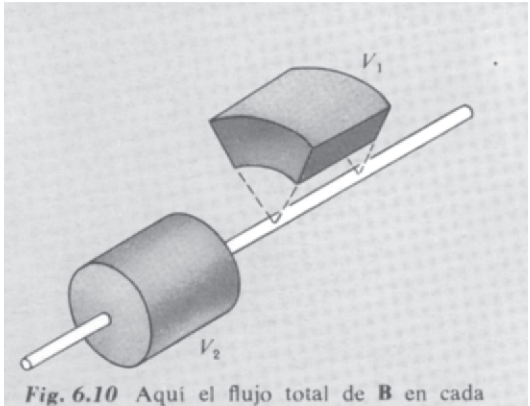


Fig. 6.10 Aquí el flujo total de **B** en cada una de las cajas es nulo.

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0} \tag{16}$$

Estamos tratando con campos cuyas fuentes están dentro de una región finita. No consideraremos las fuentes infinitamente remotas e indefinidamente intensas. Con esta condición las ecuaciones 15 y 16 juntas determinan **B** únicamente si se da **J.** Supongamos dos campos distintos $\mathbf{B}_1 (x, y, z)$ y $\mathbf{B}_2 (x, y, z)$ que ambos satisfacen a las Ecs. 15 y 16. Su diferencia, el vector campo $\mathbf{D} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ es un campo con divergencia nula y rotacional nulo en todo punto. ¿Qué forma tendría? Teniendo rotacional nulo debe ser el gradiente de cierta función potencial $f(x, y, z)$: $\mathbf{D} = \nabla f$. Pero además $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, así que $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0$ en todo punto. Sobre un contorno suficientemente alejado f debe tomar cierto valor constante f_0. Ya que f satisface a la ecuación

de Laplace en todo punto interior al contorno no puede presentar máximo ni mínimo en ningún punto de esta región (Sección 2.11) y así debe tener el valor f_0 en todas partes. De aquí $\mathbf{D} = \nabla f = 0$, y $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. La contrapartida en el campo electrostático de las ecuaciones 15 y 16 era

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \text{y} \qquad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \tag{17}$$

Sin embargo, en el caso del campo electrostático, partíamos de la ley de Coulomb, la cual expresaba directamente la contribución de la carga el campo eléctrico en cada punto. Aquí tenemos que encaminarnos de nuevo a alguna relación de este tipo *. Lo haremos por medio de una *función potencial.*

6.3 Potencial vector

Hallamos que la función potencial escalar $\varphi(x, y, z)$ nos daba una manera simple de calcular el campo electrostático de una distribución de cargas. Si existe una distribución de cargas $\rho(x, y, z)$, el potencial en todo punto (x_1, y_1, z_1) se da por la integral de volumen

$$\varphi(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x_2,y_2,z_2)\, dv_2}{r_{12}} \tag{18}$$

La integración se extiende a toda la distribución de carga, y r_{12} es el valor de la distancia de (x_2, y_2, z_2) a (x_1, y_1, z_1). El campo eléctrico **E** se obtenía como el gradiente negativo de φ:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \tag{19}$$

El mismo artificio aquí no tiene éxito, a causa del carácter, esencialmente distinto, de **B**. El rotacional de **B** *no* es necesariamente nulo, así que, en general, **B** no puede ser el gradiente de un potencial escalar. Sin embargo, conocemos otro tipo de derivación vectorial, el rotacional. Resulta que podemos representar, provechosamente, a **B**, no como el gradiente de una función escalar, sino como el rotacional de una función *vectorial*, como ésta:

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}} \tag{20}$$

* El alumno puede preguntar por qué no podemos haber partido de algo equivalente a la ley de Coulomb para la interacción de corrientes. La respuesta es que una porción de corriente filiforme, distinta a una carga eléctrica, no es una cosa independiente que pueda aislarse físicamente. No podemos realizar un experimento para determinar el campo de *parte* de un circuito; si el resto del circuito no está presente, la corriente no puede ser estacionaria sin violar la condición de continuidad.

Por analogía evidente, podemos llamar a **A** el *potencial vector*. *No* es evidente, en este caso, el por qué esta táctica sea útil. Esto tendrá que aparecer según procedamos. Es alentador que la Ec. 16 se satisfaga automáticamente, ya que div rot **A** = 0, para todo **A** *. O considerado de otra manera, el hecho de que div **B** = 0 nos presenta la oportunidad de representar a **B** como el rotacional de otra función vectorial. Nuestra tarea ahora es descubrir cómo calcular **A**, cuando se da la distribución de corrientes **J**, con lo que la Ec. 20 dará el campo magnético correcto. En vista de la Ec. 15, la relación entre **J** y **A** es

$$\text{rot }(\text{rot }\mathbf{A}) = \mu_0 J \tag{21}$$

La Ec. 21, siendo una ecuación vectorial, en realidad, son tres ecuaciones. Vamos a desarrollar una de ellas, la ecuación correspondiente a la componente x. La componente x de rot **B** es $\partial B_z/\partial y$ — $\partial B_y/\partial z$. Las componentes z e y de **B** son, respectivamente,

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{22}$$

Así que la componente x de la Ec. 21 se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \mu_0 J_x \tag{23}$$

Suponemos que nuestras funciones son tales que puede cambiarse el orden de la derivación parcial. Teniendo en cuenta esto y operando un poco, podemos escribir la Ec. 23 de esta manera:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \mu_0 J_x \tag{24}$$

Para que la cosa sea más simétrica, sumamos y restamos el mismo término, $\partial^2 A_x/\partial x^2$, en el primer miembro:

$$-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \mu_0 J_x \tag{25}$$

* Si no se está familiarizado con este hecho, véase el Prob. 2.16.

Podemos reconocer que los tres primeros términos son la laplaciana negativa de A_x. La cantidad entre paréntesis es la divergencia de **A**. Ahora tenemos cierta amplitud en la construcción de **A**. Todo lo que nos interesa es su rotacional; su divergencia puede ser la que queremos. *Requerimos* que *

$$\text{div}\,\mathbf{A} = 0 \tag{26}$$

En otras palabras, entre las distintas funciones que pueden satisfacer nuestro requisito de que rot **A** = **B**, consideremos solamente como candidatos solamente las que tienen divergencia nula. Entonces parte de la Ec. 25 se anula y queda simplemente

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 J_x \tag{27}$$

J_x es una función escalar conocida de x, y, z. Comparemos la Ec. 27 con la ecuación de Poisson, Ec. 2.70, que decía:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{28}$$

Las dos ecuaciones son idénticas en la forma. Ya *conocemos* cómo hallar la solución de la Ec. 28. La cual es la integral de volumen de la Ec. 18. Por lo tanto una solución de la Ec. 27 debe ser

$$A_x(x_1,y_1,z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_x(x_2,y_2,z_2)\,dv_2}{r_{12}} \tag{29}$$

Las otras componentes deben satisfacer fórmulas similares. Pueden combinarse todas naturalmente en una fórmula vectorial:

$$\boxed{\mathbf{A}(x_1,y_1,z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(x_2,y_2,z_2)\,dv_2}{r_{12}}} \tag{30}$$

Sólo hay un inconveniente. Estipulamos que div **A** = 0, para obtener la Ec. 27. ¿Cómo conocemos que el **A** dado por la Ec. 30

* Para ver por qué tenemos libertad de hacer esto, supongamos que tenemos un **A** tal que rot **A** = **B**, pero div **A** = $f(x, y, z) \neq 0$. Tratando a f como la densidad de carga ρ en el campo electrostático, evidentemente podemos hallar un campo **F**, el análogo del electrostático **E**, tal que div **F** = f, pero sabemos que el rotacional de tal campo es nulo. Por tanto podíamos sumar — **F** a **A** construyendo un nuevo campo con rotacional correcto y divergencia nula.

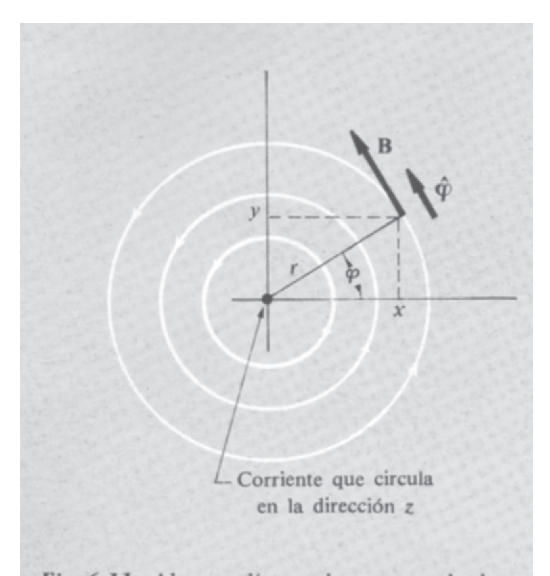


Fig. 6.11 Algunas líneas de campo alrededor de un filamento de corriente. La corriente circula hacia nosotros (hacia fuera del plano del papel).

tendrá esta especial propiedad? Afortunadamente, puede demostrarse que es así.

Como ejemplo de potencial vector, consideremos un hilo recto largo que conduce una corriente I. En la Fig. 6.11 vemos la corriente que llega a nosotros desde la página, circulando a lo largo de la dirección z, en el sentido positivo. Conocemos el campo magnético de un hilo recto. Las líneas de campo son circunferencias, como ya se bosquejó en la Fig. 6.5. En la Fig. 6.11 se representan algunas. El módulo de **B** es $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Usando un vector $\hat{\varphi}$ unitario en la dirección «circular» podemos escribir el vector **B** como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \tag{31}$$

Teniendo en cuenta que el vector unitario $\hat{\varphi}$ es $-\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}$, podemos escribir esto en función de x e y como sigue:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{(-\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}}{x^2 + y^2}\right) \tag{32}$$

Una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ que satisfará a $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ es la siguiente:

$$\mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi}I \ln(x^2 + y^2) \tag{33}$$

Para comprobarlo, calculamos las componentes de $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{-\mu_0 I y}{2\pi(x^2 + y^2)} && (= B_x) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{+\mu_0 I x}{2\pi(x^2 + y^2)} && (= B_y) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 && (= B_z) \end{aligned} \tag{34}$$

Por descontado, esta no es la única función que serviría como potencial vector para este **B** particular. Al **A** de la Ec. 33 puede añadírsele cualquier función vectorial con rotacional nula. Todo esto se cumple en el espacio exterior al hilo. Dentro del hilo, **B** es distinto, así que **A** debe ser también distinto. No es difícil hallar la función potencial vector adecuada para el interior de un hilo sólido de sección circular (véase Prob. 6.26).

Por cierto, el **A** de nuestro ejemplo particular anterior no podía haberse obtenido por la Ec. 30. La integral divergería debido a la extensión infinita del hilo. Esto puede recordarnos la dificultad encontrada en el Cap. 2 para determinar una función potencial para el campo eléctrico de un hilo cargado. En realidad, los dos problemas están relacionados muy estrechamente, como esperaríamos de su idéntica geometría y la similaridad de las Ecs. 30 y 18. Hallamos (Ec. 17 del

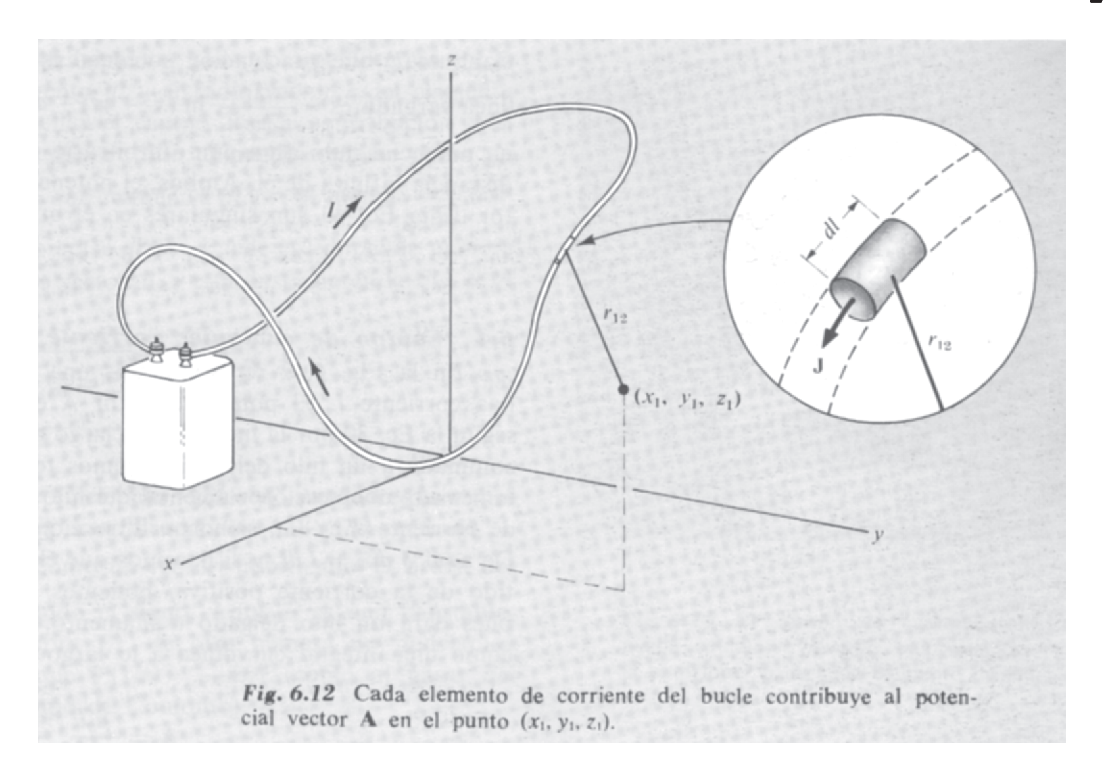


Fig. 6.12 Cada elemento de corriente del bucle contribuye al potencial vector **A** en el punto (x_1, y_1, z_1).

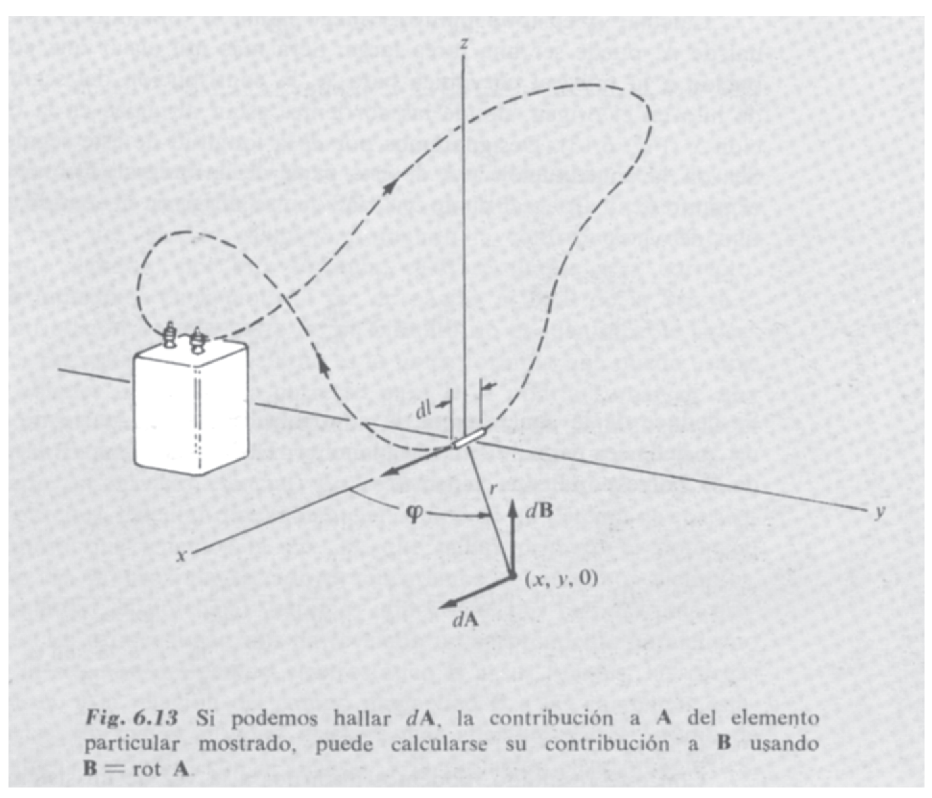


Fig. 6.13 Si podemos hallar $d\mathbf{A}$, la contribución a **A** del elemento particular mostrado, puede calcularse su contribución a **B** usando $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Capítulo 2) que una función potencial escalar para el problema de la línea cargada es $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$ ln $(x^2 + y^2)$ + *constante arbitraria.* Esto asigna potencial nulo a un punto arbitrario el cual ni está en el hilo ni a distancia infinita de él. Ambos, el potencial escalar y el potencial vector de la Ec. 33 son singulares en el origen y en el infinito.

6.4 Campo de cualquier corriente que recorre un hilo

En la Fig. 6.12 representamos una espira de hilo que conduce una corriente I. El potencial vector **A** en el punto (x_1, y_1, z_1) se da según la Ec. 30 por la integral a lo largo de la espira. Para la corriente confinada a un hilo delgado podemos tomar como elemento de volumen dv_2 una sección elemental del hilo de longitud dl. La densidad de corriente J es I/a, siendo a la sección recta del hilo, y $dv_2 = adl$. De aquí $\mathbf{J}\, dv_2 = I\, \mathbf{dl}$, y si hacemos que el vector $\mathbf{dl}$ se dirija en el sentido de la corriente positiva, podemos sustituir $\mathbf{J}\, dv_2$ por $I\, \mathbf{dl}$. Así pues para un hilo delgado o filamento, podemos escribir la Ec. 30 como una integral curvilínea a lo largo del circuito:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r_{12}} \tag{35}$$

Calcular **A** en todo punto, y luego hallar **B** tomando el rotacional de **A**, puede ser una tarea larga. Será más útil aislar una contribución a la integral curvilínea para **A**, la contribución del segmento de hilo en el origen, donde las corrientes están dirigidas en la dirección x (Fig. 6.13). Designaremos por dl la longitud de este segmento. Sea $d\mathbf{A}$ la contribución a **A** de esta parte de la integral. Entonces en el punto $(x, y, 0)$ en el plano xy, $d\mathbf{A}$, que se dirige en el sentido positivo de x, es

$$d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{36}$$

Se deduce de la simetría que la contribución de esta parte de **A** al rot **A** debe ser perpendicular al plano xy. Designando por $d\mathbf{B}$ la parte de **B** correspondiente, tenemos

$$d\mathbf{B} = \text{rot } (d\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{z}}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \hat{\mathbf{z}}\, \frac{I\ dl \cdot y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$
$$= \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\ dl \,\text{sen}\, \varphi}{r^2} \tag{37}$$

Con este resultado, podemos librarnos a la vez de un sistema de

coordenadas particular. Evidentemente, todo lo que interesa es la orientación relativa del elemento dl y el radio vector r del elemento al punto donde se quiere hallar el campo **B**. La contribución a **B** de cualquier segmento elemental de hilo dl puede tomarse como un vector perpendicular al plano que contiene a dl y $\mathbf{r}$, de módulo $\frac{\mu_0}{4\pi} I\, dl$ $\text{sen}\, \varphi / r^2$ donde φ es el ángulo entre dl y $\mathbf{r}$. Puede escribirse de manera más breve usando el producto vectorial, y está ilustrado en la Fig. 6.14

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I\, dl \times \mathbf{r}}{4\pi r^2}} \tag{38}$$

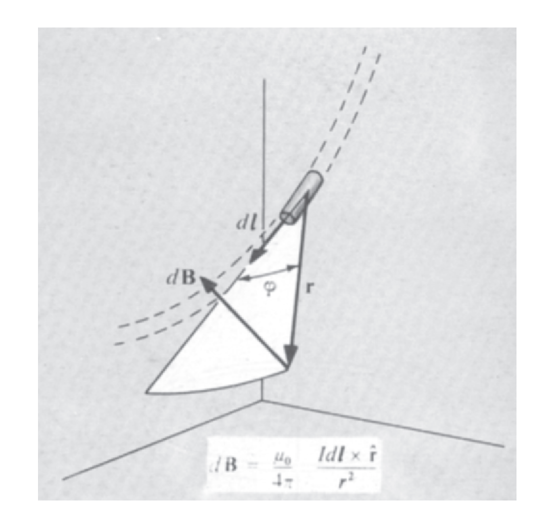


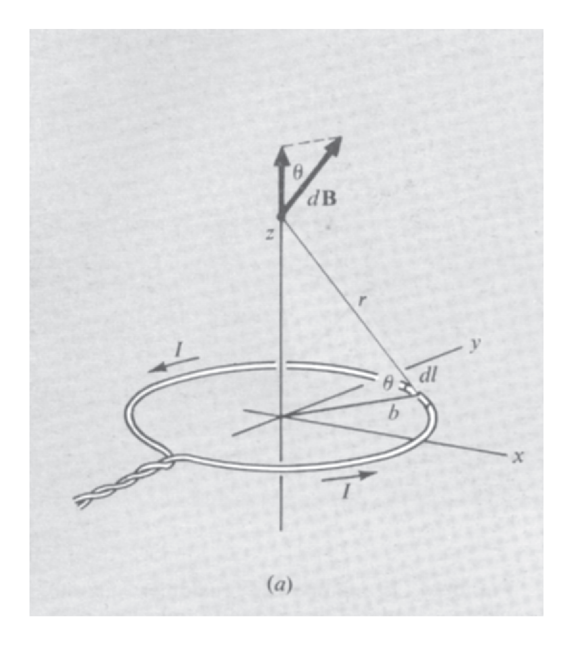
Fig. 6.14 El campo de cualquier circuito puede calcularse usando esta relación para la contribución de cada elemento de circuito.

Si se está familiarizado con el cálculo vectorial, puede reducirse el paso de la Ec. 35 a la Ec. 38. Escribiendo $d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A}$, con $d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \ dl/r$, tratando a ∇ como un vector, invirtiendo el orden del producto vectorial y cambiando el signo. Aquí dl es una constante, así que solamente opera sobre $1/r$, de otra manera no podríamos obtener esto. Recordemos que $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$ (como al pasar del potencial culombiano al campo de Coulomb). Así:

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I\, dl \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I\, dl \times \left(-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \end{aligned} \tag{39}$$

Históricamente, la Ec. 38 se conoce con el nombre de la ley de Biot y Savart. El significado de la Ec. 38 es que si **B** se calcula integrando a lo largo del *circuito completo*, tomando la contribución de cada elemento dándolo por esta fórmula, el **B** resultante será correcto. Como indicamos en la nota al pie de página al final de la Sec. 6.2, la contribución de una parte de un circuito no es identificable físicamente. En realidad, la Ec. 38 no es la única fórmula que puede usarse para obtener un resultado correcto para **B** — podría sumársele una función que se anulase al integrar a lo largo de un camino cerrado.

Nos parece haber descartado el potencial vector apenas nos ha prestado un servicio esencial. En realidad, a menudo es más fácil, en la práctica, calcular directamente el campo de un sistema de corrientes, ahora que tenemos la Ec. 38, que hallar primero el potencial vector. En la próxima sección practicaremos con algunos ejemplos. Sin embargo, el potencial vector es importante por razones más profundas. En primer lugar, nos ha revelado un sorprendente paralelismo entre la relación del campo electrostático **E** a sus fuentes, las cargas eléctricas, y la relación del campo magnético **B** a las corrientes estacionarias. Su mayor utilidad discurre más adelante, en el estudio de los campos variables con el tiempo, y la radiación electromagnética.



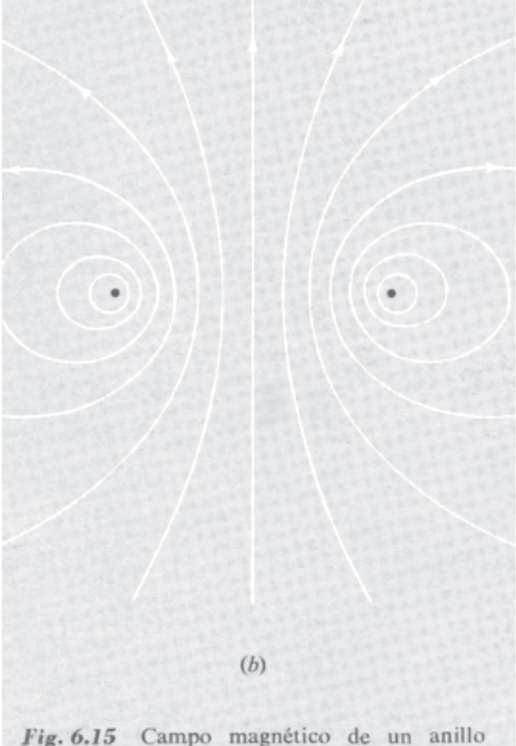


Fig. 6.15 Campo magnético de un anillo de corriente. (*a*) Cálculo del campo sobre el eje; (*b*) algunas líneas de campo.

6.5 *Campos de espiras y bobinas*

En la Fig. 6.15*a* se representa una corriente filiforme en forma de espira circular de radio b. Podría predecirse, sin ningún cálculo, que el campo magnético de esta fuente debe ser algo parecido a lo indicado en la Fig. 6.15*b*, en donde hemos dibujado algunas líneas de campo en un plano que pasa por el eje de simetría. El campo en conjunto debe poseer simetría de revolución en torno este eje, el eje z en la Fig. 6.15*a*, y las propias líneas del campo deben ser simétricas con respecto al plano de la espira, el plano xy. Muy cerca del hilo el campo parecerá el de cerca de un hilo recto largo, ya que las partes distantes del anillo son relativamente poco importantes.

Es fácil calcular el campo en el eje, usando la Ec. 38. Cada elemento del anillo de longitud dl contribuye a $d\mathbf{B}$ perpendicularmente a r. Solamente necesitamos incluir la componente z de $d\mathbf{B}$, pues sabemos que el campo total sobre el eje debe dirigirse en la dirección z,

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\frac{b}{r} \qquad (40)$$

Integrando a lo largo de toda la espira, tenemos simplemente $\int dl = 2\pi b$, así que el campo sobre el eje en un punto z, es

$$B_z = \frac{\mu_0 b^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0 b^2 I}{2(b^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{(campo sobre el eje)} \quad (41)$$

En el centro del anillo, $z = 0$, el módulo del campo es

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{b} \qquad \text{(campo en el centro)} \quad (42)$$

El arrollamiento cilíndrico de hilo, representado en la Fig. 6.16*a*, se llama corrientemente solenoide. Supongamos que el hilo está uniformemente poco espaciado de manera que el número de vueltas en el arrollamiento por centímetro de longitud, a lo largo del cilindro, es una constante a. Ahora el camino de la corriente es en realidad helicoidal, pero si las vueltas son muchas y poco espaciadas, podemos ignorarlo y considerar todo el solenoide equivalente a una pila de corrientes circulares. Entonces podemos usar la Ec. 41 como base para calcular el campo en un punto, tal como el z, sobre el eje de la bobina. Tomemos primero la contribución de la corriente anular incluida entre radios del punto z que formen ángulos θ y $\theta + d\theta$ con el eje. La longitud de este segmento de solenoide, en blanco en la Fig. 6.16*b*, es $r d\theta/\text{sen}\,\theta$, y por tanto equivalente a una espira que conduce una corriente $Inr\,d\theta/\text{sen}\,\theta$. Ya que $r = b/\text{sen}\,\theta$ tenemos, para

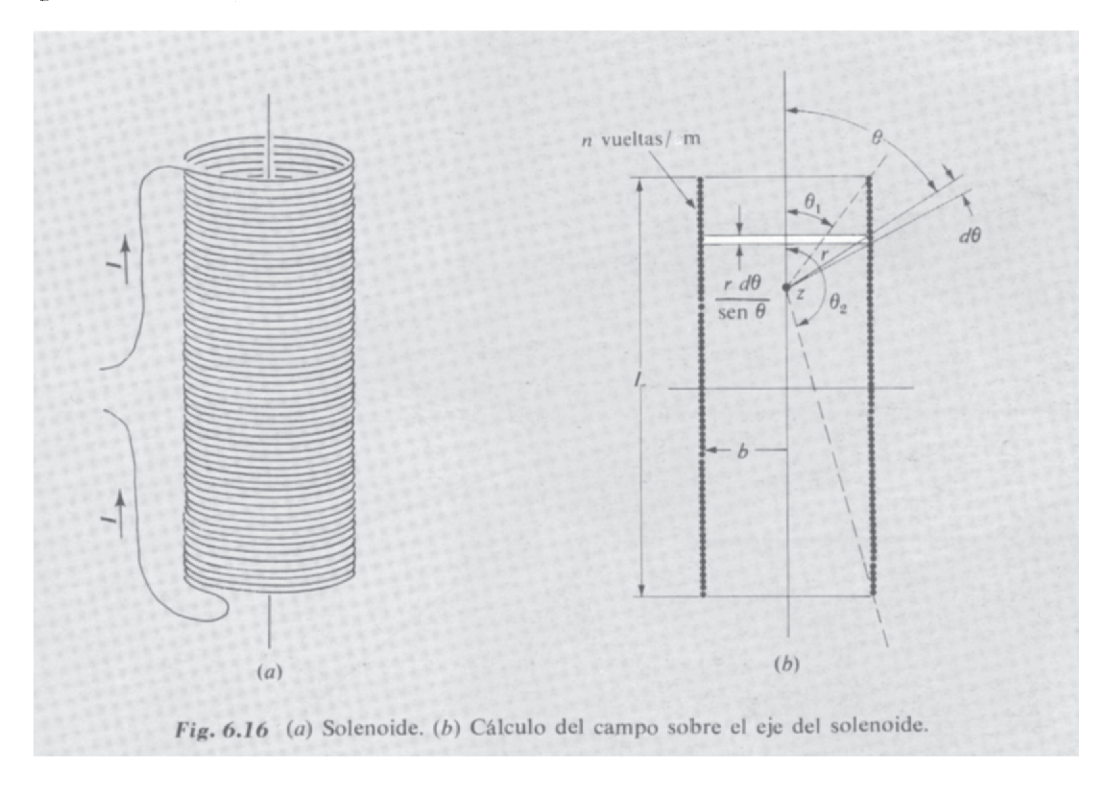


Fig. 6.16 (a) Solenoide. (b) Cálculo del campo sobre el eje del solenoide.

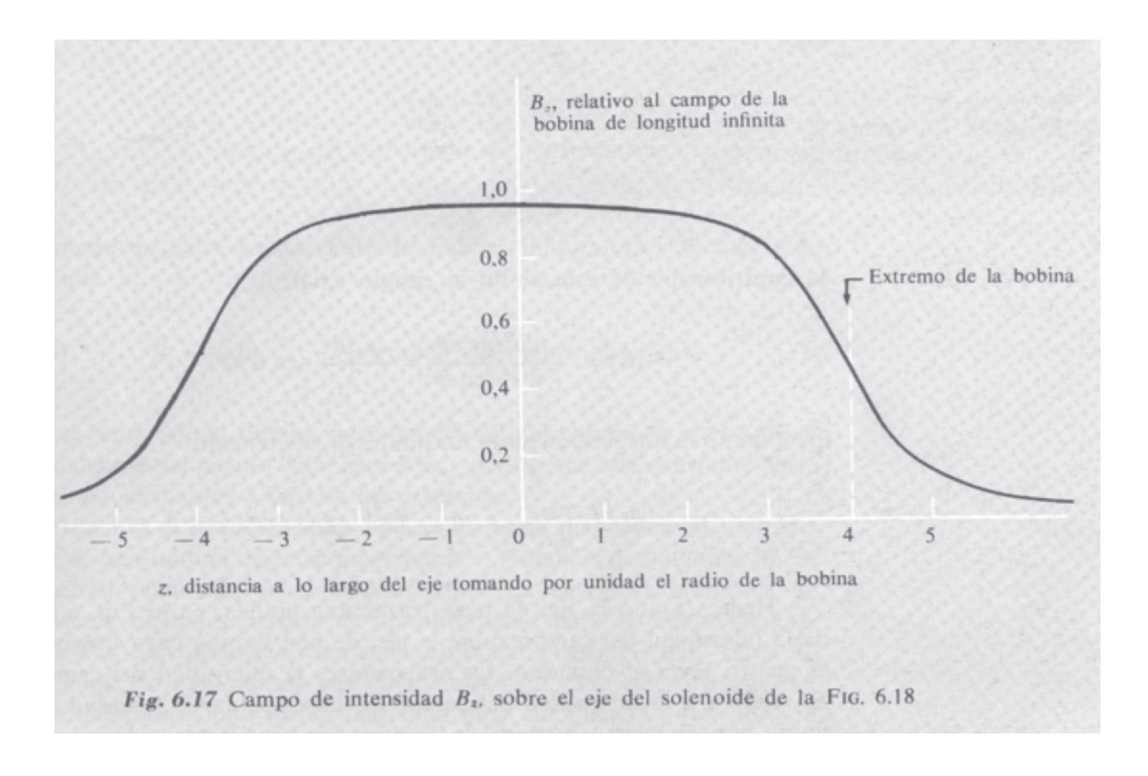
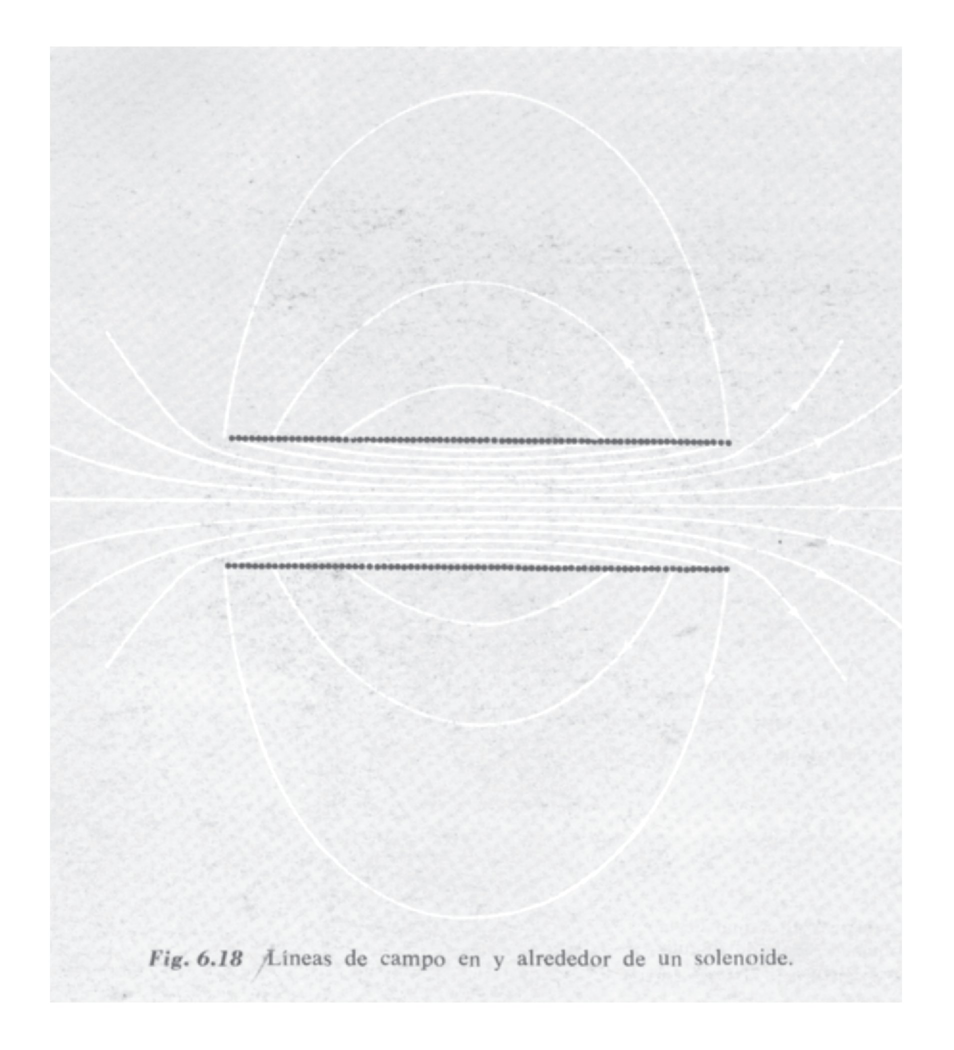


Fig. 6.17 Campo de intensidad B_z, sobre el eje del solenoide de la Fig. 6.18


Fig. 6.18 Líneas de campo en y alrededor de un solenoide.

la contribución de este anillo al campo axial:

$$dB_z = \frac{\mu_0 b^2 Inr\, d\theta}{2\, r^3 \operatorname{sen} \theta} = \frac{\mu_0 In}{2} \operatorname{sen} \theta\, d\theta \tag{43}$$

Efectuando la integración entre los límites θ_1 y θ_2 tenemos

$$B_z = \frac{\mu_0\, In}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \frac{\mu_0\, In}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \tag{44}$$

Hemos usado la Ec. 44 para trazar una gráfica, en la Fig. 6.17, de la intensidad del campo sobre el eje, de una bobina cuya longitud es cuatro veces el diámetro. La ordenada es la intensidad del campo B_z relativa a la intensidad del campo en una bobina de longitud infinita, con el mismo número de vueltas por centímetro y la misma

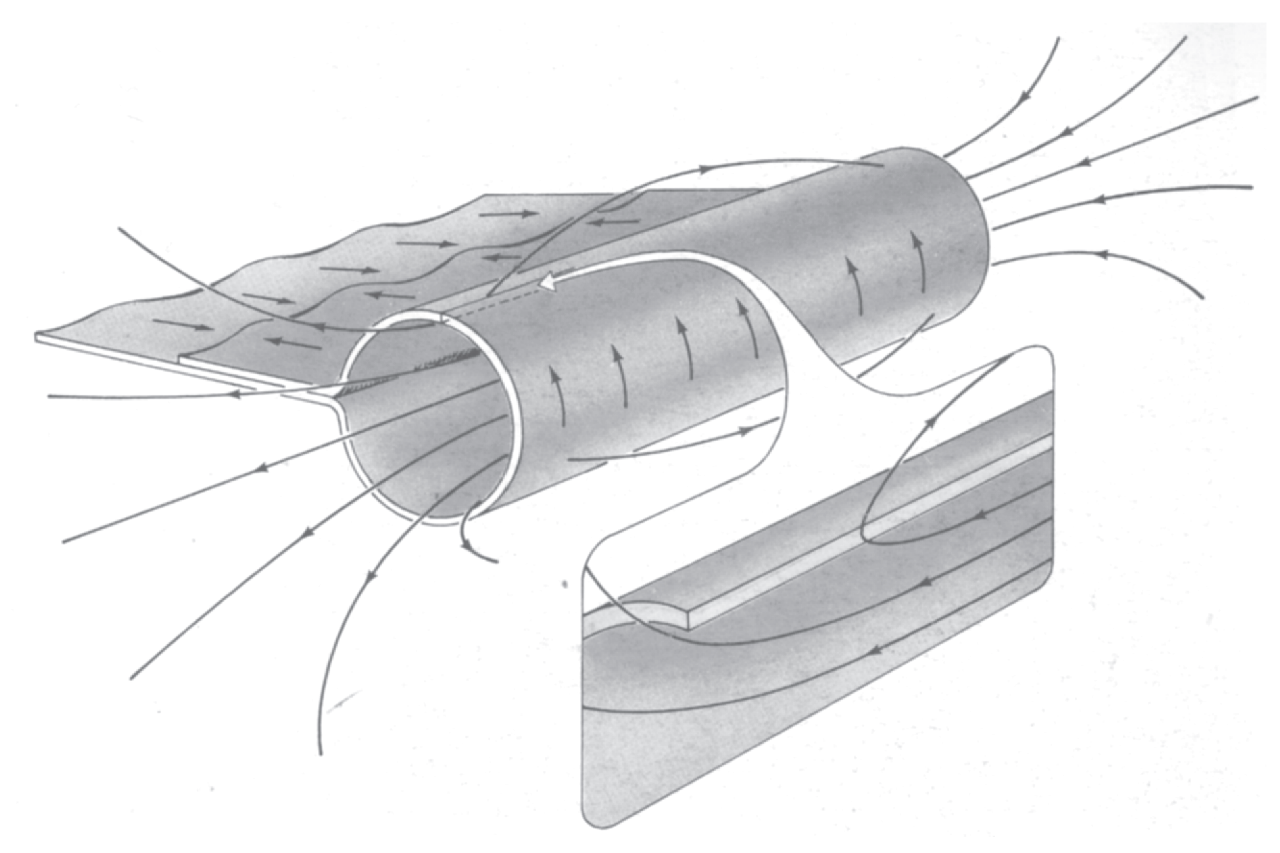


Fig. 6.19 Solenoide formado por una sola lámina conductora cilíndrica. Intercalamos cómo varía la dirección de las líneas de campo dentro del conductor que transporta la corriente.

corriente en cada vuelta. Para la bobina infinita, $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, así que

$$B_z = \mu_0 In \qquad \text{(solenoide infinitamente largo)} \qquad (45)$$

En el centro de la bobina « cuatro a uno » el campo es muy aproximadamente del mismo valor que éste, y permenece casi constante hasta que nos acercamos a uno de los extremos.

La Fig. 6.18 presenta las líneas de campo magnético en y alrededor de una bobina de estas proporciones. Notemos que algunas líneas penetran realmente en el arrollamiento. La envoltura cilíndrica de corriente es una superficie de discontinuidad para el campo magnético. Por descontado, si deseamos examinar el campo muy cerca de los hilos, no hallaríamos una singularidad infinitamente brusca, sino que hallaríamos una forma ondulada muy complicada alrededor y a través de los hilos individuales.

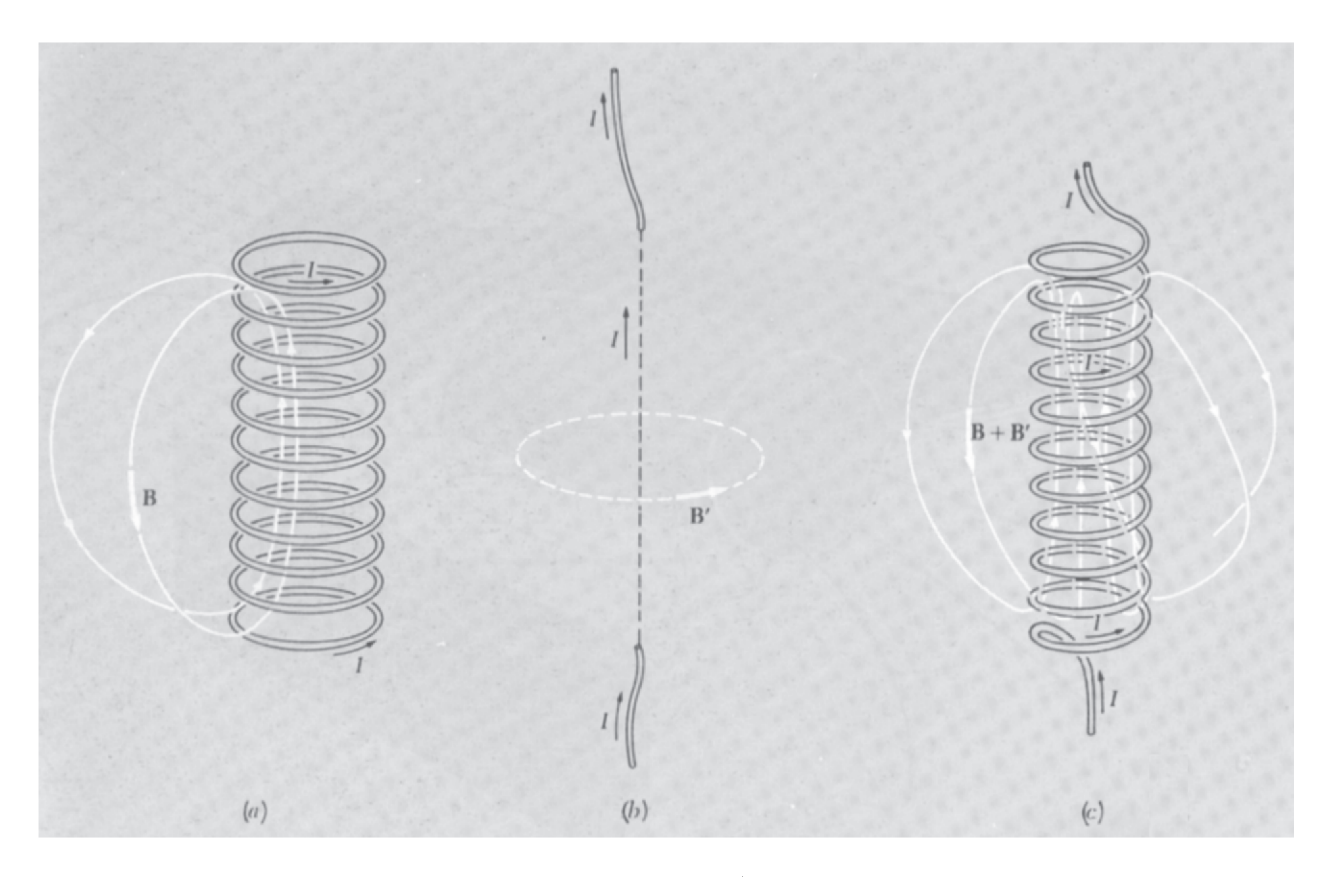


Fig. 6.20 La bobina helicoidal (*c*) es equivalente a un apilamiento de anillos circulares, cada uno conduciendo la corriente *I* como se indica en (*a*), más una corriente *I* paralela al eje del cilindro. Un camino en torno a la bobina encierra a la corriente *I*, el campo de la cual, **B'**, debe sumarse al campo **B** de los anillos para formar el campo externo de la bobina helicoidal.

Es posible construir un solenoide largo con una *sola* vuelta de un conductor ancho y delgado como una cinta, como en la Fig. 6.19. Nuestro cálculo se aplica exactamente a él y al diagrama de la Fig. 6.18, reemplazando solamente la cantidad *nI* por la corriente por metro que circula por la lámina. Ahora el cambio de dirección de una línea de campo que penetra en la pared, tiene lugar enteramente dentro del espesor de la lámina, como se sugiere en el dibujo intercalado en la Fig. 6.19.

Al calcular el campo del solenoide en la Fig. 6.16 lo tratamos como un apilamiento de anillos, ignorando la corriente longitudinal que debe existir en toda bobina en la que la corriente entra por un extremo y sale por el otro. Veamos cómo se modifica el campo si tenemos en cuenta esto. La bobina helicoidal de la Fig. 6.20*c* es equivalente en lo que respecta a su campo exterior, a la superposición de los anillos de corriente de la Fig. 6.20*a* y el conductor axial único de la Fig. 6.20*b*. Sumando el campo de éste **B'** al campo **B** del primero, hallamos el campo externo de la bobina. Ella tiene una torsión helicoidal. En la Fig. 6.20*c* se han esquematizado algunas líneas de campo. Tocante al campo interno circula la corriente longitudinal *I* en el mismo cilindro. Tal distribución de corriente, un tubo hueco de corriente, produce un campo nulo en el interior del cilindro —mante-

niéndose sin modificar el campo interior calculado anteriormente. Si seguimos un bucle de línea de campo desde el interior al exterior para volver de nuevo al interior, descubriremos que *no* se cierra sobre sí mismo. Las líneas de campo generalmente no lo hacen. Puede encontrarse interesante determinar cómo cambia esto si el hilo que conduce la corriente I hacia fuera de la bobina continuase a lo largo del eje de la bobina para emerger por el fondo.

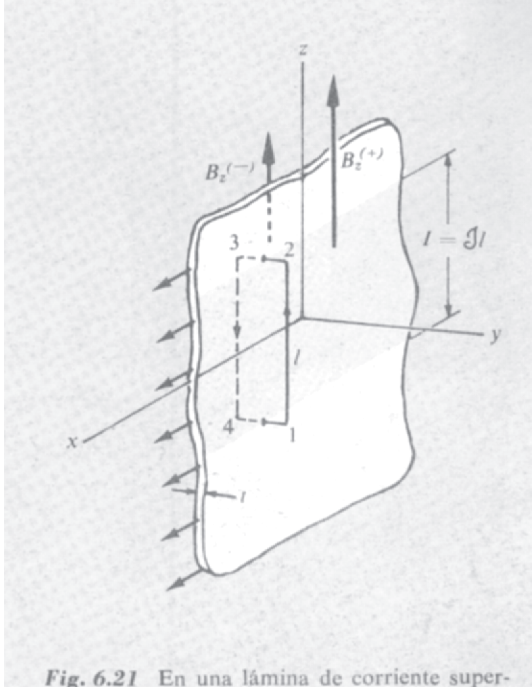


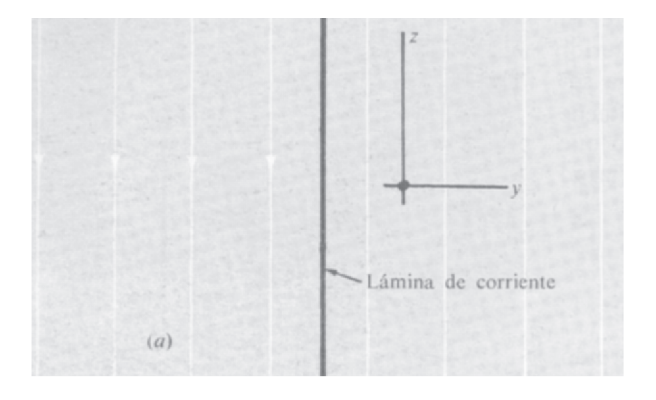
Fig. 6.21 En una lámina de corriente superficial debe existir un cambio en las componentes paralelas de **B** de un lado a otro.

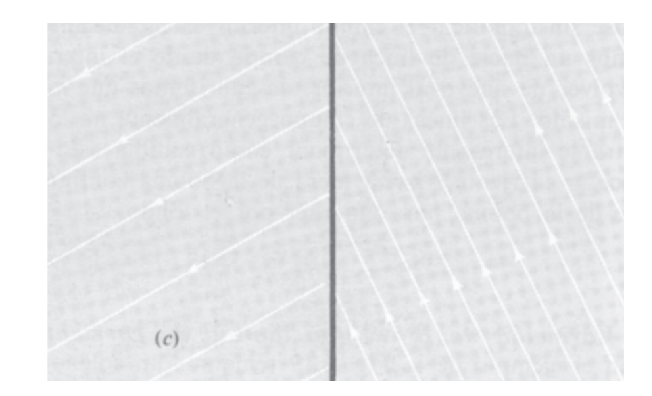
6.6 Variación de B en una lámina de corriente

En el ejemplo de la Fig. 6.19 teníamos un solenoide construido con una lámina de corriente encorvada. Consideremos algo incluso más simple, una lámina de corriente plana ilimitada. Puede imaginarse como una lámina de cobre de espesor uniforme en la cual circula corriente con densidad y dirección constante en todas partes en el interior del metal. En lo que respecta a direcciones localizamos la lámina en el plano xz, y la corriente que fluya en la dirección x. Como se ha supuesto que la lámina tiene extensión infinita, sin bordes es difícil dibujar un esquema de ella. En la Fig. 6.21 representamos un fragmento de la misma, para dibujar algo, debe imaginarse que el resto se extiende en todo el plano. El espesor de la lámina no es muy importante, finalmente, podemos suponer que tiene un espesor definido t. Si la densidad de corriente en el interior del metal es **J** en A/m², entonces cada centímetro de altura, en la dirección z, abarca una banda de corriente que vale Jt ues/seg. Podemos llamarle « densidad de corriente superficial » o « lámina de densidad de corriente », y usar el símbolo $\mathcal{J}$ para distinguirla de la densidad de corriente de volumen J. Las unidades de $\mathcal{J}$ son A/m. Si no nos interesa lo que ocurre en el interior de la misma lámina, $\mathcal{J}$ es una cantidad útil. Es $\mathcal{J}$ quien determina la *variación* del campo magnético de un lado a otro de la lámina, como veremos.

El campo en la Fig. 6.21 no es puramente el debido sólo a la lámina. Estaba presente otro campo, de otro manantial, en la dirección z. El campo total, incluyendo el efecto de la lámina de corriente, está representado por los vectores **B** dibujados delante y detrás de la lámina.

Consideremos la integral curvilínea de **B** a lo largo del rectángulo 1 2 3 4 1 en la Fig. 6.21. Uno de los lados largos está frente a la superficie, el otro detrás de ella, con los lados cortos atravesando la lámina. Denotemos por B_z^+ la componente z del campo inmediatamente delante de la lámina, B_z^- la componente z del campo inmediatamente detrás de la lámina. Aquí el campo es el debido a *todas* las fuentes que pueda haber en los alrededores, incluyendo la propia lámina. La integral curvilínea de **B** a lo largo de los lados del rectángulo vale $l(B_z^+ - B_z^-)$. (Incluso si existiese alguna otra fuente que originase un campo con componente paralela a los lados cortos del rectángulo, estos lados pueden hacerse mucho más cortos que los lados largos, ya que suponemos la lámina delgada, en todo caso, comparada a la escala de cualquier variación de campo.) La corriente





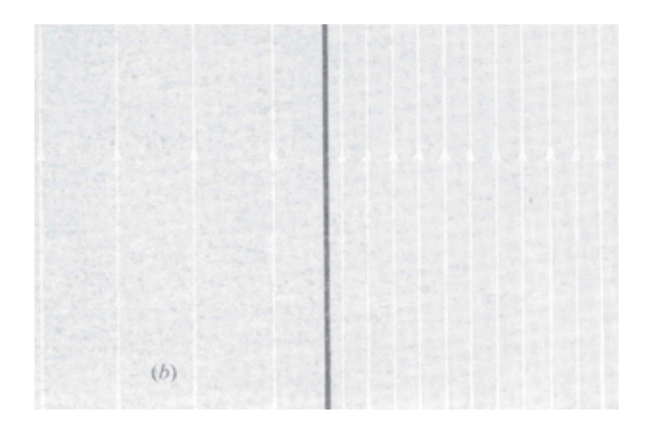


Fig. 6.22 Algunas formas posibles del campo magnético total cerca de una lámina de corriente. La corriente circula en la dirección x (hacia fuera de la lámina). (*a*) Campo de la lámina únicamente; (*b*) superpuesto a un campo uniforme en la dirección z (este es el caso de la Fig. 6.21); (*c*) superpuesto a un campo uniforme en otra dirección. En cada caso la componente B_z cambia en $\mu_0 \mathcal{J}/c$ al pasar a través de la lámina, sin cambio en B_y

abarcada por el rectángulo es precisamente $l\mathcal{J}$. De aquí que tenemos la relación $l(B_z^+ - B_z^-) = \mu_0 \mathcal{J} l$, o bien

$$B_z{}^+ - B_z{}^- = \mu_0 \mathcal{J} \tag{46}$$

Una lámina de corriente de densidad $\mathcal{J}$ da lugar a un salto en la componente de **B** paralela a la superficie y perpendicular a $\mathcal{J}$. Esto puede recordarnos la variación del campo eléctrico en una lámina de carga.

Allí, la componente *perpendicular* de **E** es discontinua, el valor del salto dependía de la densidad de la carga superficial.

Si la lámina es la única fuente de corriente, por descontado que el campo es simétrico en torno a la lámina. B_z^+ es $\frac{\mu_0 \mathcal{J}}{2}$, y B_z^- es $\frac{-\mu_0 \mathcal{J}}{2}$. Esto se ha representado en la Fig. 6.22*a*. Distintos casos, en los que el efecto de la lámina de corriente está superpuesta a un campo ya presente de otras fuentes, se muestra en la Fig. 6.22 *a* y *c*. Supongamos que hay dos láminas que conduzcan densidades superficiales de corriente iguales y opuestas, como se representa en sección recta en la Fig. 6.23, sin otras fuentes en los alrededores. La dirección

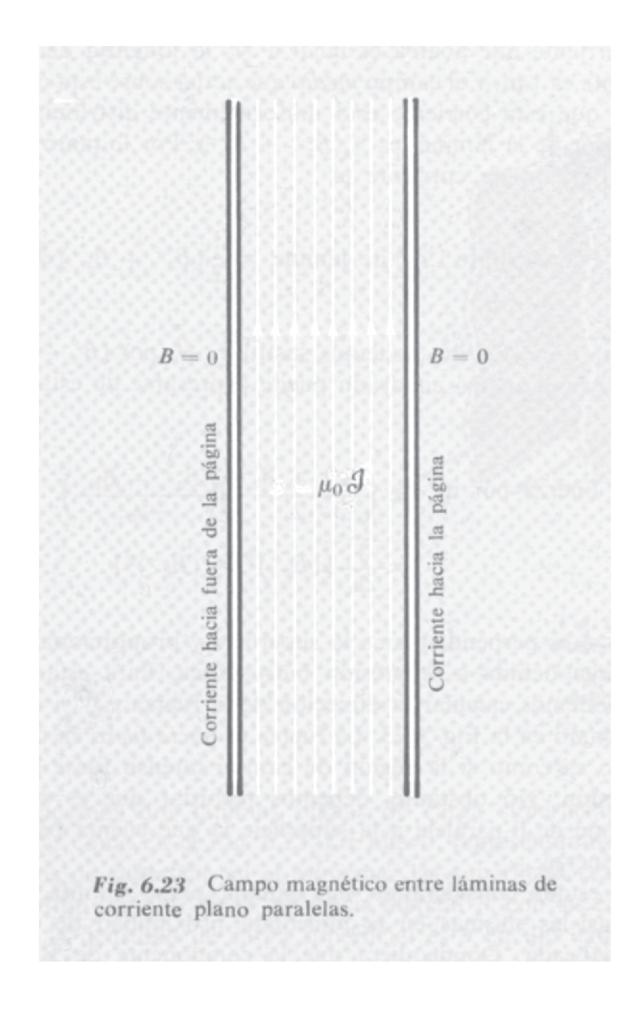
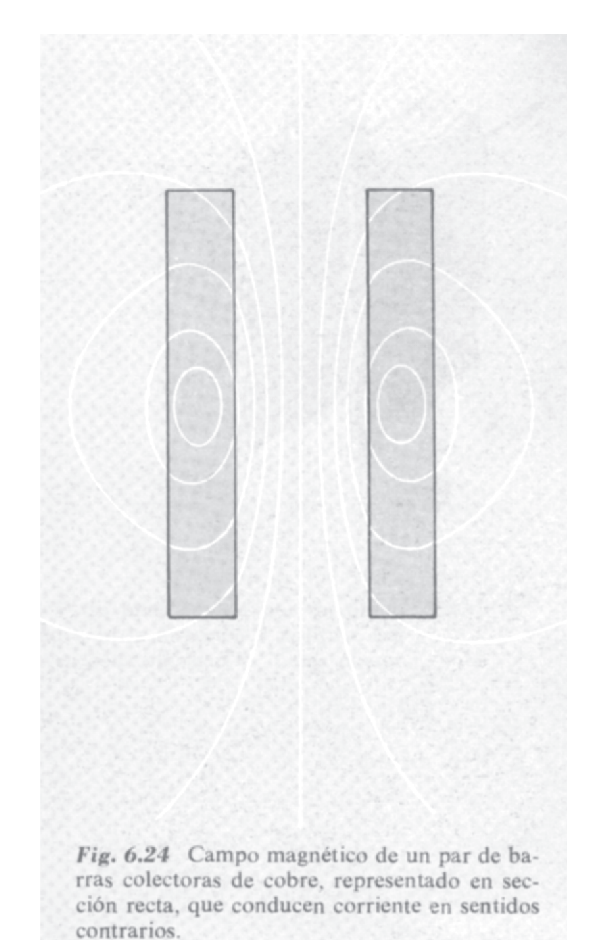


Fig. 6.23 Campo magnético entre láminas de corriente plano paralelas.


Fig. 6.24 Campo magnético de un par de barras colectoras de cobre, representado en sección recta, que conducen corriente en sentidos contrarios.

del flujo de corriente es perpendicular al plano del papel, hacia fuera a la izquierda y hacia dentro en la derecha. El campo entre las láminas es $\mu_0 \mathcal{J}$ y no hay campo en toda la parte exterior. Se halla algo parecido a esto cuando la corriente se conduce por dos cintas o placas paralelas, próximas en comparación con su anchura, como se esquematiza en la Fig. 6.24. A menudo las *barras colectoras*, para la distribución de corrientes intensas en instalaciones eléctricas, son de esta forma.

La variación de **B** tiene lugar dentro de la lámina, como ya hemos indicado en relación con la Fig. 6.19. Para la misma $\mathcal{J}$ a la lámina más delgada le corresponde transición más brusca. Considerabamos una situación muy parecida a ésta en los Caps. 1 y 2 cuando examinábamos la discontinuidad de las componentes normales de **E** que tiene lugar en una lámina de carga superficial. Entonces era instructivo preguntar acerca de la fuerza sobre la carga superficial, y aquí preguntaremos una cuestión parecida.

Consideremos una porción cuadrada de la lámina, de 1 m de lado. La corriente que abarca es igual a $\mathcal{J}$, la longitud del trayecto de la corriente es 1 m, y el campo *medio* que actúa sobre esta corriente, suponiendo que esta corriente está uniformemente distribuida a través del espesor de la lámina, es $^1/_2(B_z^+ + B_z^-)$. Por lo tanto la fuerza sobre esta porción de corriente es

$$\text{Fuerza sobre 1 m}^2 \text{ de lámina} = \frac{1}{2}(B_z^+ + B_z^-)\,\mathcal{J} \tag{47}$$

En vista de la Ec. 46, podemos sustituir $\mathcal{J}$ por $(B_z^+ - B_z^-)/\mu_0$ así que la fuerza por metro cuadrado puede expresarse de esta manera:

$$\begin{aligned}\text{Fuerza por m}^2 &= \left(\frac{B_z^+ + B_z^-}{2}\right)\left(\frac{B_z^+ - B_z^-}{\mu_0}\right)\\ &= \frac{1}{2\mu_0}[(B_z^+)^2 - (B_z^-)^2]\end{aligned} \tag{48}$$

La fuerza es perpendicular a la superficie y proporcional al área, como la carga debida a la presión hidrostática. Para estar seguros del signo, podemos calcular la dirección de la fuerza en un caso particular, tal como en la Fig. 6.23. La fuerza es *hacia fuera* en cada conductor. Esto es como si la región de campo intenso fuese la región de alta presión. No obstante, debemos recordar que es solamente la componente de **B** paralela a la superficie la que cuenta para determinar esta fuerza.

Hemos estado considerando una lámina plana infinita, pero las cosas son casi las mismas en la inmediata proximidad de cualquier superficie alabeada. Dondequiera que la componente de **B** paralela a la superficie varía de B_1 a B_2, de un lado de la superficie al otro, podemos concluir que no solamente hay una lámina de corriente que circula en la superficie, sino que también la superficie debe de estar sometida a una tensión de $(B_1^2 - B_2^2)/2\mu_0$, medida en N/m^2. Éste es uno de los principios que rigen en *magnetohidrodinámica*, el estudio de los fluidos eléctricamente conductores, un tema de interés a la vez para los ingenieros eléctricos y para la astrofísica.

6.7 *Cómo se transforman los campos*

Una lámina de carga superficial, si se mueve paralelamente a sí misma, constituye una corriente superficial. Si tenemos una densidad de carga uniforme σ en la superficie, con la propia superficie deslizándose con celeridad v, la densidad de corriente superficial es justamente $\mathcal{J} = \sigma v$. Esta simple idea nos ayuda a ver cómo las magnitudes campo eléctrico y campo magnético deben cambiar cuando pasamos de un sistema de referencia inercial a otro.

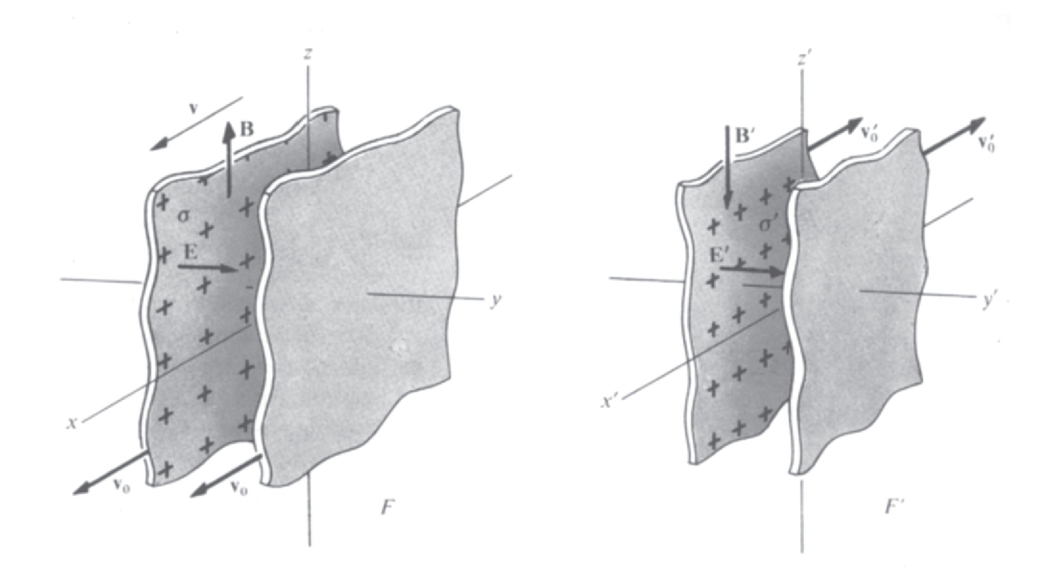


Fig. 6.25 La referencia F' se mueve, vista por un observador en F, con velocidad $\mathbf{v}$ en la dirección x positiva. Las láminas cargadas se mueven con velocidad $\mathbf{v}_0$, vistas por un observador en F.

Imaginemos dos láminas planas de carga superficial, paralelas al plano xz como en la Fig. 6.25. De nuevo, representamos solamente fragmentos de superficie en el esquema; las superficies realmente tienen extensión infinita. En la referencia inercial F, con las coordenadas x, y y z, la densidad de carga superficial es σ en una lámina y $-\sigma$ en la otra. En esta referencia el campo eléctrico uniforme se dirige a lo largo del eje y en sentido positivo, y la ley de Gauss nos afirma, como de costumbre, que su intensidad es:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{49}$$

En esta referencia F ambas láminas se mueven en la dirección x sentido positivo con celeridad v_0, así que tenemos un par de láminas de corriente. La densidad de la corriente superficial es $\mathcal{J}_x = \sigma v_0$ en una lámina, este valor negativo en la otra. Como en la distribución de la Fig. 6.21, el campo entre estas dos corrientes es

$$B_z = \mu_0 \mathcal{J}_x = \mu_0 \sigma v_0 \tag{50}$$

La referencia inercial F' es tal que se mueve, vista desde F, con celeridad v en la dirección x positiva. *¿Qué campos medirá un obser-*

vador en F'? Para contestar esto solamente necesitamos hallar cómo aparecen las cargas en F'.

En F' la velocidad según x' de las láminas que contienen la carga es v'_0, dada por la fórmula de adición de velocidades:

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} = c\,\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \tag{51}$$

Existe una contracción de Lorentz de la densidad de carga diferente, en esta referencia, exactamente como en nuestro ejemplo anterior de la línea de carga móvil, en la Sec. 5.9. Repitiendo el razonamiento que utilizamos entonces, la densidad en la referencia en reposo de las cargas mismas es $\sigma(1 - v_0^2/c^2)^{1/2}$, o σ/γ_0, y por tanto la densidad en la referencia F' es

$$\sigma' = \sigma\,\frac{\gamma'_0}{\gamma_0} \tag{52}$$

Como de costumbre γ'_0 representa $(1 - v'^2_0/c^2)^{1/2}$. Por medio de la Ec. 51 podemos eliminar γ'_0, expresándolo en función de β_0 y β, o γ_0 y γ. Cuando hacemos esto, el resultado es:

$$\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta) \tag{53}$$

La densidad de corriente superficial en la referencia F' es *densidad de carga* × *velocidad de la carga.*

$$\mathcal{J}' = \sigma' v'_0 = \sigma\gamma(1 - \beta_0\beta)c\,\frac{(\beta_0 - \beta)}{1 - \beta_0\beta} = \sigma\gamma(v_0 - v) \tag{54}$$

Ahora sabemos cómo aparecen las fuentes en la referencia F', así que conocemos lo que deben ser los campos en esta referencia. Diciendo esto, estamos de nuevo invocando el postulado de la relatividad. Las leyes de la física deben ser las mismas en todas las referencias inerciales, y esto incluye las fórmulas que relacionan el campo eléctrico con la densidad superficial de carga, y el campo magnético con la densidad superficial de corriente. Se sigue entonces que:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{E_0} = \gamma\left[\frac{\sigma}{E_0} - \left(\frac{\sigma}{E_0}\,\frac{v_0}{c}\,\frac{v}{c}\right)\right] \tag{55}$$

$$B'_z = \mu_0\,\mathcal{J}' = \gamma\left[\mu_0\sigma v_0 - \mu_0\sigma v\right] \tag{56}$$

Si consideramos los valores de E_y y B_z en las Ecs. 49 y 50 y que

$E_0 c^2 = \frac{1}{\mu_0}$, vemos que nuestro resultado puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} E_y' &= \gamma(E_y - vB_z) \\ B_z' &= \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right) \end{aligned} \tag{57}$$

Si las dos láminas de corriente se hubiesen orientado paralelamente al plano xy, en lugar del xz, habríamos encontrado relaciones que ligan E'_z con E_z y B_y, y B'_y con B_y y E_z. Por supuesto que tendrían la misma forma que las relaciones anteriores, pero si buscamos sus sentidos hallaremos que existen diferencias de signo, siguiendo las reglas para el sentido de **B**.

Queda por hallar cómo varían las componentes del campo en la dirección del movimiento. Ya hallamos en la Sec. 5.5 que una componente longitudinal de **E** tiene el mismo valor en las dos referencias. Esto también es cierto para una componente longitudinal de **B**, puede verse como sigue. Supongamos que una componente longitudinal de **B**, la componente B_x en la distribución de la Fig. 6.25, está producida por un solenoide alrededor del eje x en la referencia F. La intensidad del campo dentro del solenoide, como sabemos, depende solamente de la corriente en el hilo, I, la cual es carga por segundo, y de n, el número de vueltas de hilo por metro de longitud axial. En la referencia F′ el solenoide estará contraído-Lorentz, así que el número de vueltas por metro en esta referencia será mayor. Pero la corriente, determinada por el observador en F', se reducirá, ya que desde este punto de vista, el observador F que midió la corriente contando el número de electrones que pasan por un punto del hilo, por segundo, usaba un reloj más lento. La dilatación del tiempo compensa exactamente la contracción de longitud en el producto nI. En realidad toda magnitud de dimensiones (distancia longitudinal)$^{-1}$ $\times$ (tiempo)$^{-1}$ no cambia en una transformación de Lorentz. Así que $B'_x = B_x$.

Recordemos lo dicho anteriormente en el Cap. 5, en la discusión siguiente a la Ec. 5.6: Las propiedades de transformación del campo son propiedades *locales*. Los valores de **E** y **B**, en cierto punto espacio temporal en una referencia, deben determinar unívocamente las componentes del campo observadas en qualquier otra referencia, en este mismo punto espacio temporal. Por lo tanto el hecho de que hayamos usado un tipo de fuente especialmente simple (las láminas paralelas uniformemente cargadas) en nuestra deducción, de ningún modo comprometen la generalidad de nuestro resultado. De hecho, hemos llegado a las leyes generales, para la transformación de todas las componentes del campo eléctrico y magnético, de cualquier origen o configuración.

A continuación damos la lista de las transformaciones. Todas las cantidades prima se han medido en la referencia F', la cual se mueve en la dirección de x positiva con celeridad v vista desde F. Las cantidades sin prima son números resultado de la medida en F. Como de costumbre β representa v/c y γ a $(1 - \beta^2)^{-1/2}$.

$$
\boxed{\begin{array}{lll}
E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\[2ex]
B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \dfrac{\beta E_z}{c}\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{\beta E_y}{c}\right)
\end{array}} \quad (58)
$$

Además nuestra perspectiva previa ha sido que el magnetismo es una clase de efecto de «segundo orden» que surge de los cambios relativistas en los campos eléctricos de cargas móviles. Indudablemente, los fenómenos magnéticos como los hallamos en la naturaleza, son claramente distintos de los fenómenos eléctricos. El mundo de nuestro alrededor no es simétrico con respecto a la electricidad y magnetismo. Sin embargo, quitando las fuentes, hallamos que los mismos campos **E** y **B** están conectados uno a otro de manera muy simétrica.

Parece, además, que los campos eléctrico y magnético son en cierto sentido aspectos, o componentes, de un ente único. Podemos hablar del campo *electromagnético*, y podemos considerar a E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z como seis componentes del campo electromagnético. El *mismo* campo visto desde distintas referencias inerciales estará representado por distintos grupos de valores de estas componentes, algo como un vector está representado por distintas componentes en distintos sistemas de coordenadas que han girado uno con respecto a otro. Sin embargo, el campo electromagnético concebido de este modo no es un vector, matemáticamente hablando, sino más bien algo llamado un *tensor*. La totalidad de las ecuaciones encuadradas constituyen las reglas para transformar las componentes de tal tensor cuando cambiamos de una referencia inercial a otra. Aquí no vamos a desarrollar este lenguaje matemático. En realidad, ahora volveremos a nuestra manera anterior de hablar acerca del campo eléctrico como un vector campo, y del campo magnético como otro vector campo acoplado al primero, de una manera, que vamos a examinar más adelante en el Cap. 7. Para seguir con esta sucinta sugerencia de la unidad del campo electromagnético representado en cuatro dimensiones espacio-temporales, se tendrá que esperar un curso más avanzado.

Podemos expresar la transformación de los campos, Ec. 58, de una manera más elegante que se usa a menudo. Sea βc la velocidad de una referencia F' vista desde la referencia F. Siempre podemos descomponer los campos en ambas referencias F y F' en vectores paralelos y perpendiculares a la dirección de β, respectivamente. Utilizando una notación evidente:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{E} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\perp} & \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \\
\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} & \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}
\end{array} \quad (59)
$$

La transformación puede escribirse así:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\,\beta \times \mathbf{B}_{\perp}$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp} - \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,\beta \times \mathbf{E}_{\perp} \tag{60}$$

En este sistema, desgraciadamente, el uso de diferentes unidades para **E** y **B** tiende a oscurecer la simetría esencial electromagnética del vacío. Los campos eléctrico y magnético son, después de todo, las componentes de un tensor. La transformación de Lorentz es algo como una rotación, girando **E** parcialmente hacia **B′** y **B** parcialmente hacia **E′**. Parece natural y apropiado que el único parámetro en la Ec. 60 sea la relación adimensional β. Para representar una analogía que no es del todo falsa, imaginemos que se ha establecido que las componentes del desplazamiento este-oeste deben expresarse en centímetros mientras que las componentes norte-sur han de darse en pulgadas. La transformación que efectúa una rotación de los ejes coordenados sería por no decir nada peor, estéticamente poco atractiva. Tampoco se restablece la simetría cuando se sustituye **B**, como se hace frecuentemente, por un vector **H**, al que encontraremos en el Capítulo 11, y que en el vacío es simplemente $\mathbf{B}/\mu_0$.

Existe una relación notablemente simple entre los vectores eléctrico y magnético en un caso particular muy importante. Supongamos que existe una referencia —la de coordenadas no prima— en la cual **B** es nulo en cierta región. Entonces en *cualquier* otra referencia F' que se mueve con velocidad βc relativa a esta referencia particular, tenemos, según la Ec. 60

$$\mathbf{B}'_{\perp} = -\gamma v \times \mathbf{E}_{\perp} \tag{61}$$

Pero $\beta \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ en todo caso, pues $\mathbf{E}_{\parallel}$ es paralelo a β por definición. De aquí que la relación entre **E′** y **B′** se reduce simplemente a

$$\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}' \tag{62}$$

Esto se cumple en cualquier referencia si $\mathbf{B} = 0$ en otra. Recordemos que βc es la velocidad de la referencia en cuestión respecto la referencia particular en la que $\mathbf{B} = 0$.

De la misma manera, podemos deducir de la Ec. 60 que, si existe una referencia en la que $\mathbf{E} = 0$, en otra referencia

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{63}$$

Como antes βc es la velocidad de la referencia F' respecto a la referencia particular F en la que, en este caso, $\mathbf{E} = 0$.

Debido a que las Ecs. 62 y 63 implican solamente magnitudes medidas en la misma referencia, son fáciles de aplicar, cada vez que se encuentre la restricción, para campos que varíen en el espacio.

Un buen ejemplo es el campo de una carga puntiforme q moviéndose con velocidad constante, el problema estudiado en el Cap. 5. Tomemos como referencia no prima aquella en la cual la carga está en reposo. En esta referencia, por descontado, no hay campo magnético. La Ec. 61 nos dice que en la referencia « lab », donde encontramos que la carga se mueve con celeridad v, debe haber un campo magnético perpendicular al campo eléctrico y a la dirección del movimiento. Ya hemos hallado la forma exacta del campo eléctrico en esta referencia: Sabemos que el campo es radial desde la posición instantánea de la carga, con un valor dado por la Ec. 12 del capítulo 5. Las líneas de campo magnético deben ser circunferencias alrededor de la dirección del movimiento, como se indica toscamente en la Fig. 6.26 Cuando la velocidad de la carga es elevada, así que $\gamma \gg 1$, los « rayos » radiales que son las líneas de campo eléctrico se plegan en un disco delgado. Las líneas circulares de campo magnético están como concentradas en este disco. El módulo de **B** entonces es casi igual al módulo de **E**. Es decir, el módulo del campo magnético en gauss es casi exactamente el mismo que el módulo del campo eléctrico, en el mismo punto e instante, en statvolt/cm.

Hemos recorrido un largo camino, desde la ley de Coulomb, en estos dos últimos capítulos. No obstante, cada paso solamente se ha llevado a cabo conforme a los requerimientos de la relatividad y de la invariancia de la carga eléctrica. Podemos empezar a ver que la existencia del campo magnético y su curiosamente simétrica relación al campo eléctrico es una consecuencia necesaria de estos principios generales. Recordemos de nuevo al lector que no fue éste el orden histórico del descubrimiento e interpretación de las leyes del electromagnetismo. Un aspecto del acoplamiento entre los campos eléctrico y magnético, que está implícito en la Ec. 58, surgió de los experimentos

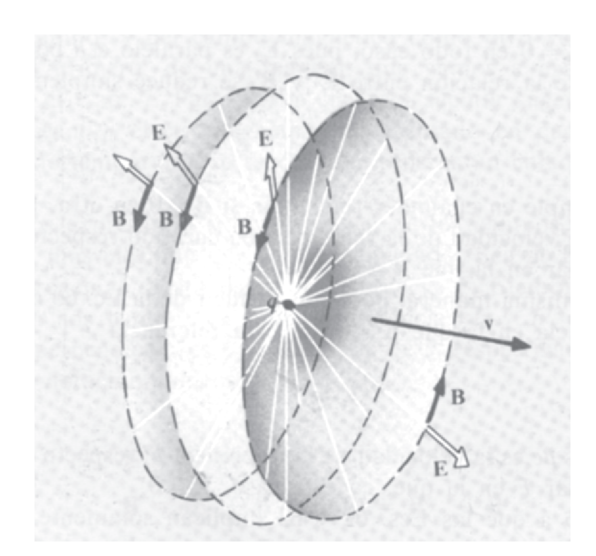


Fig. 6.26 Campos eléctrico y magnético de una carga en movimiento uniforme, en un instante dado.

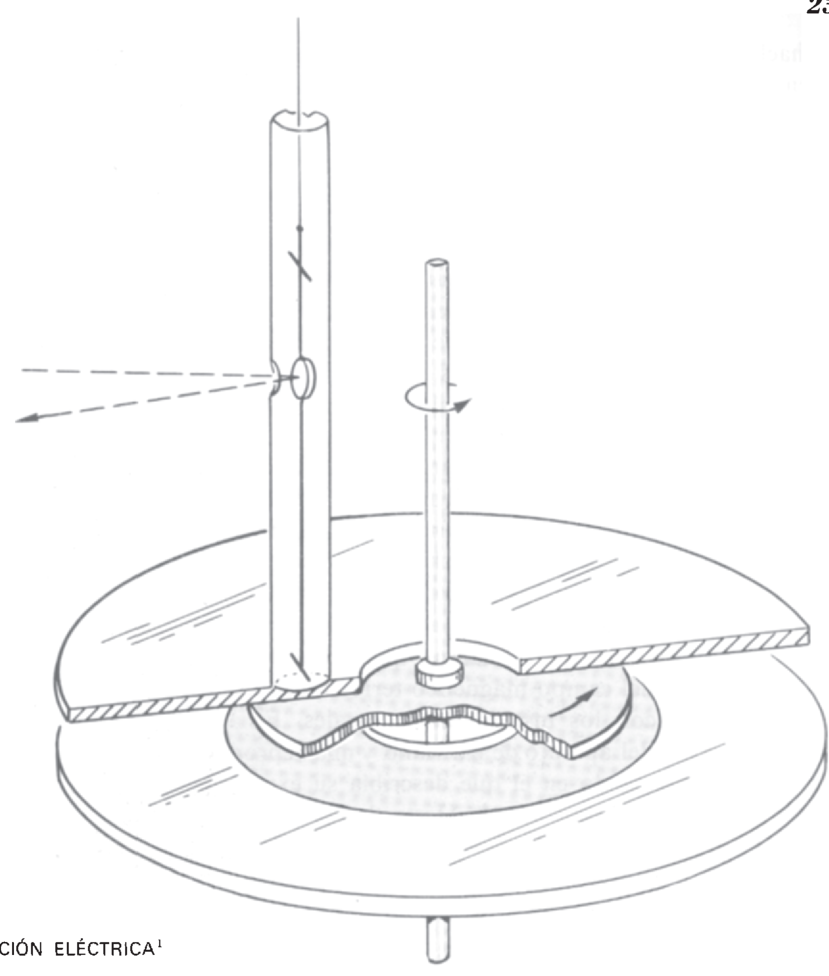


Fig. 6.27 Partes esenciales del aparato de Rowland. En el tubo de la izquierda están suspendidas horizontalmente dos agujas imanadas cortas.

ACERCA DEL EFECTO MAGNÉTICO DE LA CONVECCIÓN ELÉCTRICA[1]

(American Journal of Science [3], XV, 30-38, 1878)

Los experimentos descritos en este artículo se realizaron a fin de determinar si un cuerpo electrizado en movimiento produce o no efectos magnéticos. No parece existir base teórica sobre la cual podamos establecer la cuestión, ya que la acción magnética de una corriente eléctrica de conducción puede atribuirse a cierta acción mutua entre el conductor y la corriente. Por consiguiente, es importante un experimento. El profesor Maxwell, en su «Tratado de Electricidad», Art. 770, ha calculado la acción magnética de una superficie electrizada móvil, pero que la acción existe no ha sido aún probado, ni experimentalmente ni teóricamente.

El aparato empleado estaba constituido por un disco de vulcanita de 21,1 centímetros de diámetro y 0,5 centímetros de espesor, que puede hacerse girar alrededor de un eje vertical con una celeridad de 61,0 vueltas por segundo. A cada lado del disco a una distancia de 0,6 cm estaban fijadas placas de vidrio de 38,9 cm de diámetro con un orificio en el centro de 7,8 cm. El disco de vulcanita estaba dorado por ambos lados y las placas de vidrio tenían una corona anular dorada en un lado, los diámetros exterior e interior eran de 24,0 y 8,9 cm, respectivamente. Los lados dorados podían girar con el disco giratorio o aparte, pero corrientemente estaban girando con él, así que el problema podía calcularse más fácilmente y no había incertidumbre en cuanto a la electrización. Las placas exteriores estaban conectadas corrientemente a tierra; y el disco interior a una batería eléctrica, por un punto situado casi a un tercio de milímetro del borde y gira con él. Como el borde era amplio, el punto no descargaría a menos que hubiese una diferencia de potencial entre él y el borde. Entre la batería eléctrica y el disco.

[1] Los experimentos descritos se realizaron en el laboratorio de la Universidad de Berlín, gracias a la benevolencia del Profesor Helmholtz, a cuyo consejo están en deuda por su perfección. La idea del experimento primero, se me ocurrió en 1868 y fue registrado en una agenda de esta época.

de Michael Faraday con corrientes eléctricas variables que describiremos en el Cap. 7. Esto fue setenta y cinco años antes de que Einstein, en su trascendental artículo de 1905, escribiese nuestra Ec. 58.

6.8 Experimento de Rowland

Como hemos advertido en la Sec. 5.9, no era evidente hace cien años que una corriente circulando en un hilo y un cuerpo móvil cargado eléctricamente fuesen esencialmente como fuentes de campo magnético. La perspectiva unificada de la electricidad y magnetismo que estaba entonces surgiendo de los trabajos de Maxwell sugirió que toda carga móvil debe originar un campo magnético, pero la prueba experimental era difícil obtener.

El que el movimiento de una lámina cargada electrostáticamente produce un campo magnético fue demostrado primero por Henry Rowland, el gran físico americano famoso por su perfección de la red de difracción. Rowland realizó muchas ingeniosas y precisas medidas eléctricas, pero ninguna que tasase su virtuosidad experimental tan severamente como la detección y medida del campo magnético de un disco giratorio cargado. El campo que debía detectar era algo como 10^{-5} del valor del campo magnético terrestre — un experimento formidable, incluso con los instrumentos actuales. En la Fig. 6.27, veremos un esquema del aparato de Rowland y una reproducción de la primera página del artículo en el que describía su experimento. Diez años antes que el descubrimiento de Hertz de las ondas electromagnéticas, el resultado de Rowland dio independientemente, aunque menos espectacular, soporte a la teoría de Maxwell del campo electromagnético.

6.9 Conducción eléctrica en un campo magnético Efecto Hall

Cuando circula una corriente en un conductor en presencia de un campo magnético, la fuerza $q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ actúa directamente sobre los portadores de carga móviles. No obstante observamos una fuerza en el conductor como un todo. Veamos como ocurre esto. En la Figura 6.28*a* se muestra una sección de una barra metálica en la que circula una corriente estacionaria. Empujados por un campo eléctrico $\mathbf{E}$, los electrones son arrastrados hacia la izquierda con velocidad media $\bar{v}$, que tiene el mismo significado que la $\bar{u}$ de nuestra discusión de la conducción en el Cap. 4. Los electrones de conducción se indican, muy esquemáticamente, por puntos blancos. Los puntos negros son iones positivos que forman el armazón rígido de la barra metálica sólida. Ya que los electrones son negativos, tenemos una corriente en la dirección y positiva. La densidad de corriente $\mathbf{J}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ están relacionadas por la conductividad del metal, σ, como de costumbre: $\mathbf{J} = \sigma E$. En la Fig. 6.28*a* no hay campo magnético, excepto el de la propia corriente, que ignoraremos. Ahora aplicamos

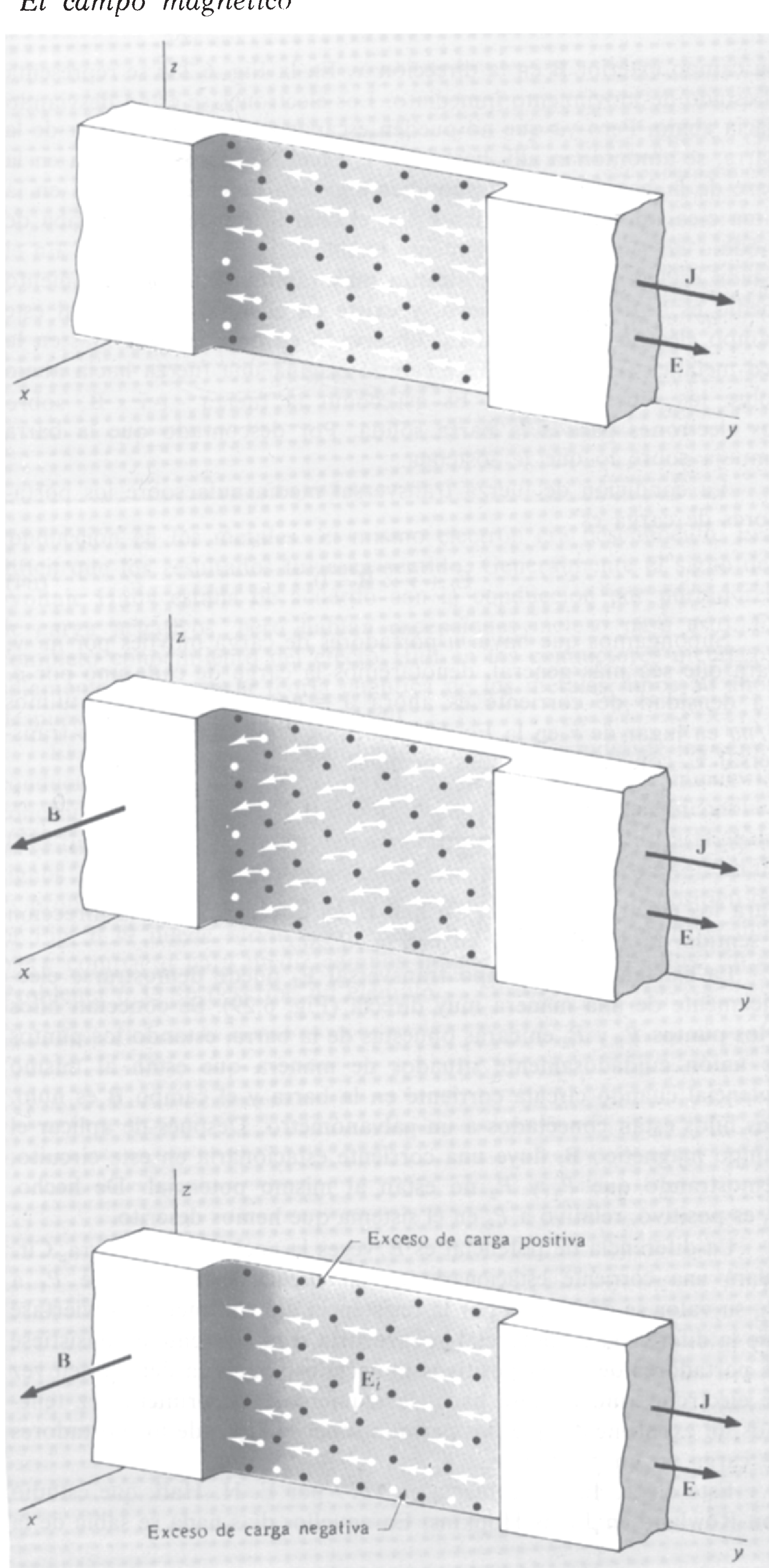


Fig. 6.28 (*a*) Una corriente circula en una barra de metal. Solamente se muestra una pequeña sección de la barra.

(*b*) Un campo magnético está aplicado en la dirección *x*, causando (al principio) una desviación descendente de los electrones en movimiento.

(*c*) La distribución de carga crea un campo eléctrico transversal $\mathbf{E}_t$. En este campo los iones positivos estacionarios experimentan una fuerza descendente.

un campo exterior **B** en la dirección x. En la Fig. 6.28*b* se representa el estado de movimiento inmediato. Los electrones se están desviando hacia abajo. Pero ya que no pueden escapar en la parte inferior de la barra, se amontonan allí, hasta que el exceso de carga negativa en la base de la barra y el correspondiente exceso de carga positiva en la cima crea un campo eléctrico $\mathbf{E}_t$ en el cual la fuerza hacia arriba de módulo eE_t equilibra exactamente la fuerza hacia abajo $e\bar{v}B$. En el estado estacionario (que se alcanza muy rápidamente) el movimiento medio es horizontal de nuevo, y existe en el interior del metal este campo eléctrico transversal $\mathbf{E}_t$, observado en coordenadas fijas en la red metálica (Fig. 6.28*c*). Este campo origina una fuerza hacia abajo sobre los iones positivos. Es así como la fuerza $-e\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}$, sobre los electrones pasa a la barra sólida. Por descontado que la barra empuja sobre lo que *le* sostenga.

La condición de fuerza transversal media nula sobre los portadores de carga es

$$\mathbf{E}_t + \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} = 0 \tag{64}$$

Supongamos que haya m portadores de carga móviles por m^3 y, para que sea más general, denotaremos la carga de cada uno por q. La densidad de corriente es ahora $\mathbf{J} = nq\bar{\mathbf{v}}$. Si ahora sustituimos $\mathbf{J}/nq$ en lugar de $\bar{\mathbf{v}}$ en la Ec. 64, podemos relacionar el campo transversal $\mathbf{E}_t$ con las magnitudes medibles directamente **J** y **B**:

$$\mathbf{E}_t = \frac{-\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nq} \tag{65}$$

Para los electrones $q = -e$, así que $\mathbf{E}_t$ en este caso tiene la dirección y sentido de $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, como en la Fig. 6.28*c*.

La existencia del campo transversal $\mathbf{E}_t$ puede demostrarse eléctricamente de una manera muy directa (Fig. 6.29). Se conectan hilos a los puntos P_1 y P_2 en caras opuestas de la barra, estando los puntos de unión cuidadosamente situados de manera que están al mismo potencial cuando circula corriente en la barra y el campo **B** es nulo. Los hilos están conectados a un galvanómetro. Después de aplicar el campo magnético **B**, fluye una corriente estacionaria en este circuito, demostrando que P_1 y P_2 no están al mismo potencial. De hecho, P_1 es positivo, relativo a P_2 en el sistema que hemos descrito.

La diferencia de potencial es E_t veces la anchura de la barra. Circulará una corriente estacionaria en un circuito exterior desde P_1 a P_2, su valor se determina por la resistencia del voltímetro. Adviértase que la diferencia de potencial se invertiría si la corriente **J** consistiese de portadores de carga positivos moviéndose hacia la derecha en vez de electrones moviéndose hacia la izquierda. Por primera vez tenemos un experimento que nos permite saber el *signo* de los portadores de carga en un conductor.

Este efecto fue descubierto en 1879 por E. H. Hall, que estudió con Rowland en Johns Hopkins. En aquellos días nada se sabía de la

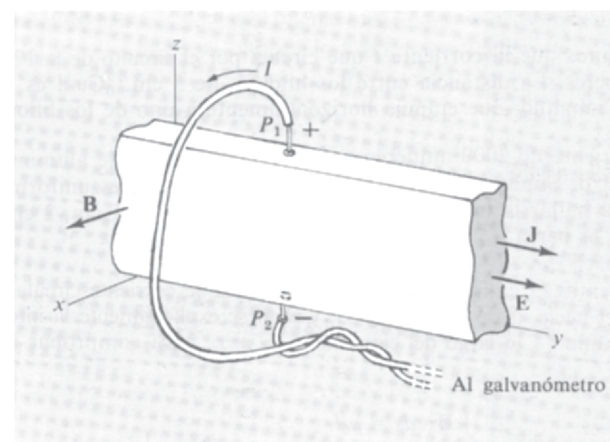
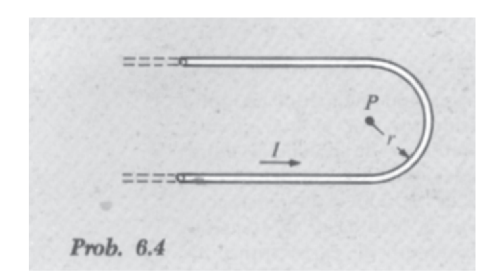


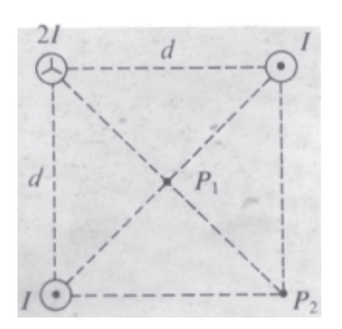
Fig. 6.29 Efecto Hall. Cuando un campo magnético es aplicado perpendicularmente a un conductor por el que circula una corriente, se observa una diferencia de potencial entre los extremos del conductor, los cuales, en ausencia del campo serían del mismo potencial. Esto es debido a la existencia del campo **E**, dentro de la barra. Por la medida de la «tensión de Hall» uno puede determinar el número de carga transportada por centímetro cúbico y sus signos.

conducción en los metales. El mismo electrón era desconocido. Era difícil que los resultados tuviesen sentido. Generalmente el signo del «voltaje Hall» estaba de acuerdo con la conducción por portadores de carga negativos, pero habían excepciones incluso para esto. El completo conocimiento del efecto Hall en los conductores metálicos solamente llegó con la teoría cuántica de los metales, unos 50 años después del descubrimiento de Hall.

El efecto Hall ha resultado muy útil para el estudio de los semiconductores. Allí cumple su promesa de revelar directamente la concentración y el signo de los portadores de carga. Los semiconductores tipo n y tipo p, descritos en el Capítulo 4, dan voltajes Hall de signos contrarios, como deberíamos esperar. Como el voltaje Hall es proporcional a B, un semiconductor adecuado en el dispositivo de la Fig. 6.29 puede servir, una vez calibrado, como dispositivo simple y compacto para medir campos magnéticos desconocidos. En el Problema 6.35 se describe un ejemplo.



Prob. 6.4



Prob. 6.5

Problemas

6.1 Supongamos que la corriente I que circula por el circuito de la Fig. 5.1*b* es de 20 amperes. La distancia entre los hilos es de 5 cm. ¿Cuál es la fuerza, por cm de longitud, que empuja horizontalmente a uno de los hilos?

6.2 Una corriente de 8000 amperes circula por una barra de aluminio de 4 cm de diámetro. Suponiendo que la densidad de corriente es uniforme en la sección recta, hallar la intensidad del campo magnético a 1 cm, 2 cm, y 3 cm del eje de la barra.

6.3 Consideremos el campo magnético de un bucle de corriente circular, en puntos del eje del bucle, dado por la Ec. 41. Calcúlese explícitamente la integral curvilínea del campo a lo largo del eje desde $-\infty$ a ∞, para comprobar la fórmula general

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

¿Por qué podemos ignorar el «retorno» del camino que sería necesario para completar un circuito cerrado?

6.4 Un hilo largo se curva en la forma de horquilla mostrado en la figura. Calcúlese la expresión exacta para el campo magnético en el punto P situado en el centro del semicírculo.

6.5 Tres hilos largos rectos paralelos están situados como se indica en la figura. Un hilo transporta la corriente $2I$ hacia dentro del papel; cada uno de los otros transporta la corriente I en sentido contrario. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético en el punto P_1 y en el punto P_2?

6.6 Supongamos que la corriente I_2 en la Fig. 6.4*b* es igual a I, pero de sentido contrario, de forma que CD es repelida por GH. Supongamos también que AB y EF están encima de GH, que las longitudes BC y CD son 30 y 15 cm, respectivamente, y que el conductor $BCDE$, que es de hilo de cobre de 1 mm de diámetro como en *(a)*, tiene un peso de 0,008 N/m. En la posición de equilibrio la desviación de la vertical del marco colgante es tal que $r = 1{,}5$ cm. ¿Cuál es la corriente en amperes? ¿El equilibrio es estable?

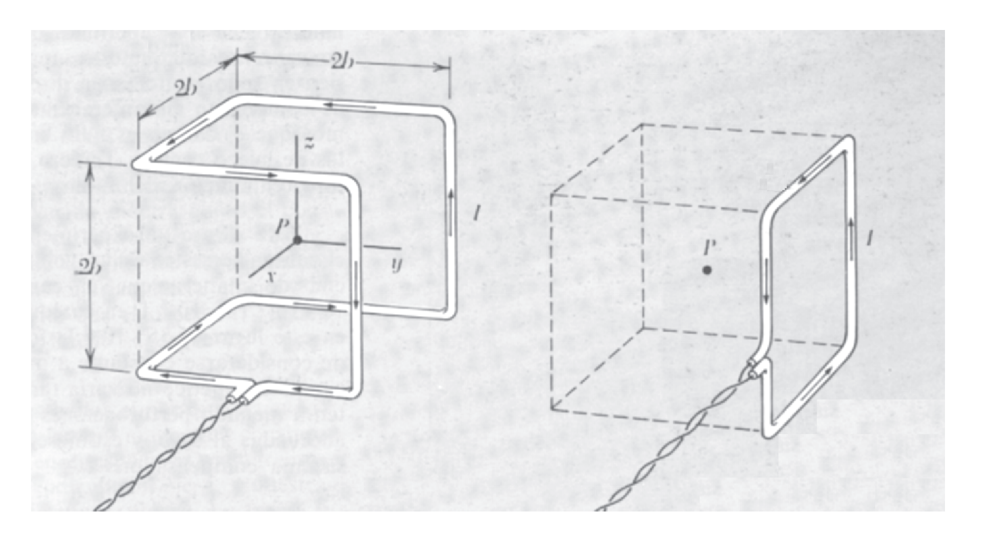
6.7 El núcleo metálico de la tierra se extiende hasta unos 3000 km, cerca de la mitad del radio terrestre. Imaginemos que el campo que observamos en la superficie terrestre, que tiene una intensidad de unos $5 \cdot 10^{-5}$ T en el polo norte magnético, se debe a una corriente que circula en torno al «ecuador» del núcleo. ¿Cuál debería ser la corriente, en amperes?

Resultado: $3 \cdot 10^9$ amperes.

6.8 Un hilo que transporta la corriente I desciende por el eje y hasta el origen, de allí al infinito a lo largo del eje x. Demostrar que el campo magnético en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ del plano xy viene dado por

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

6.9 Al describir el experimento en el que descubrió la influencia de una corriente eléctrica sobre una brújula cercana, H. C. Oersted escribió: «Si la distancia de los hilos de conexión no excede de tres cuartos de pulgada de la brújula, la declinación de la aguja forma un ángulo de 45°. Si se aumenta la distancia el ángulo disminuye proporcionalmente. La declinación



Prob. 6.12

también varía con la potencia de la batería». ¿Cuál fue el valor de la corriente, en amperes, a lo largo de los «hilos de conexión» de Oersted? Supónganse que la componente horizontal del campo magnético terrestre en Copenhague en 1820 era el mismo que en la actualidad, $0{,}2 \cdot 10^{-4}$ tesla.

6.10 Una línea de corriente continua de 50 kilovolt consta de dos conductores separados 2 metros. Cuando esta línea transmite 10 megawatts, hallar la intensidad del campo magnético en el punto medio entre los conductores.

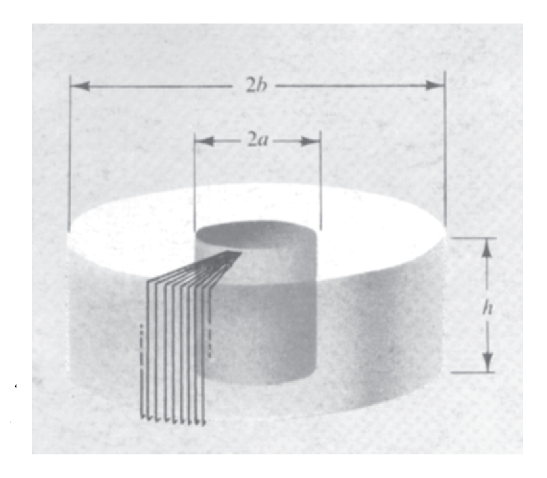
6.11 Un solenoide está hecho arrollando dos capas de hilo de cobre del n.º 14 sobre un cilindro de 8 cm de diámetro. Hay cuatro vueltas por centímetro en cada capa, y la longitud del solenoide es de 32 cm. En la tabla de hilos vemos que el hilo de cobre n.º 14, que tiene un diámetro de 0,163 cm tiene una resistencia de 0,010 ohm/metro a 75° C. (La bobina se calienta.) Si el solenoide se conecta a un generador de 50 volt, hallar la intensidad del campo magnético en el centro del solenoide en gauss y la potencia disipada en watts.

6.12 La corriente I circula por los armazones de hilo de la figura.
(a) ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido del campo magnético en P, el centro del cubo?
(b) Demostrar, usando la superposición, que el campo en P es el mismo si el armazón se reemplaza por el único bucle cuadrado de la derecha.

6.13 Una manera de producir un campo magnético muy uniforme, es usar un solenoide muy largo, y trabajar solamente en la parte media de su interior. Esto es a menudo inconveniente, se despilfarra espacio y potencia. ¿Pueden sugerirse maneras en las que cierto número de bobinas o solenoides cortos puedan combinarse para lograr buena uniformidad del campo en una región limitada? (Después de haberlo resuelto, véase «bobina de Helmholtz» en el índice de cualquier libro clásico de electricidad y magnetismo, y véase si alguno de los inventos se parece al dispositivo que allí se describe).

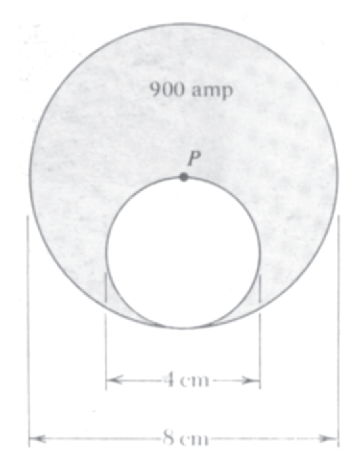
6.14 Se devana uniformemente una bobina sobre un toro de sección recta rectangular. Hay N espiras en total. En la figura se representan solamente algunas. Con tantas vueltas, podemos suponer que la corriente en la superficie del toro circula radialmente en las superficies anulares y longitudi-

Prob. 6.14



nalmente en las superficies cilíndricas interna y externa. Primero debemos convencernos de que este supuesto de simetría requiere que el campo magnético en todo punto tenga dirección «circular», es decir, que todas las líneas de campo son circunferencias en torno al eje del toro. Segundo, demuéstremos que el campo es nulo en todos los puntos exteriores al toro, incluidos los de hueco central. Tercero, hállese el módulo del campo en el interior del toro, en función del radio.

6.15 Para un experimento magnético delicado, un físico quiere anular el campo terrestre en un volumen de dimensiones aproximadas 30 × 30 × 30 cm, de manera que el campo residual en esta región no supere los $10 \cdot 10^{-7}$ T = 10^{-6} T en cualquier punto. La intensidad del campo magnético en este lugar es $55 \cdot 10^{-6}$ T, formando un ángulo de 30° con la vertical. Puede considerarse constante a menos de un 10^{-7} T en el volumen indicado. (El campo magnético no varía tanto en unos 30 cm, pero en un laboratorio existen a menudo perturbaciones locales). Sugiérase una distribución de bobinas adecuadas al caso, y estímese el número de ampere-vueltas necesario para el sistema compensador.



Prob. 6.16

6.16 Una larga varilla de cobre de 8 cm de diámetro tiene un hueco cilíndrico no coaxial, como se ve en el diagrama, en toda su longitud. Este conductor transporta una corriente de 900 amperes circulando «hacia dentro del papel». Deseamos saber módulo, dirección y sentido del campo magnético en el punto *P* que está sobre el eje del cilindro exterior.

6.17 Es posible hallar un cierto número de hechos simples de los campos de los solenoides, utilizando solamente la superposición. La idea es que dos solenoides del mismo diámetro, y de longitud *L*, si se unen por los extremos, constituyen un solenoide de longitud 2*L*. Dos solenoides semiinfinitos unidos forman un solenoide infinito, y así sucesivamente. (Un solenoide semiinfinito es aquel que tiene un extremo en este lugar y el otro alejado infinitamente). He aquí algunos hechos que pueden probarse de esta manera:

(*a*) En el solenoide del apartado (*a*) de la figura, de longitud finita, el campo magnético en el eje, en el punto P_2, en un extremo es aproximadamente la mitad del campo en el punto P_1 en el centro. (¿Es ligeramente mayor que la mitad, o menor que la mitad?)

(*b*) En el solenoide semiinfinito del apartado (*b*) de la figura, la línea de campo *FGH* que pasa por el extremo justo del devanado, es una línea recta desde *G* al infinito.

(*c*) El flujo de **B** a través de la cara final del solenoide semiinfinito es exactamente la mitad del flujo a través de la bobina a gran distancia de la misma en el interior.

(*d*) Toda línea de campo que dista r_0 cm del eje, en la parte muy interna de la bobina, sale del extremo de la bobina a una distancia del eje r_1 que vale exactamente $\sqrt{2}r_0$.

Demostrar que estas expresiones son ciertas. ¿Qué puede hallarse además?

6.18 Dos cilindros coaxiales largos de aluminio están cargados a una diferencia de potencial de 15 000 volts. El cilindro interior tiene un diámetro externo de 6 cm y el cilindro exterior un diámetro interno de 8 cm. Con el cilindro exterior estacionario el cilindro interior gira en torno al eje con una celeridad de 30 revoluciones por segundo. Describir el campo magnético que esto produce y determinar la intensidad. ¿Y si los cilindros girasen en el mismo sentido a 30 revoluciones por segundo?

6.19 Un estudiante decía: «Casi estaba convencido de que la fuerza entre corrientes, que creía que era magnetismo, se explica por los campos eléctricos de las cargas móviles. Pero, si es así, por qué la placa metálica de la Fig. 5.1*c* no aisla un hilo de la influencia del otro?» ¿Puede explicarse esto?

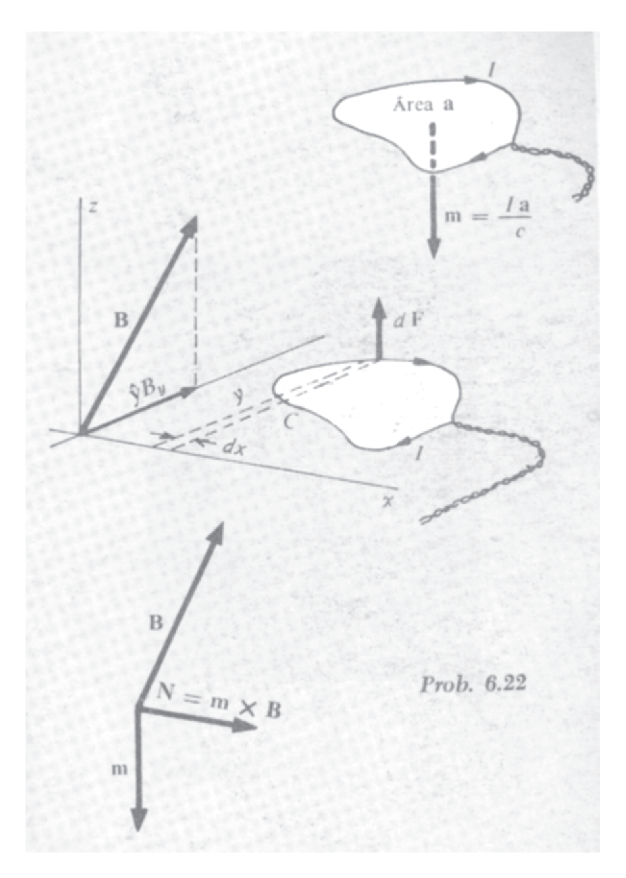
6.20 Supongamos el caso en que la componente del campo magnético paralela al plano de la lámina de corriente tiene el mismo *módulo* en ambos lados, pero su *dirección* cambia en 90° al pasar a través de la lámina. ¿Qué ocurre? ¿Existirá una fuerza sobre la lámina? ¿Nuestra fórmula para la fuerza sobre una lámina de corriente, se aplicaría a casos como éste?

6.21 Ya que filamentos de corriente paralelos se atraen entre sí, puede pensarse que una corriente que circule por una varilla maciza como el conductor del Problema 6.2 tendería a concentrarse cerca del eje de la varilla. Es decir, los electrones de conducción en vez de distribuirse regularmente como es usual en el interior del metal, se amontonarían hacia el eje y la mayor parte de la corriente estaría allí. ¿Qué evita que esto ocurra? ¿Hasta cierto punto es necesario que no ocurra nunca? ¿Puede sugerirse un experimento para detectar tal efecto, si es que existe?

6.22 El objeto principal de este problema es hallar el par que actúa sobre una espira recorrida por una corriente, en un campo magnético constante. El campo constante **B** tiene cierta dirección en el espacio. Orientaremos nuestras coordenadas de manera que **B** sea perpendicular al eje x, y nuestra espira esté contenida en el plano xy, como se indica en la figura. La forma y el tamaño de la espira son arbitrarios; podemos suponer que la corriente se la suministramos por medio de dos hilos trenzados, sobre los cuales la fuerza total será nula. Consideremos un elemento de la espira y hallemos su contribución al par en torno al eje x. Solamente interviene la componente z de la fuerza, y por tanto sólo la componente y del campo **B**, que se ha indicado en la figura como $\hat{\mathbf{y}}B_y$. Hállese la integral que dará el par total. Demuéstrese que esta integral nos dará, excepto factores constantes, el *área* de la espira. El *momento magnético* de una corriente, se define como un vector **m** de módulo Ia donde I es la corriente,a el área de la espira en metros cuadrados, y la dirección del vector es normal a la espira de sentido dado por la regla del sacacorchos aplicada a la corriente, como se ve en la figura. (En el Cap. 10 se vuelve a ver el momento magnético de una espira). Demuéstrese ahora que nuestro resultado implica que el par N en cualquier espira viene dado por la ecuación vectorial

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

¿Qué ocurre con la *fuerza* total sobre la espira?



Prob. 6.22

6.23 Para ciertos fines, interesa acelerar iones de hidrógeno negativos, en un ciclotrón. Un ion de hidrógeno negativo, H^-, es un átomo de hidrógeno al que se ha unido un electrón adicional. La unión es bastante débil; un campo eléctrico de solamente $4{,}5 \cdot 10^8$ volt/m (un campo bastante débil a escala atómica) arranca el electrón adicional, dejando el átomo de hidrógeno. Si queremos acelerar iones H^- hasta una energía cinética de 1 BeV ¿cuál es el campo magnético más alto que utilizaremos para mantenerlos en una órbita circular hasta la energía final? (Para hallar γ en este problema se necesita solamente la masa en reposo del ión H^-, que, por descontado, prácticamente es la misma que la del protón, aproximadamente 1 BeV = 10^9 eV).

6.24 Un electrón se mueve con celeridad de $0{,}01c$ en una órbita circular de radio 10^{-8} cm. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético resultante en el centro de la órbita? (Los números dados son típicos, en orden de magnitud, para un electrón en un átomo.)

6.25 Véase si se puede idear un potencial vector que corresponda a un campo uniforme en la dirección z:$B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_x = B_o$.

6.26 Un hilo de sección circular de radio r_o transporta una corriente I distribuida uniformemente en su sección recta. El eje del hilo es el eje z, con $\hat{\mathbf{z}}$ la dirección y sentido de la corriente. Demostrar que el potencial vector de la forma $\mathbf{A} = \textit{constante}\ \mathbf{Xz}\ (x^2 + y^2)$ dará correctamente el campo magnético **B** de esta corriente en todos los puntos interiores del hilo. ¿Cuál es el valor de la constante?

6.27 Una partícula de carga q y masa en reposo m se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ donde el campo magnético es **B.** Aquí **B** es perpendicular a $\mathbf{v}$, y no hay campo eléctrico. Demostrar que la trayectoria de la partícula es una curva de radio de curvatura R dado por $R = p/qB$, donde p es la cantidad de movimiento de la partícula, $\beta\gamma\ mc$. (Sugerencia: Adviértase que la fuerza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ solamente puede cambiar la dirección de la cantidad de movimiento de la partícula, no su módulo. ¿En qué ángulo $\Delta\theta$ cambia la dirección de $\mathbf{p}$ en un corto tiempo Δt?) Si **B** es el mismo en todo punto, la partícula describirá una trayectoria circular. Determinar el tiempo empleado en completar una revolución.

6.28 Un protón con energía cinética 10^{16} eV ($\gamma = 10^7$) se mueve perpendicularmente al campo magnético interestelar que en la región de la galaxia tiene una intensidad de $3 \cdot 10^{-10}$ tesla. ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria y cuánto tarda en dar una revolución completa? (Usar los resultados del Prob. 6.27.)

6.29 Un acelerador de alta energía produce un haz de protones de energía cinética 2.10^9 eV por protón. La corriente es de 1 miliampere. El diámetro del haz es de 2 mm. Medida en la referencia laboratorio:

(a) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico originado por el haz a 1 cm del eje central del haz?

(b) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético a la misma distancia? Consideremos ahora una referencia F' que se mueve con los protones. ¿Qué campos se medirán en F'? Para este problema puede suponerse que la energía en reposo del protón es de 10^9 eV.

6.30 En las proximidades del origen de un sistema coordenado x, y, z hay un campo eléctrico **E** de módulo 30 000 volts/cm, formando un ángulo de 30° con el eje x, 60° con el eje y. La referencia F' tiene sus ejes paralelos a los descritos antes, pero se mueven, relativamente a la primera referencia, con celeridad $0{,}6c$ en dirección y, sentido positivo. Hallar la dirección y módulo del campo eléctrico que registrará un observador en la referencia F'. ¿De qué campo magnético dará cuenta este observador?

6.31 Según los observadores en la referencia F, los siguientes sucesos tienen lugar en el plano xy. Un único ion positivo que se ha estado moviendo con velocidad constante $v = 0{,}6c$ en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{y}}$ pasa por el origen en el instante $t = 0$. En el mismo instante un ion similar que se ha movido con la misma celeridad, pero en el sentido $-\hat{\mathbf{y}}$, pasa por el punto (2, 0, 0) sobre el eje x. Las distancias van en cm.

(a) ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico, para $t = 0$, en el punto (3, 0, 0)?

(b) ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido del campo magnético, en el mismo lugar e instante?

Resultado: $\mathbf{E} = (5/4 \cdot 10^{14})\ e\hat{\mathbf{x}}$; $\mathbf{B} = (2 \cdot 10^5)\ e\hat{\mathbf{z}}$.

6.32 Consideremos dos electrones en un tubo de rayos catódicos que se mueven en trayectorias paralelas, uno al lado del otro, y a la misma celeridad v. La distancia entre ellos, distancia medida perpendicularmente a su velocidad, es r. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre uno de ellos, debido a la presencia del otro, observada en la referencia laboratorio? Si v fuese muy pequeña frente a c, se podría responder $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ e^2/r^2$. Pero si v no fuese pequeña, se tendrá que ir con cuidado.

(a) La manera más fácil de contestar a esto es: Vayamos a una referencia que se mueva con los electrones. En esta referencia los dos electrones están en reposo, la distancia entre ellos aún es r (¿por qué?), y la fuerza es precisamente $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ e^2/r^2$. Ahora transformemos la fuerza a la referencia laboratorio, usando la ley de transformación de fuerzas, Ec. 14 del Capítulo 5.

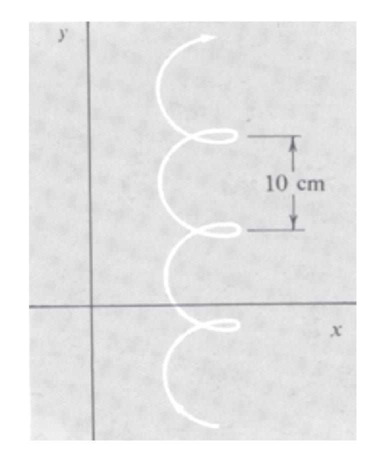
(Mucho cuidado en cuál es el sistema prima; ¿la fuerza en la referencia laboratorio es mayor o menor que la fuerza en la referencia electrón?)

(b) Sería posible obtener la misma respuesta operando enteramente en la referencia laboratorio. En la referencia lab, en la posición instantánea del electrón 1, están los dos campos, eléctrico y magnético, debidos al electrón 2 (véase Fig. 6.26). Calcular la fuerza resultante sobre el electrón 1, que se mueve a través de estos campos con celeridad v, y demostrar que se obtiene el mismo resultado que en *(a)*. Trazar un diagrama para mostrar las direcciones de los campos y de las fuerzas.

(c) ¿A la vista del resultado, qué puede decirse acerca de la fuerza entre dos electrones que se mueven uno al lado del otro, en el límite $v \to c$?

6.33 La figura muestra la trayectoria de un ion positivo que se mueve en el plano xy. Hay un campo magnético de 0,6 tesla en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{z}}$. Cada período del movimiento cicloidal del ion se cumple en 1 microsegundo. ¿Cuál es el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico que debe estar presente? Sugerencia: Pensar en una referencia en la que el campo eléctrico sea nulo.

Resultado: $\mathbf{E} = -6 \cdot 10^4 \hat{\mathbf{x}}$ V/cm.



Prob. 6.33

6.34 Calcúlese aproximadamente el campo magnético en la parte superior del disco giratorio del experimento de Rowland. Tómense los datos necesarios de la descripción en la página de su artículo reproducida en la Fig. 6.27. Se precisará saber también, que el potencial del disco giratorio, con respecto a las placas superiores e inferiores conectadas a masa, era de unos 10 kV en la mayor parte de su recorrido. Esta información se da más adelante en su artículo, al igual que la descripción de una parte fundamental del aparato, el magnetómetro «astático» mostrado en el tubo vertical de la izquierda: Este es un dispositivo en el que dos agujas magnéticas, orientadas en sentidos contrarios, están unidas rígidamente a una suspensión, de manera que el par debido al campo magnético terrestre se anula de una a otra. El campo producido por el disco giratorio, actuando principalmente sobre la aguja más cercana, puede detectarse en presencia de un campo uniforme mucho más intenso. Esta era la única precaución que debía tomar Rowland.

6.35 Una prueba Hall para medir campos magnéticos se hace con silicio dopado con arsénico que tiene $2 \cdot 10^{15}$ electrones de conducción por cm^3 y una resistividad de 1,6 ohm-cm. El voltaje Hall se mide a través de una cinta de silicio tipo-*n* que tiene 0,2 cm de anchura, 0,005 cm de espesor y 0,5 cm de longitud entre los extremos más gruesos los cuales se han conectado al circuito de una batería de 1 volt. ¿Qué voltaje se medirá entre los extremos de la dimensión de 0,2 cm de la cinta cuando la muestra se sitúa en un campo de 0,1 tesla?

Resultado: 7,8 milivolts.

6.36 Consideremos dos solenoides, uno de los cuales es un modelo a escala una décima del otro. El solenoide más largo tiene 2 metros de longitud, y un metro de diámetro y está bobinado con hilo de cobre de 1 cm de diámetro. Cuando la bobina se conecta a un generador de 120 volts de corriente continua, el campo magnético en el centro es de 0,1 T. El modelo a escala es exactamente una décima del tamaño en cualquier dimensión lineal, inclusive el diámetro del hilo. El número de vueltas es el mismo, y está diseñado para dar el mismo campo central.

(a) Demostrar que el voltaje necesario es el mismo, o sea, 120 volts.

(b) Comparar las bobinas respecto a la potencia disipada y a la dificultad de extraer el calor mediante algún medio refrigerante.

6.37 Este problema se refiere a los granos de polvo interestelar cargados eléctricamente que fue objeto del Problema 2.22. Su masa, que no intervino en aquel problema, puede considerarse de 10^{-13} gramos. Supongamos que se mueve completamente libre, con celeridad $v \ll c$, en un plano perpendicular al campo magnético interestelar que en esta región tiene una intensidad de $3 \cdot 10^{-10}$ tesla. ¿Cuántos años tardará en recorrer una órbita circular?

7

Inducción electromagnética

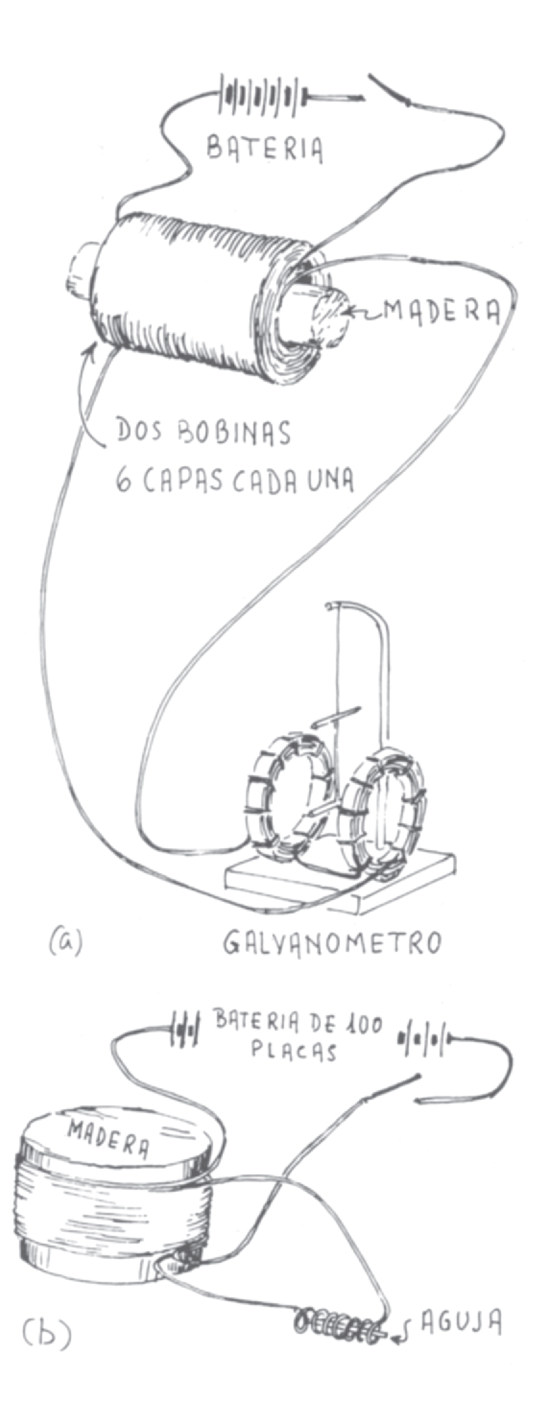


Fig. 7.1 (*a-e*) Interpretación del autor de algunos experimentos de Faraday descritos en su «*Experimental Researches in Electricity*». Londres, 1839.

7.1 Descubrimiento de Faraday

1. El poder que la electricidad de tensión posee de causar un estado eléctrico opuesto en su vecindad, ha sido expresado por el término general Inducción; que, tal como ha sido recibido en el lenguaje científico, puede también usarse, con propiedad, en el mismo sentido general para expresar el poder que las corrientes eléctricas poseen de inducir cualquier estado particular en la materia, en su vecindad inmediata, de otra manera indiferente. Es con este significado que yo voy a usarla en el presente artículo.

2. Ciertos efectos de la inducción de las corrientes eléctricas han sido ya reconocidos y descritos: como los de imanación; los experimentos de Ampère de llevar un disco de cobre cerca de una espiral plana; su repetición con los extraordinarios experimentos de los electroimanes de Arago, y quizás algunos otros. Aun así, parecía poco probable que éstos pudieran ser todos los efectos que podría producir la inducción por corrientes; especialmente ya que, prescindiendo del hierro, la mayoría de ellos desaparecen, mientras que todavía una infinidad de cuerpos, mostrando fenómenos definidos de inducción con la electricidad de tensión, permanecen aun sin influirse por la inducción de la electricidad en movimiento.

3. Además, si la bella teoría de Ampère, o cualquier otra, fuese adoptada, o se hubiese hecho reserva mental, aun esto parecería muy extraordinario, que como cada corriente eléctrica estaba acompañada por la correspondiente intensidad de acción magnética perpendicular a la corriente, cuando los buenos conductores de la electricidad, se colocan dentro de su esfera de acción, no debería existir ninguna corriente inducida a través de ellos, o algún efecto sensible producido, equivalente en fuerza, a tal corriente.

4. Estas consideraciones, con su consecuencia, la esperanza de obtener electricidad del magnetismo ordinario, me ha estimulado varias veces a investigar experimentalmente los efectos inductivos de las corrientes eléctricas. Recientemente llegué a resultados positivos; y no sólo se satisfacieron mis esperanzas sino que obtuve una llave que me pareció me abriría una explicación completa del fenómeno magnético de Arago, y también para descubrir un nuevo estado que puede probablemente tener gran influencia en algunos de los efectos más importantes de las corrientes eléctricas.

5. Me propongo describir estos resultados, no como fueron obtenidos, sino de tal manera que den la perspectiva más concisa de la totalidad.

De esta manera empieza el relato de Michael Faraday del descubrimiento de la inducción electromagnética. Estos párrafos forman parte de un trabajo presentado por Faraday en 1831. Se ha sacado de su *Experimental Researches in Electricity*, publicado en Londres en 1839. Sigue a continuación, en el escrito, la descripción de unos doce o más experimentos, a través de los cuales Faraday sacó a la luz cada aspecto esencial de la producción de efectos eléctricos por acción magnética.

La « electricidad de tensión » para Faraday significaba cargas electrostáticas, y la inducción que refiere en la primera frase no implica más de lo que hemos estudiado en el Cap. 3. La presencia de una carga origina una redistribución de cargas en los conductores cercanos. La pregunta de Faraday era ¿por qué la corriente eléctrica no causa otra corriente en los conductores vecinos?

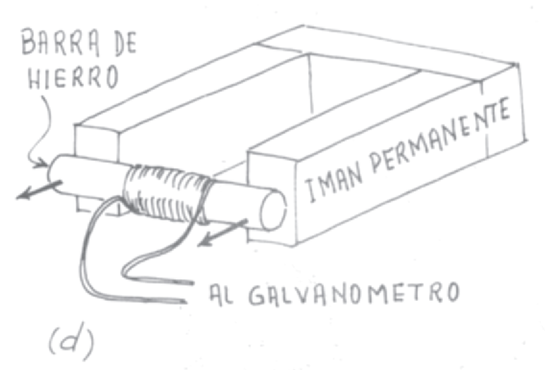
La producción de campos magnéticos por corrientes eléctricas había sido bien investigada después del descubrimiento de Oersted. En el laboratorio, la fuente familiar de estas corrientes « galvánicas » era la batería voltaica. El detector más sensible de tales corrientes era el galvanómetro. Consistía en una aguja imanada pivotada como la de una brújula o suspendida por un hilo delgado entre dos bobinas de hilo. A veces se usaba otra aguja exterior a la bobina, pero conectada rígidamente a la primera, para compensar la influencia del campo magnético terrestre (Fig. 7.1*a*). Los esquemas en la Fig. 7.1*b* hasta *e* representan algunos de los experimentos de inducción de Faraday. Debe leerse su propia versión, una de las clásicas de la ciencia experimental, para apreciar el ingenio con que investigaba, la manera cuidadosa y clara con la que reconocía la evidencia.

En sus primeros experimentos, Faraday estuvo desorientado al hallar que una corriente estacionaria no tenía efecto detectable en un circuito próximo. Construyó varias bobinas de hilo, de las cuales la Figura 7.1*a* muestra un ejemplo, arrollando dos conductores de tal manera que estuvieran muy juntos sólo separados por la tela o papel aislante. Un conductor formaría circuito con un galvanómetro. A través del otro mandaría una fuerte corriente de una batería. Desdichadamente, no había desviación en el galvanómetro. Pero en uno de estos experimentos notó una ligera perturbación del galvanómetro cuando conectaba la corriente y otra cuando la desconectaba. Siguiendo este camino, pronto estableció sin ninguna duda que las corrientes se inducen en otros conductores, no por una corriente *estacionaria*, sino por una *variable*. Una de las brillantes tácticas experimentales de Faraday en este campo fue reemplazar su galvanómetro, que se dio cuenta que no era un buen detector para pulsos cortos de corriente, por una simple bobina en la cual puso una aguja de acero no imanada (Fig. 7.1*b*). Encontró que la aguja quedaba imanada por el pulso de corriente inducida cuando la corriente primaria se conectaba — y podía imanarse en el sentido opuesto por el pulso de corriente inducida cuando se abría el circuito primario.

Aquí está su propia descripción de otro experimento:

En los anteriores experimentos los hilos estaban colocados uno cerca del otro, y el contacto del inductor con la batería, efectuado cuando se necesitaba el efecto inductivo; pero como la acción particular puede suponerse que se ejerce solamente en los momentos de efectuar o romper contacto, la inducción se producía de otra manera. Algunos metros de hilo de cobre se extendieron en forma de gran zigzag, representando la letra W, sobre la superficie de un tablero ancho; un segundo hilo se extendió de manera parecida sobre un segundo tablero, de tal manera que al acercarlo al primero los hilos se tocaban excepto que se interponía una gruesa hoja de papel. Uno de estos hilos se conectaba con el galvanómetro y el otro con una pila voltaica. Entonces se movía el primer hilo hacia el segundo y cuando se aproximaba se desviaba la aguja. Al quitarla, la aguja se desviaba en sentido contrario. Acercando los hilos y luego alejándolos, simultáneamente con las vibraciones de la aguja, éstas se hicieron pronto muy amplias; pero cuando los hilos cesaron de moverse o alejarse uno de otro, la aguja del galvanómetro pronto volvió a su posición normal. Cuando los hilos se aproximaban, la corriente inducida era desentido *contrario* a la corriente inductora. Cuando los hilos se alejaban la corriente inducida era del *mismo* sentido que la corriente inductora. Cuando los hilos permanecían estacionarios, no había corriente inducida.





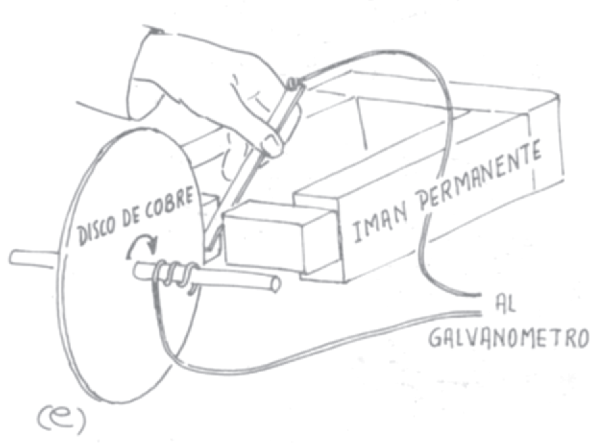
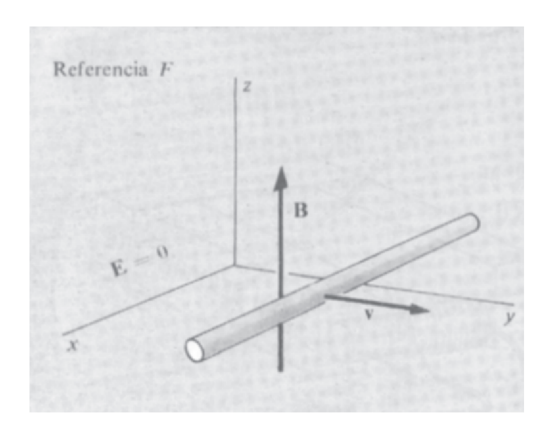
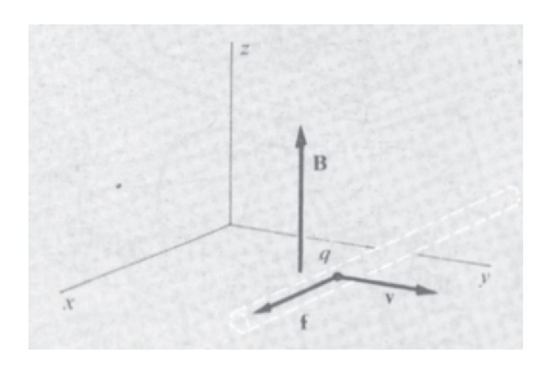
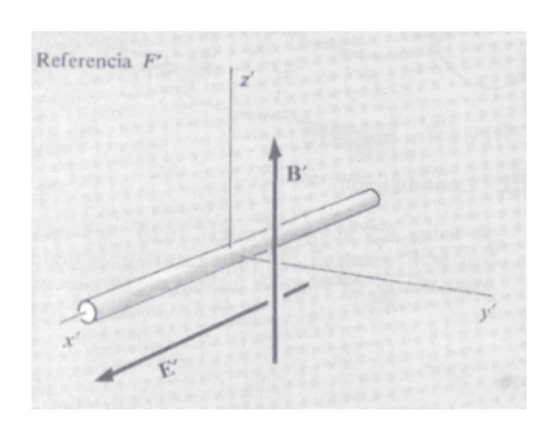


Fig. 7.1 Continuación.

Fig. 7.2 (*a*) Una varilla conductora se mueve a través de un campo magnético.
(*b*) Cualquier carga q que se mueva con la varilla está sometida a la fuerza $(q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
(*c*) El sistema de referencia F' se mueve con la varilla; en esta referencia existe un campo eléctrico $\mathbf{E}'$.







En este capítulo estudiamos las interacciones electromagnéticas que Faraday halló en estos experimentos. Desde nuestro punto de vista presente, la inducción puede verse como una consecuencia natural de la fuerza sobre una carga moviéndose en un campo magnético. En un sentido limitado, podemos sacar la ley de la inducción de lo que ya sabemos. Al seguir este curso, partiremos de nuevo del orden histórico de desarrollo, pero lo hacemos así (tomando las propias palabras de Faraday del final del párrafo citado primeramente) *para dar la visión de conjunto más concisa.*

7.2 *Una varilla conductora se mueve a través de un campo magnético uniforme*

La Fig. 7.2*a* muestra una porción recta de hilo o varilla delgada metálica, que se supone se mueve a velocidad constante $\mathbf{v}$ en una dirección perpendicular a su eje. En el espacio a través del cual se mueve la varilla existe un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, constante con el tiempo. Éste, puede ser debido a un gran solenoide que encierra la región entera del diagrama. El sistema de referencia F con las coordenadas x, y, z es aquel en el que el solenoide está en reposo. En ausencia de la varilla no existe campo eléctrico en este espacio, solamente el campo magnético uniforme $\mathbf{B}$.

Siendo la varilla un conductor, contiene partículas cargadas que se moverán si se les aplica una fuerza. Toda partícula cargada que se transporta junto con la varilla, tal como una partícula con carga q en la Fig. 7.2*b*, necesariamente se mueve a través del campo magnético $\mathbf{B}$ y debe por tanto experimentar una fuerza

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{1}$$

Con $\mathbf{B}$ y $\mathbf{v}$ dirigidas como se indica en la Fig. 7.2, la fuerza es en el sentido positivo de la dirección x si q es una carga positiva, en sentido contrario para los electrones cargados negativamente que son de hecho los portadores de carga móviles en la mayoría de conductores. Las consecuencias serán las mismas si son móviles las negativas, las positivas o ambas.

Cuando la varilla se mueve a celeridad constante y se ha llegado a un estado estacionario, la fuerza $\mathbf{f}$ dada por la Ec. 1 debe equilibrarse, en todo punto interior a la varilla, por una fuerza igual y opuesta. Ésta sólo puede proceder de un campo eléctrico en la varilla. El campo eléctrico se produce de esta manera: La fuerza $\mathbf{f}$ empuja las cargas negativas hacia un extremo de la varilla, dejando el otro extremo cargado positivamente. Esto prosigue hasta que las mismas cargas separadas crean un campo eléctrico $\mathbf{E}$ tal que, en cualquier punto en el interior de la varilla,

$$q\mathbf{E} = -\mathbf{f} \tag{2}$$

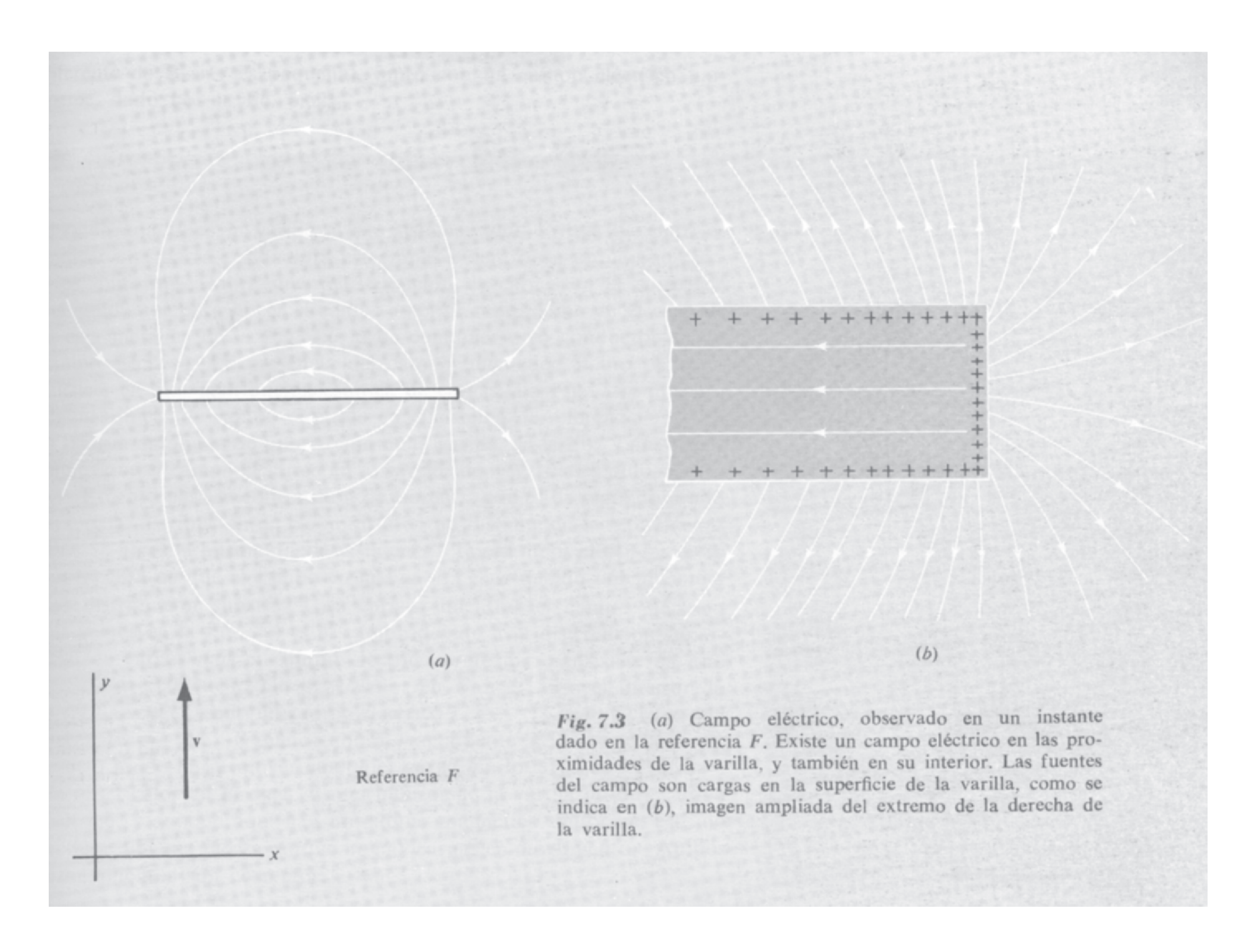


Fig. 7.3 (*a*) Campo eléctrico, observado en un instante dado en la referencia *F*. Existe un campo eléctrico en las proximidades de la varilla, y también en su interior. Las fuentes del campo son cargas en la superficie de la varilla, como se indica en (*b*), imagen ampliada del extremo de la derecha de la varilla.

Entonces cesa el movimiento de cargas relativo a la varilla. Esta distribución de cargas crea un campo eléctrico tanto en el exterior como en el interior. El campo exterior se parece al de cargas positivas y negativas separadas, con la diferencia de que las cargas no están enteramente concentradas en los extremos de la varilla, sino distribuidas a lo largo de ella. El campo exterior está esquematizado en la Fig. 7.3*a* La Fig. 7.3*b* es una imagen ampliada del extremo de la varilla cargado positivamente, mostrando la distribución de cargas en la superficie y algunas líneas de campo tanto interiores como exteriores al conductor. Ésta es en la forma en que aparecen, en cualquier instante, en la referencia *F*.

Observemos este sistema desde una referencia F' que se mueve con la varilla. Ignorando de momento la varilla, en esta referencia F' vemos un campo magnético $\mathbf{B}'$, indicado en la Fig. 7.2*c* (no muy

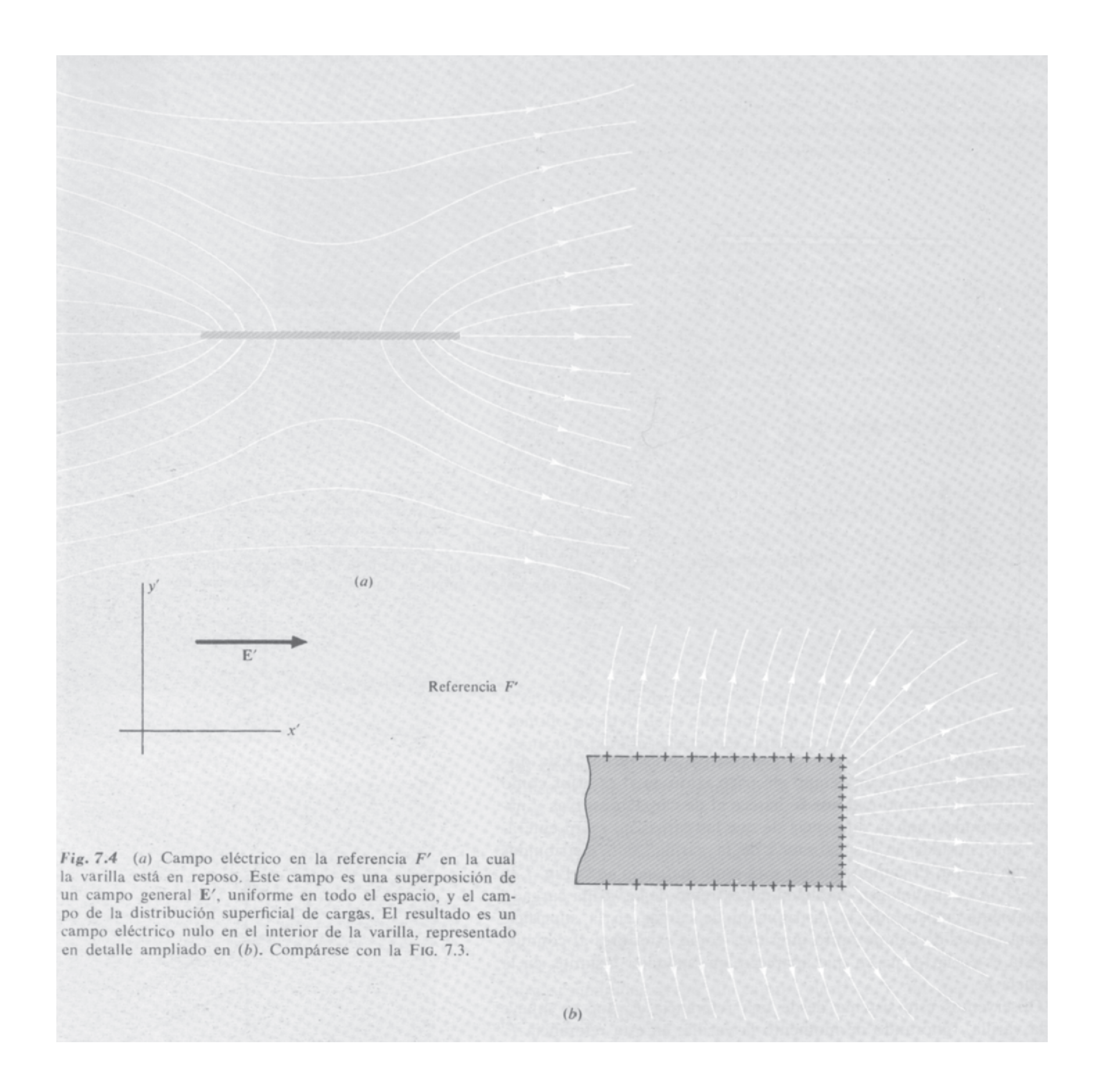


Fig. 7.4 (*a*) Campo eléctrico en la referencia F' en la cual la varilla está en reposo. Este campo es una superposición de un campo general $\mathbf{E}'$, uniforme en todo el espacio, y el campo de la distribución superficial de cargas. El resultado es un campo eléctrico nulo en el interior de la varilla, representado en detalle ampliado en (*b*). Compárese con la Fig. 7.3.

diferente de **B** si **v** es pequeña), junto con un campo eléctrico uniforme, dado por la Ec. 6.62,

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{v}'\,\mathbf{B}' \tag{3}$$

Cuando añadimos la varilla a este sistema, todo lo que hacemos es colocar una barra conductora estacionaria dentro de un campo eléctrico uniforme. Habrá una redistribución de cargas en la superficie del conductor para hacer el campo interior nulo, como en el caso de la caja metálica de la Fig. 3.6, o de cualquier otro conductor en un campo eléctrico. La presencia del campo magnético **B**′ no tiene influencia en esta distribución estática de cargas. La Fig. 7.4*a* muestra algunas líneas de campo eléctrico en el sistema de referencia *F*′ y en la imagen ampliada de un extremo de la varilla, en la Fig. 7.4*b*, observamos que el campo eléctrico en el *interior* de la varilla es nulo.

Excepto para la contracción de Lorentz, que es de segundo grado en v/c, la distribución de carga vista en un instante en la referencia *F* (Fig. 7.3*b*), es la misma que la vista en *F*′. Los campos eléctricos difieren a causa de que el campo en la Fig. 7.3 es el debido únicamente a una distribución superficial de cargas, mientras el campo eléctrico que vemos en la Fig. 7.4 es el campo debido a la distribución superficial de cargas *más* el campo eléctrico uniforme que existe en este sistema de referencia. Un observador en *F* dice: « En el interior de la varilla se ha creado un campo eléctrico $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, que ejerce una fuerza $q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que equilibra exactamente la fuerza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que de otro modo haría mover cualquier carga q a lo largo de la varilla». Un observador en *F*′ dice: «En el interior de la varilla no hay campo eléctrico, y aunque aquí hay un campo magnético uniforme, éste no produce ninguna fuerza porque no hay cargas en movimiento». Ambos razonamientos son correctos.

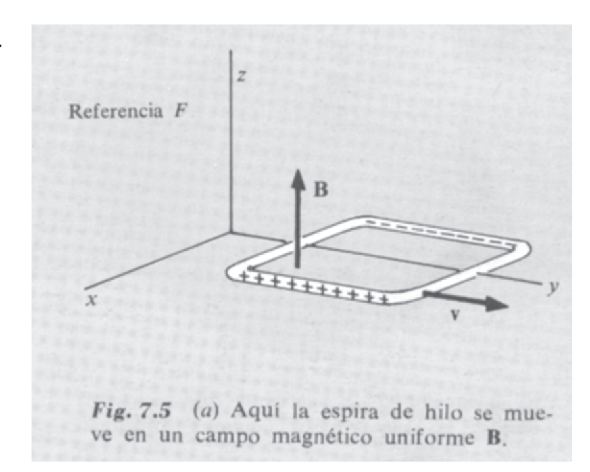
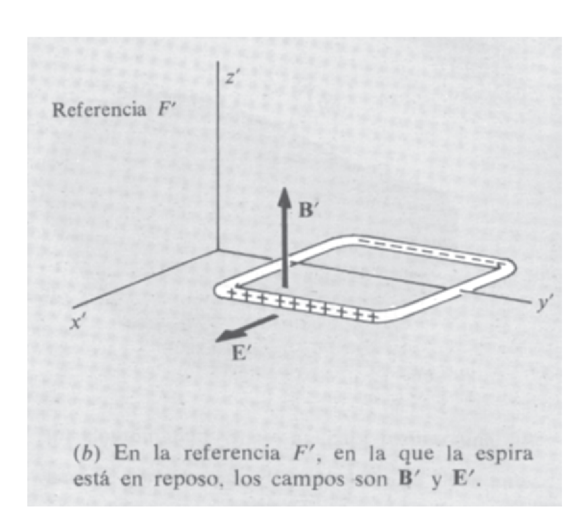


Fig. 7.5 (*a*) Aquí la espira de hilo se mueve en un campo magnético uniforme **B**.



(*b*) En la referencia *F*′, en la que la espira está en reposo, los campos son **B**′ y **E**′.

7.3 Una espira se mueve a través de un campo magnético no uniforme

¿Qué ocurre si hacemos mover una espira rectangular de hilo, como la de la Fig. 7.5, a celeridad constante a través de un campo uniforme **B**? Para predecir lo que ocurrirá, solamente necesitamos preguntarnos — adoptando la referencia *F*′ — lo que pasaría si colocáramos tal espira en un campo eléctrico uniforme. Evidentemente dos lados opuestos del rectángulo adquirirían cierta carga, y esto sería todo. Sin embargo, supongamos que el campo **B**, en la referencia *F*, aunque constante con el tiempo, *no es uniforme* en el espacio. Para ilustrar esto, en la Fig. 7.6 mostramos el campo **B** creado por un pequeño solenoide. Este solenoide, junto con la batería que da una corriente constante, se fija cerca del origen en la referencia *F*. (Dijimos antes que no hay campo eléctrico en *F*; si usamos realmente un solenoide de resistencia finita para crear tal campo, existirá un campo

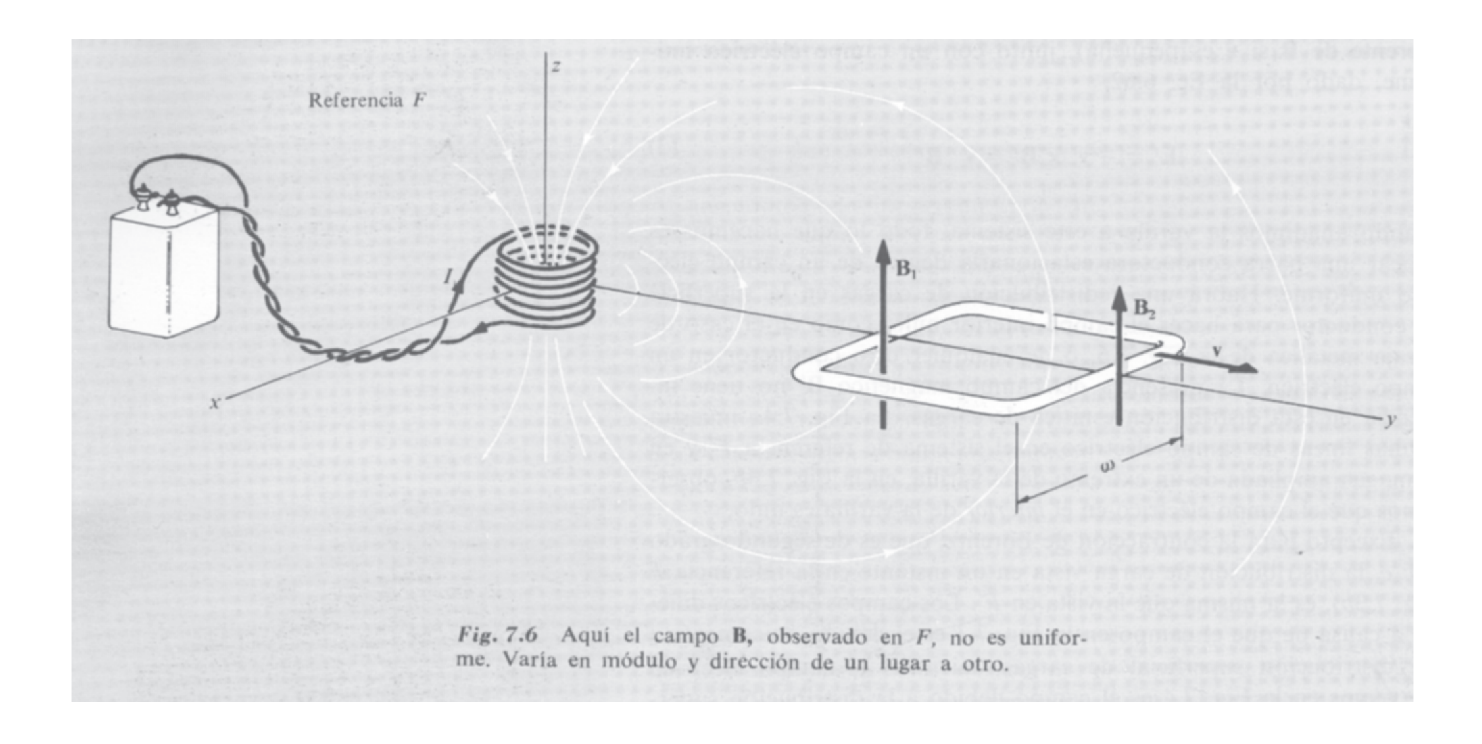


Fig. 7.6 Aquí el campo **B**, observado en *F*, no es uniforme. Varía en módulo y dirección de un lugar a otro.

eléctrico asociado con la batería y este circuito. Es ajeno a nuestro problema y puede ignorarse. O bien, podemos ponerlo todo, solenoide con su batería, dentro de una caja metálica.)

Ahora, moviéndose la espira con celeridad v en la dirección y, en la referencia F, en un instante t sea su posición tal que la intensidad del campo magnético sea $\mathbf{B}_1$ en el lado izquierdo de la espira y $\mathbf{B}_2$ en el lado derecho (Fig. 7.6). Designemos por $\mathbf{f}$ la fuerza que actúa sobre una carga q que se desplaza con la espira. Dicha fuerza es función de la posición de la espira en un instante dado. Determinemos la integral curvilínea de $\mathbf{f}$ a lo largo de toda la espira: En los dos lados de la espira paralelos a la dirección del movimiento, $\mathbf{f}$ es perpendicular al camino elemental $d\mathbf{s}$, así que no aporta nada. Teniendo en cuenta las contribuciones de los otros dos lados, cada uno de longitud w, tenemos:

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = qv(B_1 - B_2)w \qquad (4)$$

Si imaginamos que una carga q se mueve a lo largo de la espira, en un intervalo de tiempo suficientemente corto para que la posición de la espira no haya variado apreciablemente, la Ec. 4 nos da el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{f}$. El trabajo realizado por *unidad de carga* es $(1/q)\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$. A esta cantidad la llamamos *fuerza electromotriz*. Utilizamos para ella el símbolo $\mathcal{E}$, y a menudo abreviamos el nombre

a « fem ». $\mathcal{E}$ tiene las mismas dimensiones que el potencial eléctrico y se mide en volt., o en J/C.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \tag{5}$$

El término *fuerza electromotriz*, ya fue introducido anteriormente en la Sec. 4.10. Se definió como el trabajo por unidad de carga que interviene al moverse una carga a lo largo de un circuito que contiene una pila voltaica. Ampliamos ahora la definición de fem para incluir toda influencia que haga circular las cargas a lo largo de un camino cerrado. Si el camino resulta ser un circuito físico con resistencia R, la fem $\mathcal{E}$ originará una corriente que circulará de acuerdo con la ley de Ohm: $I = \mathcal{E}/R$. En el caso particular que estamos considerando, **f** es la fuerza que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético, y tiene el valor

$$\mathcal{E} = vw(B_1 - B_2) \tag{6}$$

La fuerza electromotriz dada por la Ec. 6 se relaciona de una manera muy simple con la *velocidad de variación del flujo magnético* a través de la espira. Por flujo magnético a través de la espira, queremos decir la integral de superficie de **B** extendida a una superficie cuyo contorno es la espira. El flujo Φ a través de la curva cerrada, o espira C, en la Fig. 7.7*a*, viene dada por la integral de superficie de **B** extendida a S_1:

$$\Phi_{(S_1)} = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 \tag{7}$$

Podemos dibujar infinidad de superficies distintas limitadas por C. La Fig. 7.7*b* muestran otra de ellas, S_2. ¿Por qué no especificamos qué superficie debemos usar para calcular el flujo? *No importa* pues $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ tendrá el mismo valor para todas estas superficies. Vamos a tomarnos un minuto para sentar este punto de una vez para siempre. El flujo a través de S_2 será $\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$. Adviértase que permitimos al vector $d\mathbf{a}_2$ que salga del lado superior de S_2 para que esté de acuerdo con la elección del lado de S_1. Esto dará un número positivo si el flujo neto a través de C es hacia arriba.

$$\Phi_{(S_2)} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \tag{8}$$

Vimos en la Sec. 6.2 que el campo magnético tiene divergencia nula: div $\mathbf{B} = 0$. Luego se deduce del teorema de Gauss que si S es una superficie *cerrada* cualquiera (« un globo »), y V es el volumen interior a ella:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{B} \, dv = 0 \tag{9}$$

Apliquemos esto a la superficie cerrada, tal vez parecida a un timbal,

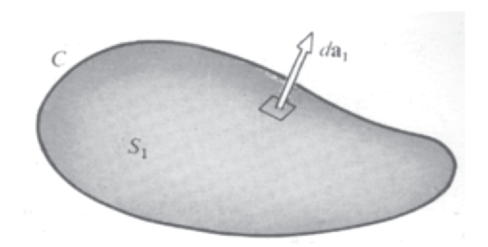
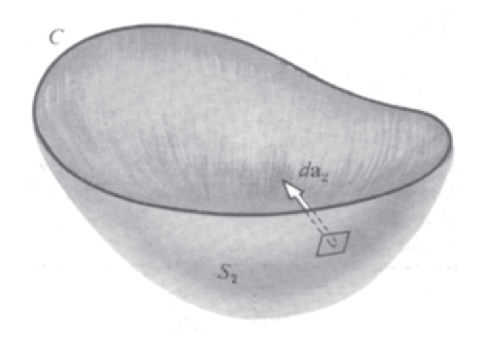
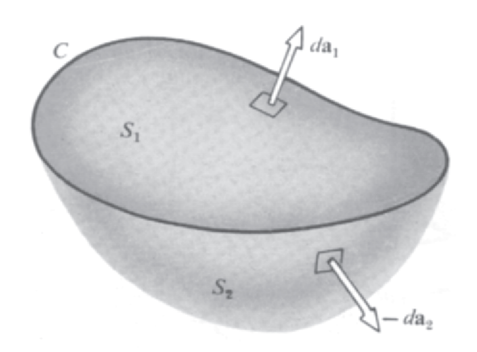


Fig. 7.7 (*a*) El flujo a través de C es $\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1$



(*b*) S_2 es otra superficie de la que C es su contorno. También serviría para el cálculo de Φ.



(*c*) Combinando S_1 y S_2 para formar una superficie cerrada, para la cual $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ debe anularse, se demuestra que $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$.

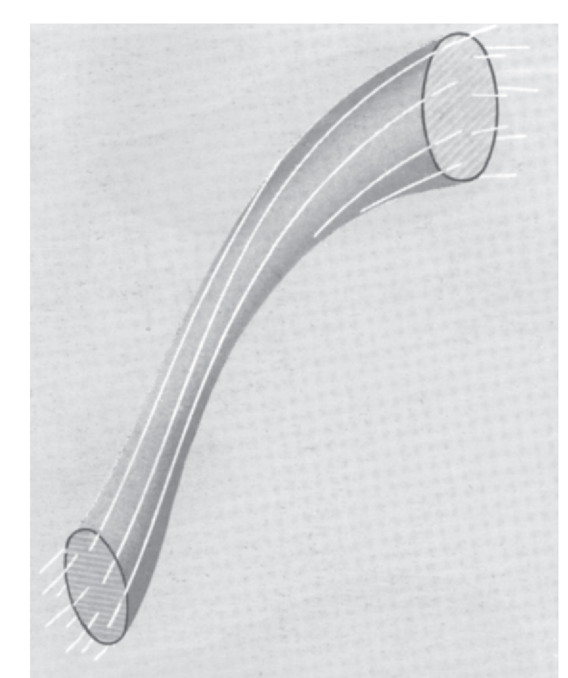


Fig. 7.8 Tubo de flujo. Las líneas de campo magnético están contenidas en la superficie del tubo. El tubo encierra cierta cantidad de flujo Φ. No importa donde la cortemos, se hallará que $\int \mathbf{B}.d\mathbf{a}$ en esta sección tiene siempre el mismo valor. Un tubo de flujo no tiene por qué ser cilíndrico. Puede partirse de cualquier parte con cierta sección recta, y el curso de las líneas de campo determinará cómo varía la sección en forma y tamaño a lo largo del tubo.

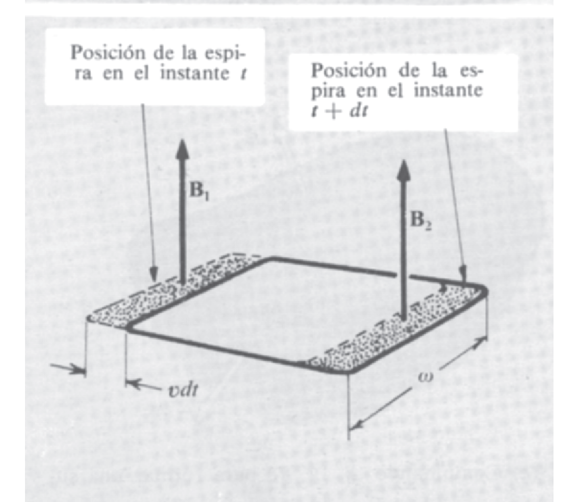


Fig. 7.9 En el intervalo dt la espira gana un incremento de flujo B_2wvdt y pierde un incremento B_1wvdt.

formada al unir S_1 y S_2, como en la Fig. 7.7*c*. En S_2 la normal hacia fuera es *opuesta* al vector $d\mathbf{a}_2$ utilizada para el cálculo del flujo a través de C. Así

$$0 = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_1 + \int \mathbf{B}\cdot(-d\mathbf{a}_2)$$

o (10)

$$\int_{S_1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}_2$$

Esto demuestra que no importa qué superficie usemos para calcular el flujo a través de C.

Esto es bien evidente si comprobamos que div $\mathbf{B} = 0$ implica un tipo de conservación espacial de flujo. En cualquier volumen entra tanto flujo como sale. (Estamos considerando el caso en el espacio total en un instante dado.) A menudo es útil considerar « tubos » de flujo. Un tubo de flujo (Fig. 7.8) es una superficie en la cual en cada punto las líneas de campo magnético están contenidas en la superficie. Es una superficie a través de la cual no atraviesa el flujo, y podemos imaginar que contiene una cierta cantidad de flujo, al igual que un cable telefónico contiene hilos. A través de cualquier curva cerrada dibujada alrededor y muy cerca de un tubo de flujo, pasa el mismo flujo. Esto podía decirse del campo eléctrico **E** solamente para las regiones donde no exista carga eléctrica, ya que div $\mathbf{E} = 4\pi\rho$. El campo magnético tiene siempre, y en cualquier punto, divergencia nula.

Volviendo ahora a la espira rectangular que se mueve, vamos a calcular la *velocidad de variación* del flujo a través de la misma. En un intervalo de tiempo dt la espira se mueve una distancia $v\,dt$. Esto cambia el flujo total a través de la espira en dos maneras, siendo éste $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ extendida a una superficie limitada por la espira. Como puede verse en la Fig. 7.9, el flujo se gana en la derecha, en la cantidad B_2wvdt, mientras se pierde por la izquierda en la cantidad B_1wvdt. Así pues, $d\Phi$, la variación de flujo a través de la espira en el intervalo de tiempo dt es

$$d\Phi = -(B_1 - B_2)wv\,dt \tag{11}$$

Comparando la Ec. 11 con la Ec. 6 vemos que, al menos en este caso, la fuerza electromotriz puede expresarse como:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{12}$$

Podemos demostrar que esto se cumple de manera completamente general, para una espira de cualquier forma moviéndose de manera cualquiera. La espira C en la Fig. 7.10 ocupa la posición C_1 en el instante t, y se está moviendo de manera que, en el instante $t + dt$, ocupa la posición C_2. Un elemento particular de la espira, ds, ha sido

transportado con velocidad **v** a su nueva posición. S indica una superficie limitada por la espira en el instante t. El flujo a través de la espira en este instante es

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{13}$$

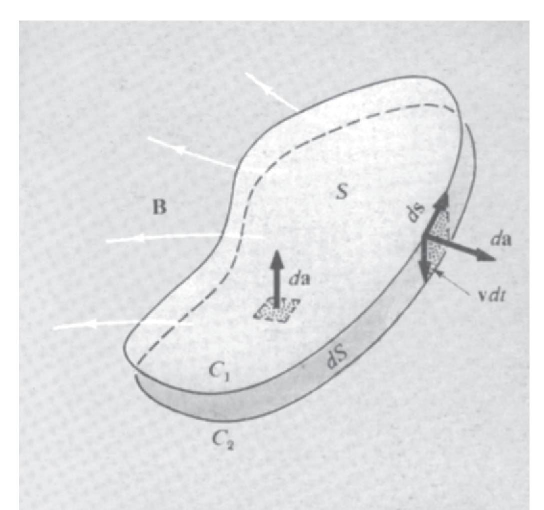


Fig. 7.10 La espira se mueve desde la posición C_1 a la posición C_2 en el transcurso del tiempo dt.

El campo magnético **B** proviene de fuentes que son estacionarias en nuestro sistema de referencia y permanece constante con el tiempo, en cualquier punto fijo de esta referencia. En el instante $t + dt$ una superficie limitada por la espira es la superficie original S, mantenida fija en el espacio, aumentada con la « faja » dS. (Recuérdese que podemos usar cualquier superficie limitada por la espira para calcular el flujo a través de ella.) Así:

$$\Phi(t + dt) = \int_{S+dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t) + \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{14}$$

De aquí que la variación del flujo, en el intervalo dt, es exactamente el flujo a través de la « faja » dS, $\int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$. En la faja, un elemento de superficie $d\mathbf{a}$ puede expresarse como $(\mathbf{v}dt) \times d\mathbf{s}$, de manera que la integral extendida a la superficie dS puede escribirse como una integral a lo largo del camino C, de esta manera:

$$d\Phi = \int_{dS} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_C \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{v}\, dt) \times d\mathbf{s}] \tag{15}$$

Puesto que dt es una constante en la integración, podemos sacarlo fuera y tenemos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) \tag{16}$$

De acuerdo con las reglas del producto mixto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ de tres vectores cualesquiera, tenemos la identidad: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$. Aplicando esto a la cantidad bajo signo integral en la Ec. 16, tenemos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \tag{17}$$

Ahora bien, la fuerza sobre una carga q que se mueve a lo largo de la espira es exactamente $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, así que la fuerza electromotriz, que es la integral curvilínea, a lo largo de la espira, de la fuerza por unidad de carga, es exactamente

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \tag{18}$$

Comparando la Ec. 17 con la Ec. 18, obtenemos la relación simple ya dada en la Ec. 12, pero válida ahora para formas arbitrarias y movimientos arbitrarios de la espira. (Ni siquiera tenemos que suponer que **v** es la misma para todos los puntos de la espira.) En resumen, la integral curvilínea de $\mathbf{f}/q$, la fuerza por unidad de carga, a lo largo de una espira móvil, es justamente la velocidad de variación del flujo a través de la espira.

El sentido de la integral curvilínea y el de la dirección en la cual llamamos al flujo positivo, están relacionados por la regla del tornillo. Por ejemplo, en la Fig. 7.6 el flujo es *hacia arriba* a través de la espira y es *decreciente*. Teniendo en cuenta el signo menos en la Ec. 12, nuestra regla nos dice que se creará una fuerza electromotriz que tendería a desplazar una carga positiva a lo largo de la espira en sentido contrario al de las agujas del reloj, como puede verse contemplando la espira (Fig. 7.11).

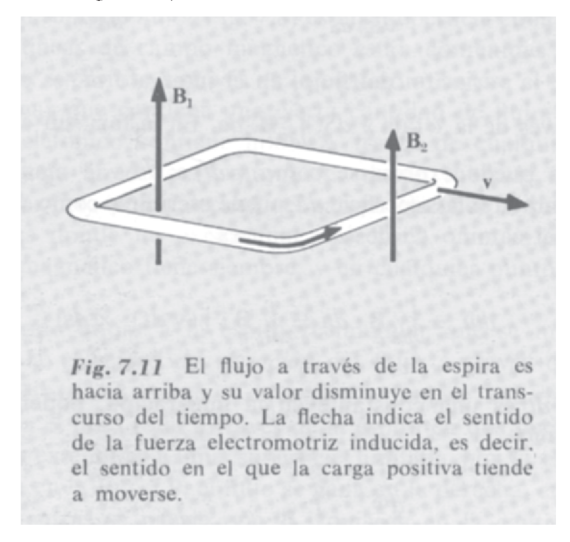


Fig. 7.11 El flujo a través de la espira es hacia arriba y su valor disminuye en el transcurso del tiempo. La flecha indica el sentido de la fuerza electromotriz inducida, es decir, el sentido en el que la carga positiva tiende a moverse.

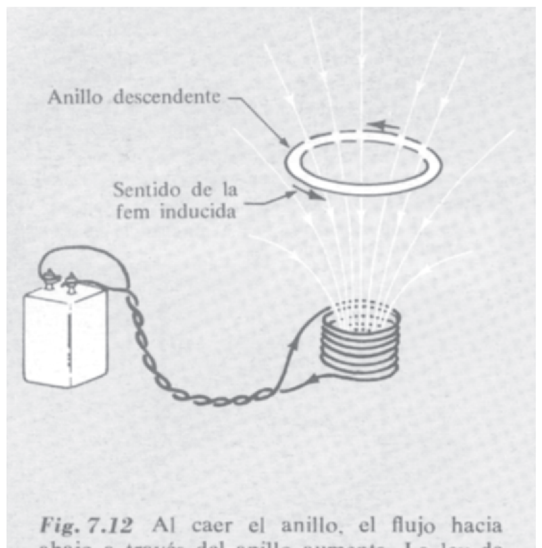


Fig. 7.12 Al caer el anillo, el flujo hacia abajo a través del anillo aumenta. La ley de Lenz nos dice que la fem inducida tendrá el sentido indicado por las flechas, pues es el sentido que debe tener la corriente que circula para producir flujo hacia arriba a través del anillo. El sistema reacciona para *oponerse* a la variación que tiene lugar.

Existe un método mejor de considerar esta cuestión del signo y dirección. Nótese que si la corriente debe circular en el sentido de la fuerza electromotriz inducida, en el caso representado en la Fig. 7.11, esta misma corriente debe crear cierto flujo a través de la espira, dirigido para *neutralizar* la supuesta variación de flujo. Esto es un hecho físico esencial y no la consecuencia de un convencionalismo arbitrario acerca de los signos y sentidos. Es una manifestación de la tendencia de los sistemas a oponerse a un cambio. En este contexto se le llama tradicionalmente ley de Lenz.

Otro ejemplo de la ley de Lenz se ilustra en la Fig. 7.12. El anillo conductor cae dentro del campo magnético de la bobina. El flujo a través del anillo es *hacia abajo* y *creciente* en magnitud. Para contrarrestar esta variación, se necesita cierto flujo hacia arriba. Para producir tal flujo se necesita una corriente que circule a lo largo del anillo en el sentido de las flechas. La ley de Lenz nos asegura que la fem inducida tendrá el sentido correcto para originar tal corriente.

Si la fem hace que la corriente circule en la espira que se representa en la Fig. 7.6 y en la Fig. 7.11, si el circuito tiene una resistencia finita, se disipará cierta energía en el hilo. ¿Quién proporciona esta energía? Para contestarlo, consideremos la fuerza que actúa sobre la corriente en la espira si circula en el sentido indicado por la flecha en la Fig. 7.11. El conductor de la derecha, en el campo $\mathbf{B}_2$ experimentará una fuerza hacia la derecha, mientras la parte opuesta de la espira, en el campo $\mathbf{B}_1$ será empujada hacia la izquierda. Pero $\mathbf{B}_1$ es mayor que $\mathbf{B}_2$, por lo que la fuerza total sobre la espira es hacia la izquierda, *opuesta al movimiento*. Para conservar a la espira en movimiento a celeridad constante, ha de actuar cierto agente exterior y la energía así invertida se presenta eventualmente en forma de calor en el hilo. Imaginemos lo que sucedería si se violara la ley de Lenz o si la fuerza sobre la espira actuará en un sentido que ayudara al movimiento de la espira.

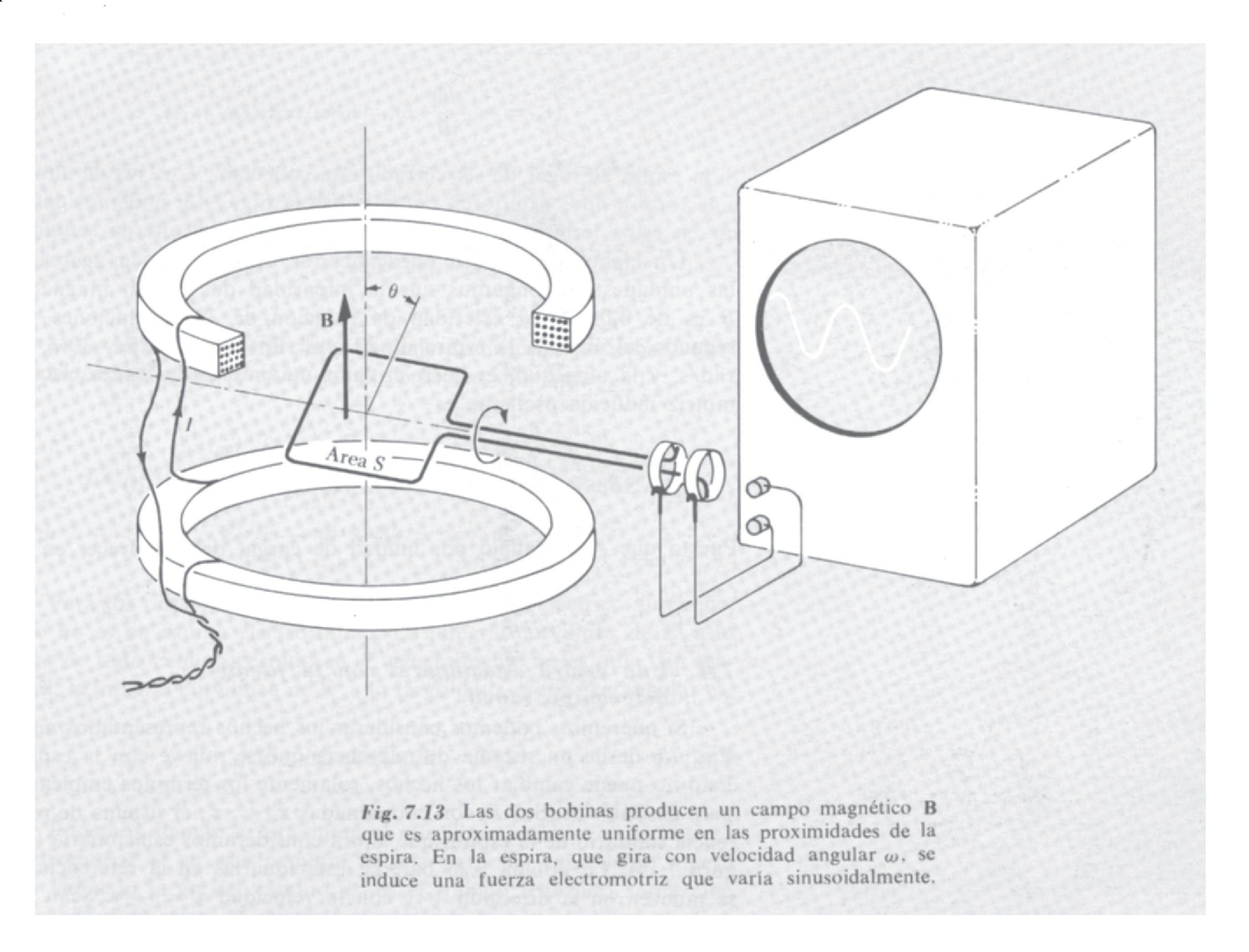


Fig. 7.13 Las dos bobinas producen un campo magnético **B** que es aproximadamente uniforme en las proximidades de la espira. En la espira, que gira con velocidad angular ω, se induce una fuerza electromotriz que varía sinusoidalmente.

Un elemento muy corriente en maquinaria eléctrica y en los instrumentos eléctricos es una espira o bobina que gira en un campo magnético. Vamos a aplicar lo que acabamos de ver al sistema representado en la Fig. 7.13, una simple espira girando a celeridad constante en un campo magnético que es aproximadamente uniforme La parte mecánica esencial, ejes, cojinetes, motor, etc., no se han dibujado. El campo **B** está originado por dos bobinas fijas. Supongamos que la espira gira con velocidad angular constante ω, en radianes/seg. Si su posición en cualquier instante viene determinada por el ángulo θ, entonces $\theta = \omega t + \alpha$, donde la constante α es simplemente la posición de la espira para $t = 0$. La componente de **B** perpendicular al plano de la espira es $B\,sen\,\theta$. Por lo tanto el flujo a través de la espira en el instante t es

$$\Phi(t) = SB \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \tag{19}$$

donde S es el área de la espira. Para la fuerza electromotriz inducida tenemos en este caso:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -SB\omega \cos(\omega t + \alpha) \tag{20}$$

Si la espira en lugar de ser cerrada está conectada a través de anillos colectores a hilos exteriores, como indica la Fig. 7.13, podemos detectar en estos terminales una diferencia de potencial alterna senoidal.

Un ejemplo numérico puede aclarar cualquier duda acerca de las unidades. Supongamos que la intensidad del campo magnético B es de 0,05 T, la celeridad de rotación de 30 revoluciones por segundo, el área de la espira de 80 cm². Entonces $\omega = 2\pi \cdot 30 = 188$ rad/s, y la amplitud, es decir el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida oscilante es

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = \mathrm{S}B\omega = (188\ \mathrm{s}^{-1})\,(8 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2)\,(0{,}05\ \mathrm{T}) = 75{,}39 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V} \tag{21}$$

Puesto que $\mathcal{E}$ es trabajo por unidad de carga, debe aparecer en V.

7.4 *Una espira estacionaria con la fuente del campo móvil*

Si queremos, podemos considerar los hechos representados en la Fig. 7.6 desde un sistema de referencia que se mueve con la espira. Esto no puede cambiar los hechos, solamente los términos empleados para describirlos. Sea F' con coordenadas x', y', z', el sistema de referencia solidario de la espira, que ahora consideramos estacionaria (Figura 7.14). La bobina y la batería, estacionarias en la referencia F, se mueven en la dirección $-y$ con la velocidad $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Sean B'_1 y B'_2 los campos magnéticos medidos en los dos extremos de la espira

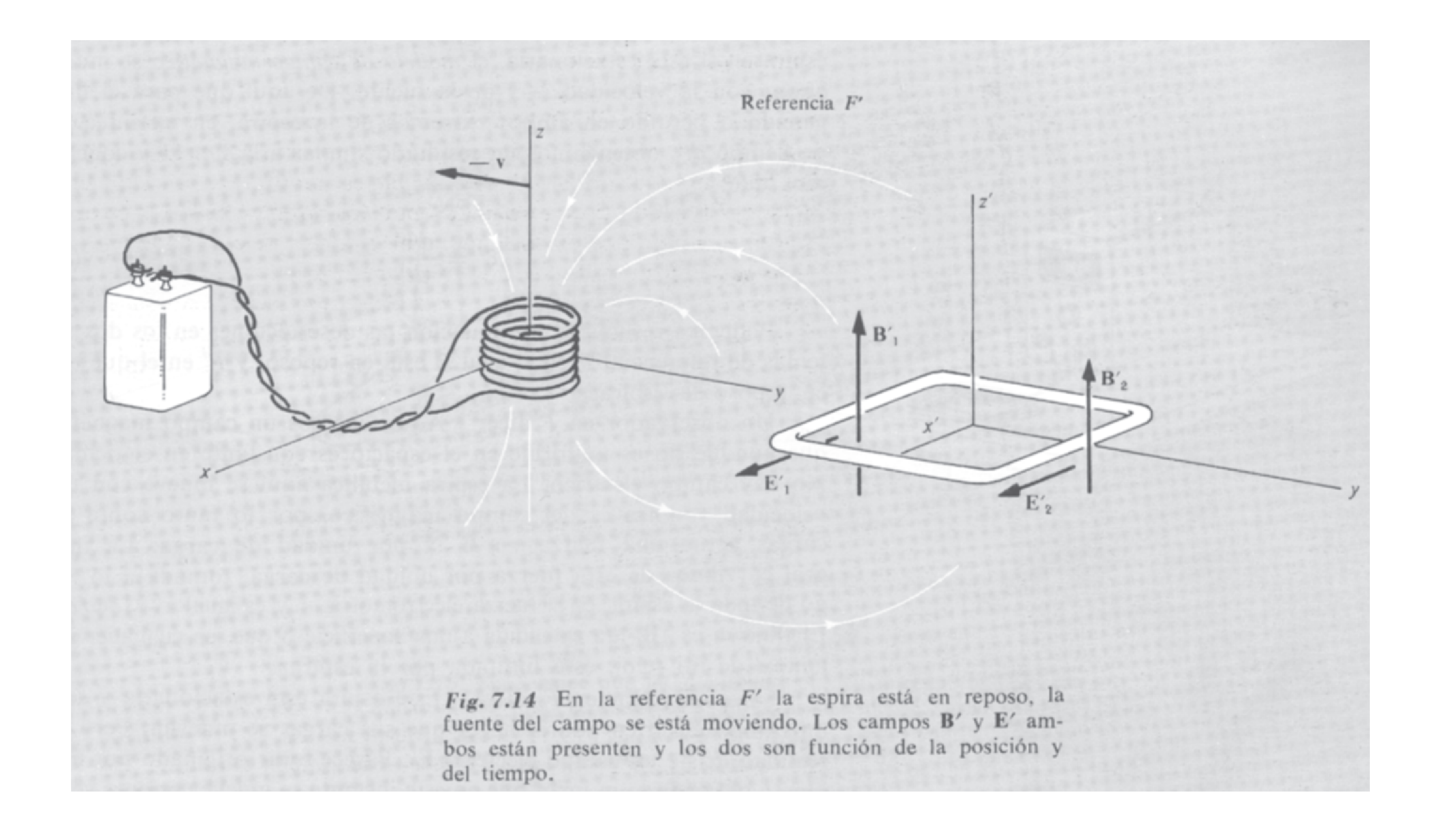


Fig. 7.14 En la referencia F' la espira está en reposo, la fuente del campo se está moviendo. Los campos $\mathbf{B}'$ y $\mathbf{E}'$ ambos están presenten y los dos son función de la posición y del tiempo.

por observadores en F' en cierto instante t'. En estas posiciones existirá un campo eléctrico en F. La Ec. 6.62 nos dice que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1' &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{E}_2' &= -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_2' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2' \end{aligned} \qquad (22)$$

Para los observadores en F' este es un campo eléctrico auténtico, pero no es un campo electrostático. La integral curvilínea de $\mathbf{E}'$ a lo largo de todo camino cerrado en F' generalmente no es nula. En realidad, la integral curvilínea de $\mathbf{E}'$ a lo largo de la espira rectangular es:

$$\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = wv\,(B_1' - B_2') \qquad (23)$$

Podemos llamar a esta integral curvilínea de la Ec. 23, fuerza electromotriz $\mathcal{E}'$ en este camino. Si una partícula cargada se mueve una vez a lo largo del camino, $\mathcal{E}'$ es el trabajo realizado sobre ella, por unidad de carga. $\mathcal{E}'$ está relacionada con la velocidad de variación

del flujo a través de la espira. Para verlo, advirtamos que mientras la espira en sí está estacionaria, el *modelo de campo magnético* se mueve ahora con la velocidad $-\mathbf{v}$ de la fuente. De aquí que para el flujo ganado o perdido en ambos extremos de la espira, en un intervalo de tiempo dt', obtengamos un resultado similar a la Ec. 11 y concluimos que:

$$\mathcal{E}' = \frac{d\Phi'}{dt'} \tag{24}$$

Podemos resumir a continuación las descripciones en los dos sistemas de referencia, F en el cual **B** está en reposo, y F' en el que está en reposo la espira:

Un observador en F dice: « Aquí tenemos un campo magnético que aunque no es uniforme en el espacio es constante en el tiempo. No hay campo eléctrico. La espira metálica aquí se mueve con una velocidad **v** a través del campo magnético, por lo tanto sobre sus cargas actúa una fuerza $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ N por unidad de carga. La integral curvilínea de esta fuerza por unidad de carga, tomada a lo largo de toda la espira, es la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ y es igual a $-(d\Phi/dt)$. El flujo Φ es $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ extendida a una superficie S que, en cualquier instante t de mi reloj, está limitada por la espira».

Un observador en F' dice: « Esta espira está estacionaria y sólo un campo eléctrico podría hacer que sus cargas se muevan. Pero en realidad existe un campo eléctrico $\mathbf{E}'$. Parece estar originado por este objeto parecido a un imán que en este instante se mueve con una velocidad $-\mathbf{v}$, produciendo al mismo tiempo un campo magnético $\mathbf{B}'$ más bien intenso. El campo eléctrico es tal que $\int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}'$ a lo largo de esta espira estacionaria no es nula, sino igual a la velocidad de variación del flujo a través de la espira, $d\Phi'/dt'$. El flujo Φ'es $\int \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ extendida a una superficie limitada por la espira, los valores de $\mathbf{B}'$ están medidos sobre esta superficie en un instante dado t' de mi reloj ».

Nuestras conclusiones hasta aquí son relativísticamente exactas. Se cumplen para cualquier celeridad $v \leqq c$ siempre que observemos escrupulosamente las distinciones entre **B** y $\mathbf{B}'$, t y t', etc. Si $v \ll c$, de manera que v^2/c^2 pueda despreciarse, $\mathbf{B}'$ será prácticamente igual a **B**, y podemos ignorar también, sin temor, la distinción entre t y t'.

7.5 *Una ley universal de la inducción*

Vamos a llevar a cabo tres experimentos con los aparatos representados en la Fig. 7.15. Las mesas están sobre ruedas, de manera que puedan moverse fácilmente. Se ha conectado un galvanómetro a nuestra vieja espira rectangular, y para acrecentar toda fuerza electromotriz inducida, ponemos varias vueltas de hilo en la bobina en vez de una. Aunque, francamente, nuestra sensibilidad podría aun ser marginal, con la débil fuente de campo magnético representada. Qui-

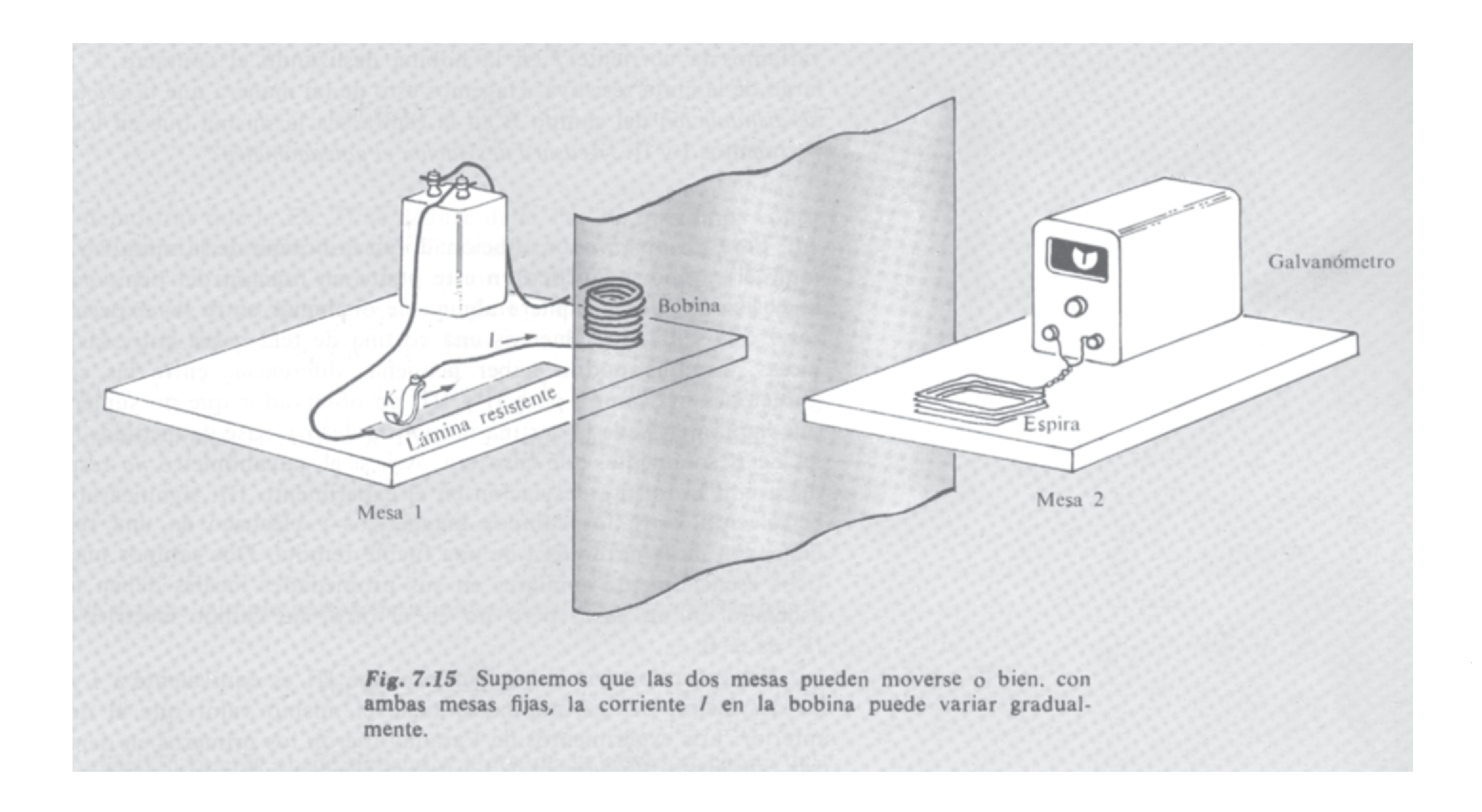


Fig. 7.15 Suponemos que las dos mesas pueden moverse o bien. con ambas mesas fijas, la corriente *I* en la bobina puede variar gradualmente.

zás pueda montarse una versión más práctica del experimento en el laboratorio.

Experimento I. Con corriente constante en la bobina y la mesa 1 estacionaria, se mueve la mesa 2 hacia la derecha con celeridad v. El *galvanómetro se desvía*. No nos sorprende; ya hemos analizado este hecho en la Sec. 7.3.

Experimento II. Con corriente constante en la bobina y la mesa 2 estacionaria, se mueve la mesa 1 hacia la izquierda con celeridad v. *El galvanómetro se desvía*. Esto tampoco nos sorprende. Ya hemos discutido la equivalencia de los experimentos I y II, una equivalencia que es un ejemplo de la invariancia de Lorentz, o para pequeñas celeridades de nuestras mesas, de invariancia galileana. Sabemos que en ambos casos la desviación del galvanómentro puede relacionarse con la velocidad de variación del flujo de **B** a través de la espira.

Experimento III. Ambas mesas permanecen en reposo, pero variamos la corriente I en la bobina deslizando el contacto K a lo largo de la cinta resistiva. Hacemos esto de tal manera que la *velocidad de disminución* del campo **B** en la espira sea la misma que en los experimentos I y II. *¿Acusará desviación el galvanómetro?*

Para un observador estacionado en la bobina de la mesa 2 y que mide el campo magnético en este punto en función del tiempo y de la posición, no hay manera alguna de distinguir entre los experimentos I , II y III. Imaginemos una cortina de tela negra entre las dos mesas. Aunque podría haber pequeñas diferencias entre las configuraciones del campo para II y III, un observador que no supiera lo que había detrás de la cortina no podría decir a base de medidas locales de **B** solamente, qué caso era. Así, si el galvanómetro *no* respondiera con la misma desviación en el experimento III, significaría que la relación entre los campos magnéticos y eléctrico en una región dependen de la naturaleza de una fuente remota. Dos campos magnéticos esencialmente similares en sus propiedades locales deben tener asociado en un caso, pero no en el otro, un campo eléctrico con $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$.

Encontramos por el experimento que III es equivalente a I y II. La desviación del galvanómetro tiene el mismo valor que el de la anterior. Los experimentos de Faraday fueron los primeros en demostrar este hecho fundamental. La fuerza electromotriz que observamos depende solamente de la velocidad de variación del flujo de **B** y de nada más. Podemos establecer como una relación universal la ley de la inducción de Faraday:

> Si C es una curva cerrada, estacionaria en las coordenadas x, y, z, si S es una superficie limitada por C, y $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ es el campo magnético medido en x, y, z, en el instante t, entonces
>
> $$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{25}$$

Usando el operador vectorial rotacional, podemos expresar esta ley en forma diferencial. Si la relación

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{26}$$

es cierta para *toda* curva C que limite la superficie S, como nuestra

ley afirma, se deduce que en todo punto

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{27}$$

Para demostrar que la Ec. 27 se deduce de la Ec. 26, operamos como se acostumbra, haciendo decrecer C alrededor de un punto, que suponemos no es singular para la función **B**. Entonces, en el límite, la variación de **B** en la pequeña superficie **a** que limita C será despreciable y la integral de superficie tenderá a $\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}$. Ahora bien, por definición (Ec. 2.76), el límite a que tiende $\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ cuando la porción de superficie tiende a cero es $\mathbf{a}\cdot\text{rot } \mathbf{E}$. Así que, en el límite, tenemos

$$\mathbf{a}\cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\left(-\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \tag{28}$$

Ya que esto se cumple para *toda* **a** infinitésima, debe cumplirse que *

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{29}$$

Reconociendo que **B** puede depender tanto de la posición como del tiempo, escribiremos $\partial\mathbf{B}/\partial t$ en lugar de $d\mathbf{B}/dt$. Tenemos entonces estas dos proposiciones, completamente equivalentes, de la ley de la inducción:

$$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$$

o

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{30}$$

Aquí **E** viene en volts, **B** en tesla, $d\mathbf{s}$ y $d\mathbf{a}$ están en metros y m^2, respectivamente, con t en segundos. La fuerza electromotriz $\mathcal{E} = \int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ vendrá dada en volts.

El flujo magnético Φ, que es $\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$, se expresaría en tesla · m². A esta unidad se le asigna un nombre propio, el *weber* (wb).

---

* Si esto no es evidente, nótese que escogiendo a en la dirección x estableceremos que $(\text{rot } \mathbf{E})_x = \frac{dB_x}{dt}$, y así sucesivamente.

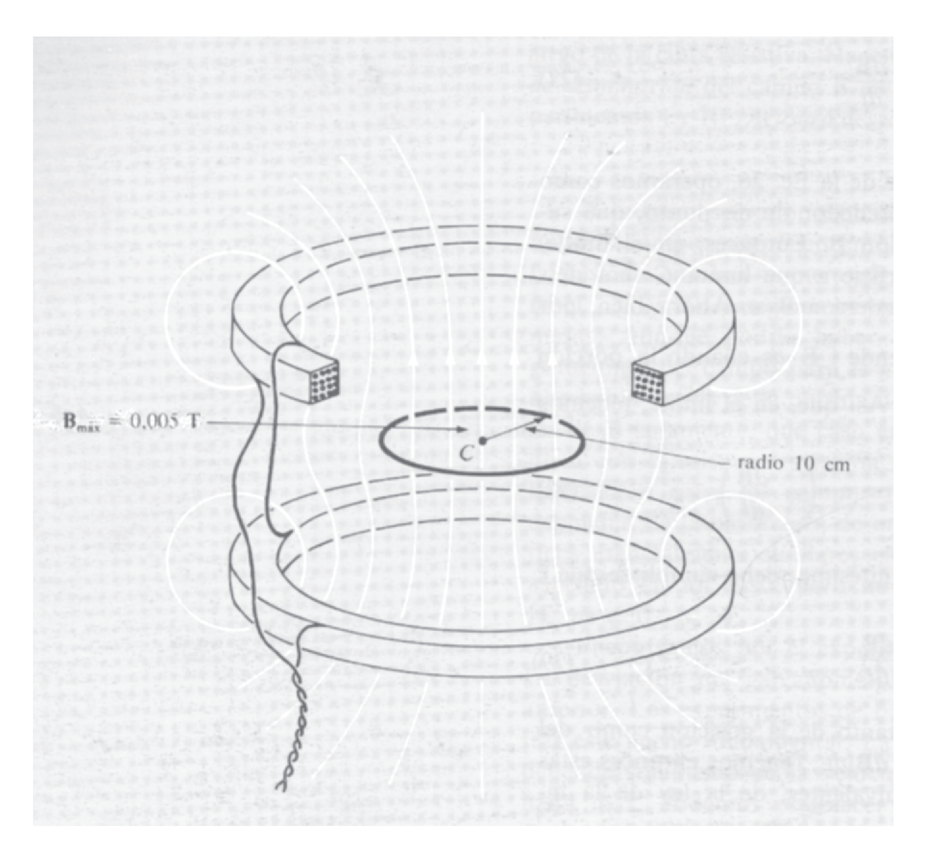


Fig. 7.16 La corriente alterna en las bobinas produce un campo magnético que en el centro oscila entre 0,005 T hacia arriba y 0,005 T hacia abajo. En cierto instante el campo es aproximadamente uniforme dentro del círculo *C*.

La expresión diferencial, rot $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, presenta tal vez más fácilmente el punto a que queríamos llegar antes acerca de la naturaleza local de las relaciones de los campos. La variación de **B** en el tiempo en un entorno determina completamente rot **E** en el mismo — nada más importa. Por descontado que esto no nos determina completamente **E**. Podríamos superponerle cualquier campo electrostático con rot $\mathbf{E} = 0$ sin afectar en nada esta relación.

Como ejemplo concreto, supongamos bobinas como las de la Figura 7.13 que se alimentan con corriente alterna de 60 ciclos/seg, en lugar de corriente continua. La corriente y el campo magnético varían como sen $(2\pi \cdot 60 \cdot t) =$ sen $377t$. Supongamos que la amplitud de la corriente es tal que el campo magnético **B** en la región central alcanza un valor máximo de 0,005 T. Queremos investigar el campo eléctrico inducido, y la fuerza electromotriz inducida, en un camino circular de 10 cm de radio representado en la Fig. 7.16. Podemos suponer que el campo magnético **B** es prácticamente uniforme en el interior de este círculo, en cierto instante.

$$\mathbf{B} = 50 \text{ sen } 377t \tag{32}$$

B dado en tesla y t en segundos. El flujo a través de la espira C es

$$\begin{aligned} \Phi &= \pi r^2 \mathbf{B} = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}005 \text{ sen } 377t = \\ &= 1{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ sen } 377t \text{ Tm}^2 \text{ (wb)} \end{aligned} \tag{33}$$

Utilizando la Ec. 31 para calcular la fuerza electromotriz,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -1{,}57 \cdot 377 \cdot 10^{-4} \cos 377t \\ &= -0{,}059 \cos 377t \qquad \text{(volt)} \end{aligned} \tag{34}$$

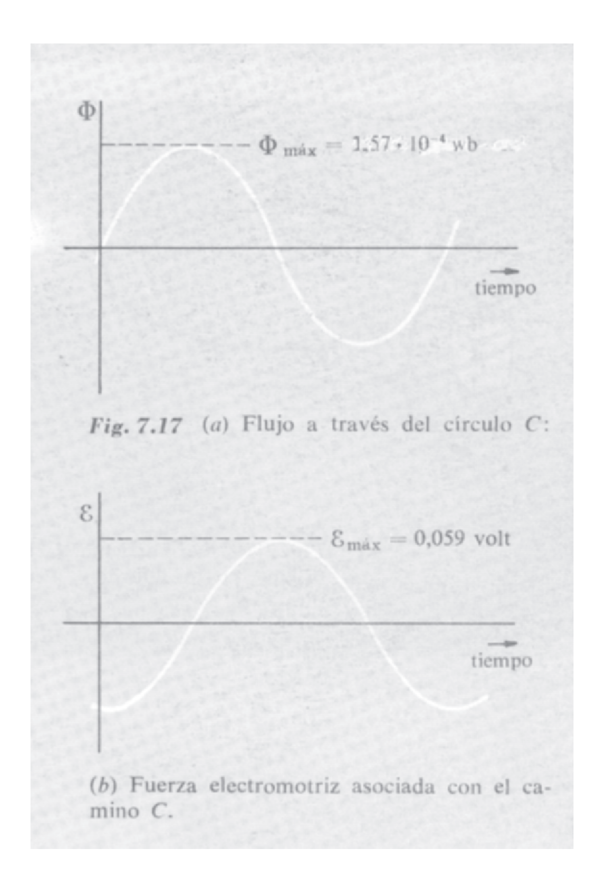


Fig. 7.17 (*a*) Flujo a través del círculo C:

(*b*) Fuerza electromotriz asociada con el camino C.

El máximo alcanzado por $\mathcal{E}$ es 59 milivolt. El signo menos nos afirma que se respeta la ley de Lenz, si hemos definido los sentidos de manera correcta. La variación de Φ y de $\mathcal{E}$ con el tiempo pueden verse en la Fig. 7.17.

¿Qué hay del campo eléctrico? Normalmente no podemos deducir **E** del valor de rot **E** solamente. Sin embargo, nuestro camino C aquí es una circunferencia en torno al centro de un sistema simétrico. *Si no hay ningún otro* campo eléctrico en los alrededores, podemos suponer que en la circunferencia C, **E** está en su plano y tiene módulo constante. A partir de aquí es una cosa trivial predecir su módulo, puesto que $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 2\pi r E = \mathcal{E}$, la cual ya hemos calculado. En este caso, el campo eléctrico en la circunferencia, en un instante dado, será parecido al de la Fig. 7.18*a*. Pero si hay otras fuentes de campo eléctrico parecería completamente distinto. Si hubiera una carga positiva y otra negativa, situadas en el eje, como puede verse en la Fig. 7.18*b*, el campo eléctrico en las inmediaciones de la circunferencia sería la superposición del campo electrostático de las dos cargas y del campo eléctrico inducido.

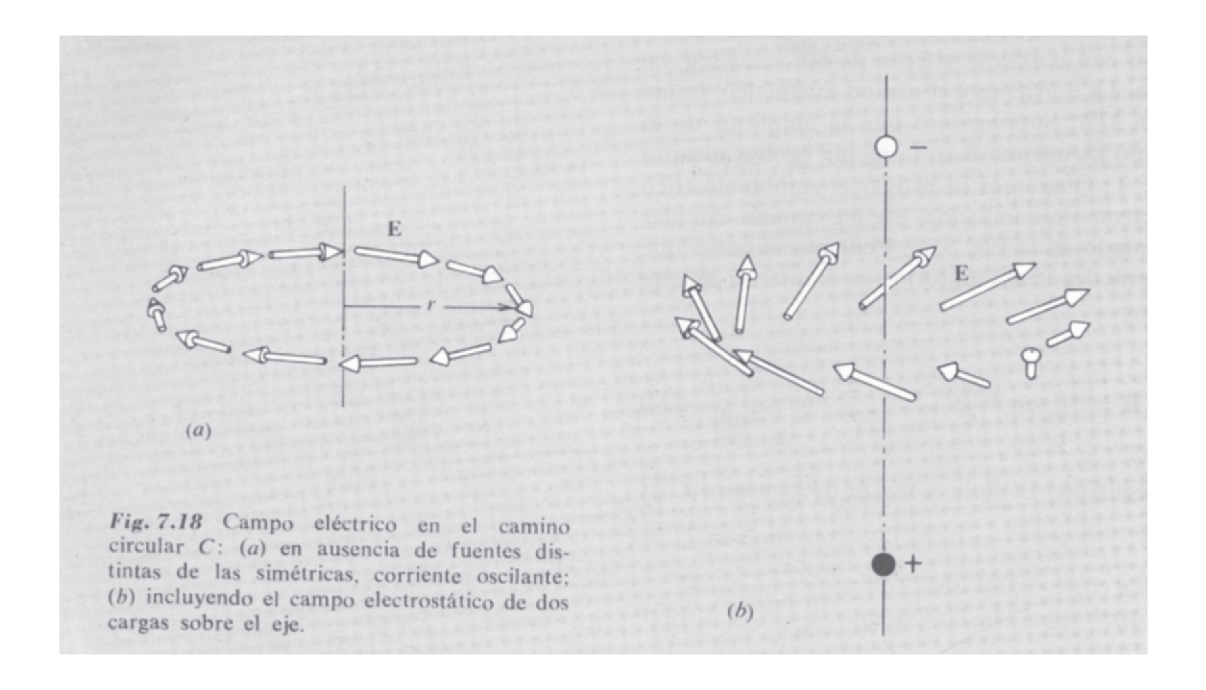


Fig. 7.18 Campo eléctrico en el camino circular C: (*a*) en ausencia de fuentes distintas de las simétricas, corriente oscilante; (*b*) incluyendo el campo electrostático de dos cargas sobre el eje.

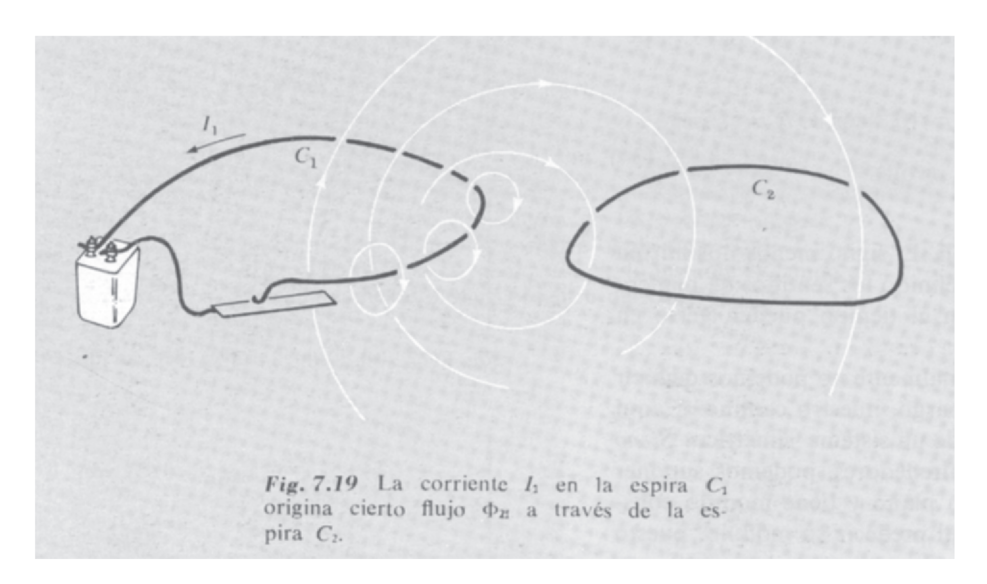


Fig. 7.19 La corriente I_1 en la espira C_1 origina cierto flujo Φ_{21} a través de la espira C_2.

7.6 *Inducción mutua*

Se fijan dos circuitos, o espiras, C_1 y C_2 en una posición relativa mutua determinada (Fig. 7.19). De alguna manera, tal como con una batería y una resistencia variable, se hace circular una corriente controlable I_1 en el circuito C_1. Sea $\mathbf{B}_1(x, y, z)$ el campo magnético que existiría si la corriente en C_1 permaneciese constante en el valor I_1

y sea Φ_{21} el flujo de $\mathbf{B}_1$ a través del circuito C_2. Así que,

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \tag{35}$$

donde S_2 es una superficie limitada por C_2. Con la forma y la posición de los dos circuitos fijos Φ_{21} será proporcional a I_1;

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{const} \tag{36}$$

Supongamos ahora que I_1 varía con el tiempo, pero la variación es *suficientemente lenta* para que el campo $\mathbf{B}_1$ en cualquier punto en las proximidades de C_2 y la corriente I_1 en C_1, en el mismo instante, estén en la misma relación que estarían si fuesen corrientes estacionarias. (Para ver el por qué de tal restricción, imagínese que C_1 y C_2 están separados 10 metros y hacemos que la corriente en C_1 se duplique en 10 nanosegundos.) El flujo Φ_{21} variará proporcionalmente a la variación de I_1. Habrá una fuerza electromotriz inducida en el circuito C_2 de valor

$$\mathcal{E}_{21} = -\ \text{const}\ \frac{dI_1}{dt} \tag{37}$$

Aquí la constante es la misma que en la Ec. 36. Vamos a llamarla M_{21}, y a escribir la Ec. 37 de esta manera:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{38}$$

A esta constante M_{21} la llamamos coeficiente de *inducción mutua*. Su valor viene determinado por la geometría de la disposición de las espiras. Las unidades dependerán, por supuesto, de nuestra elección de las unidades para $\mathcal{E}$, I y t. En el sistema *SI*, con $\mathcal{E}_{21}$ en volt e I_1 en ampere, M viene dado en *henry* *. Esto es, la inducción mutua M_{21} es de un henry si una corriente I_1 variando en un ampere/seg induce una fuerza electromotriz de un volt en el circuito C_2.

Como ejemplo, consideremos el circuito de la Fig. 7.20, dos anillos coplanarios concéntricos, un pequeño anillo C_2 y uno mucho

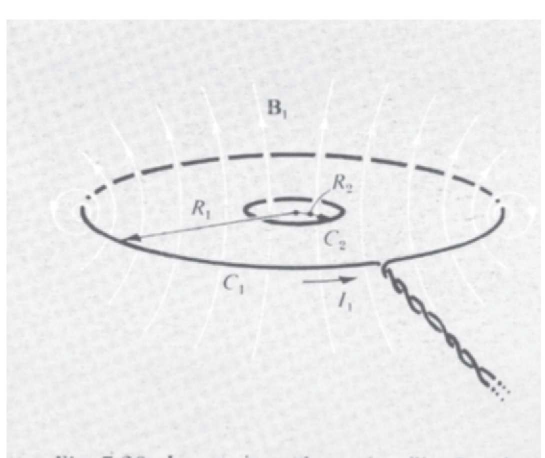


Fig. 7.20 La corriente I_1 en el anillo C_1 origina un campo $\mathbf{B}_1$ que es aproximadamente uniforme en la región del pequeño anillo C_2.

* La unidad se llama así, en honor a José Henry (1797-1878), el más famoso físico americano de aquel tiempo. La inducción electromagnética fue descubierta independientemente por Henry, prácticamente al mismo tiempo que los experimentos de Faraday. Henry fue el primero en reconocer el fenómeno de la autoinducción. Desarrolló el electroimán, el prototipo de motor eléctrico, inventó el relé eléctrico, y casi la telegrafía.

mayor C_1. ¿Cuál es M_{21} en este caso? En el centro de C_1, al circular I_1, el campo B_1 viene dado por

$$B_1 = \frac{2\pi I_1}{R_1} \tag{39}$$

con I_1 en A, B_1 en tesla. (Si no se recuerda cómo hallar el campo en el centro del anillo de corriente, repásese el párrafo al principio de la Sec. 6.5 que conduce a la Ec. 6.42.) Supongamos $R_2 \ll R_1$ para que podamos despreciar la variación de B_1 en el interior del anillo pequeño. Entonces el flujo a través del anillo pequeño vale

$$\Phi_{21} = (\pi R_2{}^2)\frac{2\pi I_1}{R_1} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2{}^2}{R_1} \tag{40}$$

Así que la « constante » de la Ec. 36, en este caso particular tendrá el valor $2\pi^2R_2^2/R_1$ y la fuerza electromotriz inducida en C_2 será

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{2\pi^2 R_2{}^2}{R_1} \cdot \frac{dI_1}{dt} \tag{41}$$

con $\mathcal{E}_{21}$ en V e I_1 en A.
Así que el valor de M_{21} en henry, con R_2 y R_1 en centímetros, es

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \tag{43}$$

El signo menos que hemos ido arrastrando, no nos dice gran cosa, ahora bien, si queremos estar seguros de cuál es el sentido en que la fuerza electromotriz tiende a dirigir la corriente en C_2, la guía más segura es la ley de Lenz.

Si el circuito C_1 consiste de N_1 vueltas de hilo, en lugar de un anillo único, el campo B_1 en el centro sería N_1 veces más intenso para una intensidad dada I_1. Si la espira C_2 consta de N_2 vueltas, todas del mismo radio R_2, la fuerza electromotriz de cada vuelta se sumará a la de la siguiente, haciendo que la fuerza electromotriz total en este circuito sea N_2 veces mayor que la de una espira única. Así, para *múltiples vueltas* en cada bobina, la inducción mutua viene dada por

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 N_1 N_2 R_2^2}{R_1} \tag{44}$$

Esto supone que las espiras de cada bobina estén completamente en contacto, siendo la sección recta del manojo pequeña comparada con el radio de la bobina. Sin embargo, la inducción mutua M_{21} tiene un significado bien definido para dos circuitos de cualquier forma y disposición. Es la relación de la fuerza electromotriz en volt en el circuito 2, debida a la variación de la corriente en el circuito 1, a la variación con el tiempo de la corriente I_1 en ampere/seg. Es decir,

$$M_{21} = \frac{\mathcal{E}_{21}}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)} \tag{45}$$

M_{21} estará en henrys, si $\mathcal{E}_{21}$ está en volts y $\frac{dI_1}{dt}$ en amp/s.

7.7 *Un teorema de «reciprocidad»*

Al considerar los circuitos C_1 y C_2 podríamos habernos preguntado acerca de la fuerza electromotriz inducida en el circuito C_2 por una variación de corriente en el circuito C_1. Esto significaría otro coeficiente de inducción mutua M_{12}:

$$M_{12} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{\left(\frac{dI_2}{dt}\right)} \tag{46}$$

Es un hecho notable que para los dos circuitos, *sean cuales fueren*,

$$M_{12} = M_{21} \tag{47}$$

Esto no es debido a la simetría geométrica. Incluso el ejemplo simple de la Fig. 7.20 no es simétrico con respecto a los dos circuitos. Véase que R_1 y R_2 entran de manera diferente en la expresión de M_{21}; la Ec. 47 afirma que, para estos dos circuitos desiguales, si

$$M_{21} = \frac{2\pi^2 N_1 N_2 R_2^2}{R_1}, \quad \text{entonces también} \quad M_{12} = \frac{2\pi^2 N_1 N_2 R_2^2}{R_1}$$

y *no* lo que habríamos obtenido por la conexión de 1 y de 2 en cualquier parte.

Para demostrar el teorema, Ec. 47, debemos demostrar que el flujo Φ_{12} a través de cierto circuito C_1 como resultado de una corriente I en un circuito C_2 es igual que el flujo Φ_{21} que atraviesa el circuito 2 cuando circula en el circuito C_1 una corriente *I igual* que la anterior. Para demostrar esto, utilizamos el potencial vector.

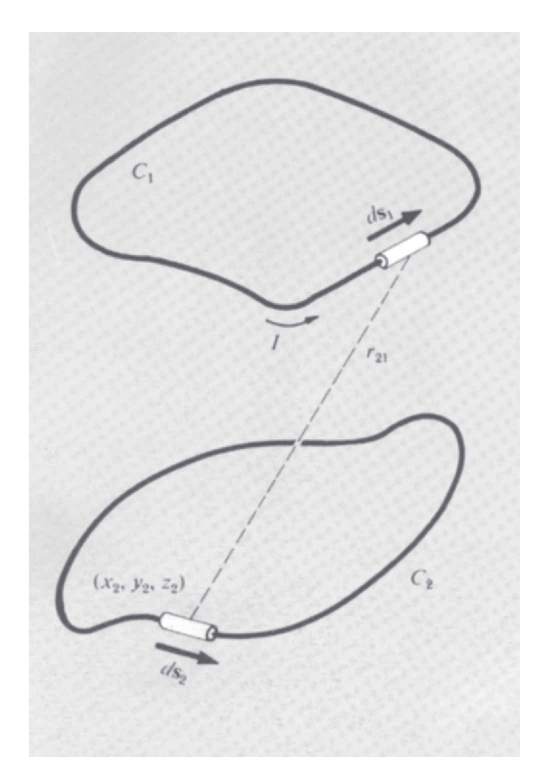


Fig. 7.21 Cálculo del flujo Φ_{21} que pasa a través de C_2 debido a la corriente I que circula en C_1.

Según el teorema de Stokes:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\text{ rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \tag{48}$$

En particular, si $\mathbf{A}$ es el potencial vector de un campo magnético $\mathbf{B}$, es decir, si $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, tenemos

$$\boxed{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi_S} \tag{49}$$

Es decir, la integral curvilínea del potencial vector a lo largo de una espira es igual al flujo de $\mathbf{B}$ *a través de la espira.*

Ahora bien, el potencial vector está relacionado con su fuente, la corriente, como sigue, según la Ec. 6.35:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \tag{50}$$

$\mathbf{A}_{21}$ es el potencial vector en cierto punto (x_2, y_2, z_2), del campo magnético creado por la corriente I circulando por el circuito C_1; $d\mathbf{s}_1$ es un elemento de la espira C_1; y r_{21} es el valor de la distancia de este elemento al punto (x_2, y_2, z_2).

La Fig. 7.21 muestra las dos espiras C_1 y C_2, con una corriente I que circula por C_1. Sea (x_2, y_2, z_2) un punto de la espira C_2. De este modo el flujo a través de C_2 debido a la corriente I en C_1 es:

$$\Phi_{21} = \int_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_2} d\mathbf{s}_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{r_{21}} \tag{51}$$

De manera parecida al flujo a través de C_1 debido a la corriente I que circula por C_2 vendrá dada por

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} d\mathbf{s}_1 \cdot \int_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \tag{52}$$

Ahora bien, $r_{12} = r_{21}$, puesto que son valores de distancia, no vectores. El significado de cada una de las integrales anteriores es: Tómese el producto escalar de un par de elementos de línea, uno de cada espira, divídase por la distancia entre ellos, y súmese para todos ellos. La única diferencia entre la Ec. 51 y la Ec. 52 es el *orden* en el que se llevan a cabo estas operaciones, y no puede afectar la suma final. Por lo tanto $\Phi_{12} = \Phi_{21}$, de lo que se deduce directamente que $M_{12} = M_{21}$. Gracias a este teorema no debemos hacer distinción entre M_{12} y M_{21}. Podemos hablar, de ahora en adelante, de la inducción mutua M de dos circuitos.

A los teoremas de este tipo se les llama a menudo teoremas de « reciprocidad ». Existen otros teoremas de reciprocidad en circuitos eléctricos no del todo desligados de éste. Esto nos puede traer a la memoria la relación $C_{jk} = C_{kj}$ mencionada en la Sec. 3.6 y tratada en el problema 3.27. Una relación de reciprocidad, normalmente,

expresa cierta ley general de simetría, que no es evidente en la estructura superficial del sistema. Encontraremos una ley de reciprocidad extremadamente amplia, y desde cierto punto de vista, sorprendente, al estudiar la transmisión de las ondas electromagnéticas.

7.8 Autoinducción

Cuando la corriente I_1 varía, hay una variación del flujo a través del propio circuito C_1, en consecuencia se induce una fuerza electromotriz. La llamamos $\mathcal{E}_{11}$. La ley de la inducción se cumple, sea cual fuere la fuente del flujo:

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} \tag{53}$$

en donde Φ_{11} es el flujo a través del circuito 1 del campo B_1 debido a la corriente I_1 en el circuito 1. El signo menos expresa el hecho que la fuerza electromotriz está siempre dirigida para *oponerse* a la *variación* de corriente en el circuito — la ley de Lenz otra vez. Puesto que Φ_{11} será proporcional a I_1 podemos escribir

$$\mathcal{E}_{11} = -L_1\frac{dI_1}{dt} \tag{54}$$

A la constante L_1 se le llama la *autoinducción* del circuito.

Como *ejemplo* de un circuito en el que se puede calcular L_1, consideremos la bobina toroidal rectangular del Prob. 6.14, representada de nuevo en la Fig. 7.22. Encontraremos (al resolver el problema) que si una corriente I circula en la bobina de N vueltas produce un campo, cuya intensidad a una distancia r del eje de la bobina vale $\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$. El flujo total a través de una espira de la bobina es la integral de este campo extendida a la sección recta de la bobina:

$$\Phi\ (\text{una vuelta}) = h\int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{NI}{r}\,dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{55}$$

El flujo que atraviesa el circuito de N vueltas es N veces mayor:

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi}N^2Ih\ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{56}$$

De aquí, la fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}$ es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi}N^2\,h\ \ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt} \tag{57}$$

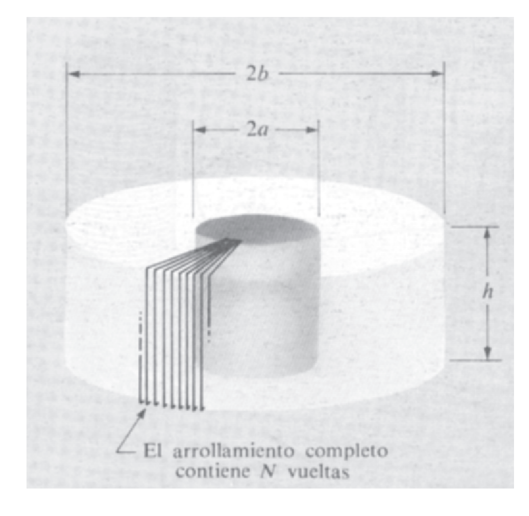


Fig. 7.22 Bobina toroidal de sección recta rectangular. Se muestran solamente unas cuantas vueltas.

Luego la autoinducción de esta bobina viene dada por

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{58}$$

Puede pensarse que uno de los anillos antes considerado, habría sido un ejemplo más simple para ilustrar el cálculo de la autoinducción. Sin embargo, si tratamos de calcular la inductancia de una espira simple de hilo, nos encontramos con una dificultad desconcertante. Parece buena idea simplificar el problema suponiendo que el diámetro del hilo es nulo. Pero pronto vemos que si por el filamento de diámetro nulo circula una corriente finita, el flujo que atraviesa una espira de tal filamento, es infinito. El motivo es que el campo B, en las proximidades del filamento de corriente varía como $1/r$ siendo r la distancia al filamento, y la integral de $B \times$ *área* diverge como $\int(dr/r)$ cuando la extendemos a $r = 0$. Para evitarlo podemos hacer que el radio del hilo sea finito, no nulo, lo que de todos modos es más real. Esto puede hacer el cálculo un poco más complicado, en un caso dado, pero no nos preocupa. La dificultad real es que las diferentes partes del hilo aparecen como circuitos *diferentes*, asociados a cantidades de flujo distintas Ya no estamos seguros de lo que quiere decir *el* flujo a través *del* circuito. De hecho, a causa de que la fuerza electromotriz es diferente en las distintas espiras filamentarias en las que puede dividirse el circuito, debe tener lugar alguna *redistribución* de densidad de corriente cuando circulan por el anillo corrientes que varían muy rápidamente. De aquí que la inductancia del circuito puede depender tal vez de la rapidez de variación de I, y por consiguiente no ser estrictamente constante como implicaría la Ec. 54.

Este inconveniente se evitó en la bobina toroidal del ejemplo, despreciando el campo en la inmediata proximidad de las vueltas individuales del arrollamiento. La mayor parte del flujo *no* pasa a través de los mismos hilos, y cuando esto ocurra, el efecto que nos ha estado preocupando, no será importante.

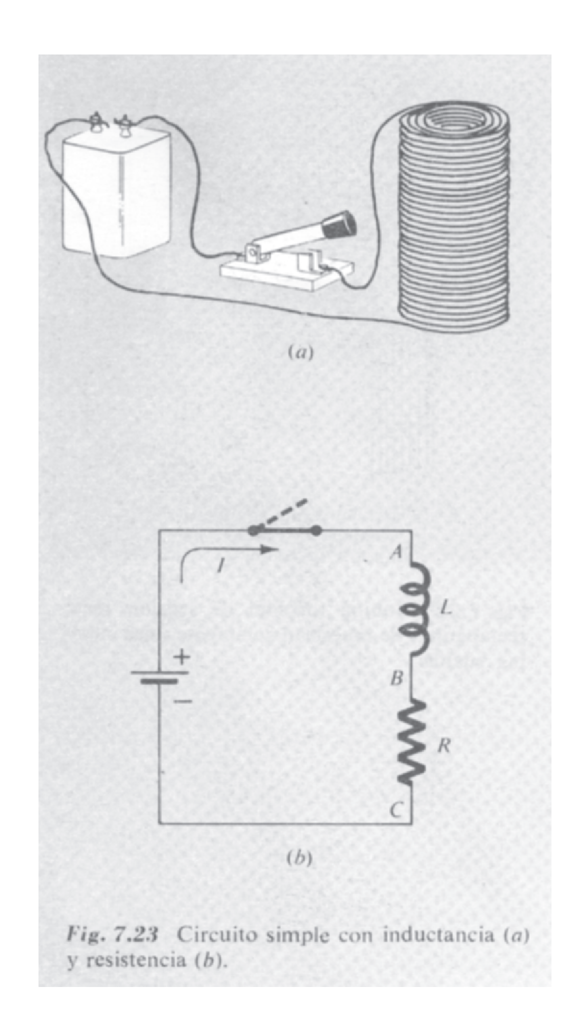


Fig. 7.23 Circuito simple con inductancia (*a*) y resistencia (*b*).

7.9 Un circuito que contiene autoinducción

Supongamos que conectamos una batería con una fuerza electromotriz $\mathcal{E}_0$ a una bobina o *inductancia*, con una autoinducción L, como en la Fig. 7.23*a*. La propia bobina, los hilos de conexión e incluso la batería tendrán cierta resistencia. No nos preocupamos de cómo está distribuida en el sistema. Se puede agrupar en una sola resistencia R, indica en el diagrama del circuito de la Fig. 7.23*b* por un símbolo de resistencia con este valor. El resto del circuito, especialmente los hilos de conexión, también contribuye un poco a la autoinducción de todo el circuito; la supondremos incluida en L. En otras palabras, la Figura 23*b* representa una idealización del circuito físico: la inductancia L, simbolizada por ⌇ no tiene resistencia; la resistencia R no tiene inductancia. Este es el circuito ideal que vamos a analizar.

Si la corriente I está variando con el tiempo a razón de dI/dt se inducirá una fuerza electromotriz $L\,dI/dt$, en un sentido que se oponga a la variación. Existe también la fuerza electromotriz constante $\mathcal{E}_0$ de la batería. Si definimos el sentido positivo de la corriente como el que la batería tiende a dirigir la corriente a lo largo del circuito, la fuerza electromotriz total en un instante es $\mathcal{E}_0 - L\,dI/dt$. Ésta hace circular la corriente I a través de la resistencia. Es decir,

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI \tag{60}$$

También lo podemos explicar de la siguiente manera: La diferencia de potencial entre los puntos A y B, a la que llamaremos *caída de tensión en el inductor*, es $L\,dI/dt$, con la parte superior del inductor positiva si I está *aumentadando* en el sentido indicado. La diferencia de potencial entre B y C, la caída de tensión en la resistencia, es RI, siendo positivo el extremo superior de la resistencia. Por lo tanto, la suma de la caída de tensión en el inductor y en la resistencia vale $L\,dI/dt + RI$. Esto es lo mismo que la diferencia de potencial entre los terminales de la batería, la cual es $\mathcal{E}_0$ (nuestra batería ideal no tiene resistencia interna). Así que

$$\mathcal{E}_0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{61}$$

que simplemente es una nueva expresión de la Ec. 60.

Antes de considerar la solución matemática de la Ec. 60, vamos a ver lo que debería ocurrir en el circuito si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$. Antes de cerrar el interruptor, necesariamente $I = 0$. Mucho tiempo después de haber cerrado el interruptor, deberá alcanzarse un estado estacionario, con una corriente prácticamente constante, con cierto valor I_0. En aquel instante y a partir del mismo $dI/dt \approx 0$, y la Ec. 60 se reduce a

$$\mathcal{E}_0 = RI_0 \tag{62}$$

La transición desde una corriente nula a un estado estacionario de corriente I_0 no puede ocurrir bruscamente en el instante $t = 0$, pues entonces dI/dt sería infinita. De hecho, inmediatamente después de $t = 0$, la corriente I será tan pequeña que el segundo miembro, RI, de la Ec. 60 puede despreciarse, dando

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \tag{63}$$

La inductancia L limita la velocidad de crecimiento de la corriente.

Lo que sabemos está resumido en la Fig. 7.24*a*. Sólo falta hallar cómo tiene lugar la completa variación. La Ec. 60 es una ecuación diferencial muy parecida a la Ec. 29 del Capítulo 4. Sin más pode-

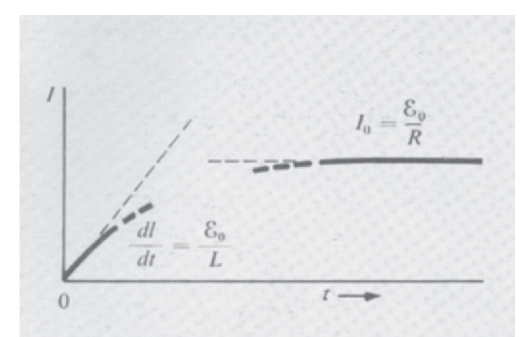
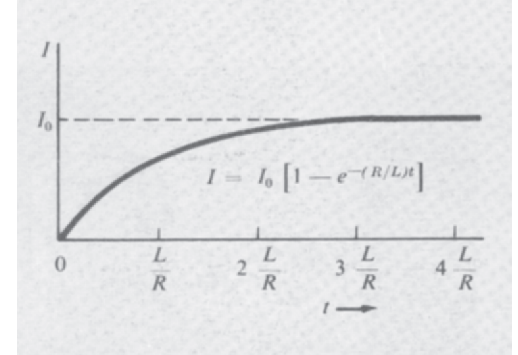


Fig. 7.24 (*a*) Cómo debe comportarse inicialmente la corriente, y después de transcurrido largo tiempo.



(*b*) Variación completa de la corriente con el tiempo en el circuito de la Fig. 7.23.

mos escribir una solución de la Ec. 60 que satisfaga a la condición inicial, $I = 0$ para $t = 0$.

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{64}$$

La gráfica de la Fig. 7.24*b* indica que la corriente tiende a su valor asintótico I_0 exponencialmente. La « constante de tiempo » de este circuito es la cantidad L/R. Si L se mide en henry y R en ohm, aquélla viene dada en segundos, ya que henry $\sim$ volt/(ampere/seg), y ohm $\sim$ volt/ampere.

¿Qué ocurre si abrimos el interruptor después que se ha establecido la corriente I_0, forzando así a que la corriente caiga bruscamente a cero? Esto haría al término $L\,dI/dt$ negativamente infinito. La catástrofe puede ser más que matemática. Algunas personas han muerto al abrir un interruptor en circuitos altamente inductivos. Lo que sucede generalmente es que una tensión inducida muy elevada, produce una chispa o arco a través de los contactos del interruptor abierto, de manera que la corriente continúa a pesar de todo. En lugar de esto, quitemos la batería del circuito, cortocircuitando la combinación RL, como en la Fig. 7.25*a*, desconectando al mismo tiempo la batería. Tenemos ahora un circuito determinado por la ecuación

$$0 = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{65}$$

con la condición inicial $I = I_0$ para $t = t_1$, donde t_1 es el instante en el que se cortocircuitó el circuito. La solución es la función exponencial decreciente:

$$I = I_0 e^{-(R/L)(t-t_1)} \tag{66}$$

con la misma constante de tiempo característica L/R que antes.

7.10 *Energía almacenada en el campo magnético*

Durante la disminución de la corriente descrita por la Ec. 66 y la Fig. 7.25*b*, en la resistencia R se disipa energía. Puesto que la energía dU disipada en un intervalo de tiempo pequeño dt vale RI^2dt, la energía total disipada después de cerrar el interruptor en el instante t_1 debe ser;

$$U = \int_{t_1}^{\infty} RI^2\,dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0{}^2 e^{-(2R/L)(t-t_1)}\,dt \tag{67}$$

Efectuando el cambio $x = 2R(t - t_1)/L$ la integral se calcula fácilmente:

$$U = RI_0^2\left(\frac{L}{2R}\right)\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \tfrac{1}{2}LI_0^2 \qquad (68)$$

La fuente de esta energía era el inductor con su campo magnético. En realidad, la batería ha efectuado exactamente este trabajo para establecer la corriente en el primer caso — en y por encima de la energía disipada por la resistencia entre $t = 0$ y $t = t_1$, que también fue suministrada por la batería. Para ver que esto es una relación general, notemos que si tenemos una corriente creciente en un inductor, debe realizarse trabajo para que circule la corriente I contra la fuerza electromotriz inducida LdI/dt. Por lo tanto, el trabajo realizado en el intervalo de tiempo dt es

$$dW = LI\frac{dI}{dt}\,dt = LI\,dI = \tfrac{1}{2}L\,d(I^2) \qquad (69)$$

Por consiguiente podemos asignar una energía total

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad (70)$$

a un inductor por el que circule una corriente I. Con la eventual disminución de esta corriente, aparecerá en alguna parte esta energía.

Es natural considerarla como una energía almacenada en el campo magnético del inductor, tal como la energía de un condensador cargado se consideraba almacenada en su campo eléctrico. La energía de un condensador cargado a una diferencia de potencial V es $^1/_2CV^2$, y se calcula asignando a un elemento de volumen dv, una cantidad de energía $(\varepsilon_0/2)E^2dv$, donde la intensidad del campo eléctrico es E. Es agradable, pero muy sorprendente, encontrar que una relación exactamente similar se cumple para la energía almacenada en un inductor. Es decir, podemos adscribir al campo magnético una densidad de energía $(1/2\mu_0)B^2$, y sumando la energía de todo el campo nos dará la energía $^1/_2LI^2$.

Vamos a aplicar esto a un caso particular, volviendo de nuevo a la bobina toroidal cuya inductancia L calculamos en la Sec. 7.8. Hallamos (Ec. 58)

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\,N^2h\,\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (71)$$

La intensidad del campo magnético B, al circular la corriente I, venía dada por

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\;\frac{NI}{r} \qquad (72)$$

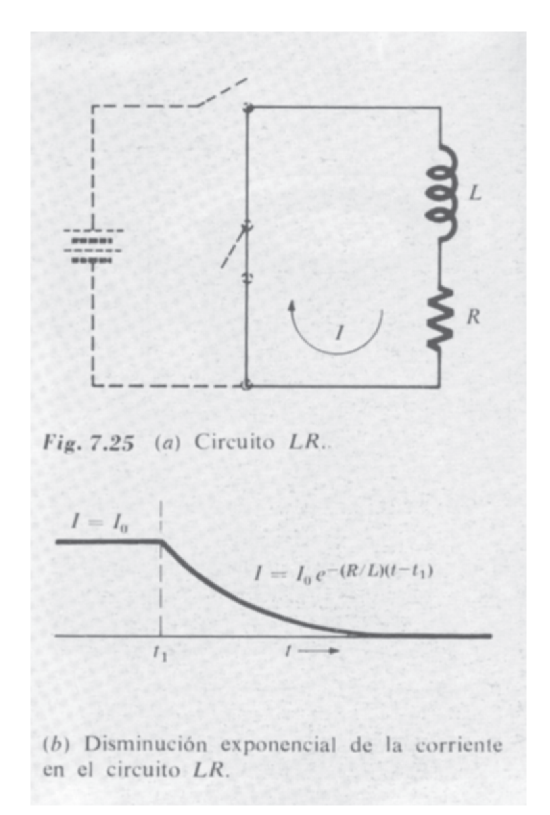


Fig. 7.25 (*a*) Circuito *LR*.

(*b*) Disminución exponencial de la corriente en el circuito *LR*.

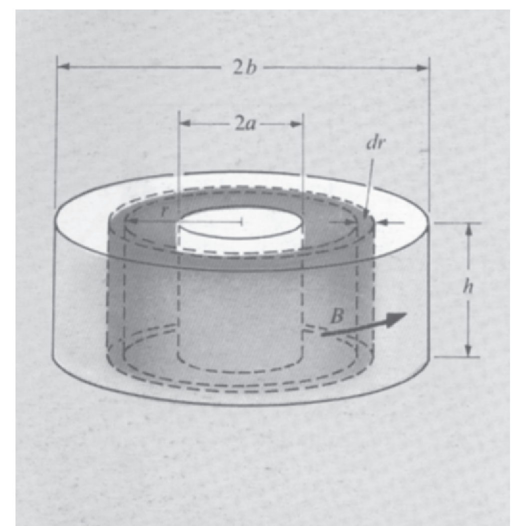


Fig. 7.26 Cálculo de la energía almacenada en el campo magnético de la bobina toroidal de la Fig. 7.22.

Para calcular la integral de volumen de $B^2/2\mu_0$ podemos usar un elemento de volumen que consiste en la capa cilíndrica dibujada en la Figura 7.26, cuyo volumen es $2\pi rh\,dr$. Cuando esta capa se extienda de $r = a$ a $r = b$, barre todo el espacio que contiene el campo magnético. (Recuérdese que el campo magnético B es nulo en todo punto exterior al toroide.)

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}\right)^2 2\pi rh\,dr = \frac{\mu_0}{4\pi}N^2hI^2\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (73)$$

Comparando este resultado con la Ec. 71, vemos que, en realidad,

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \tfrac{1}{2}LI^2 \quad (74)$$

La exposición más general, la contrapartida de nuestra expresión para el campo eléctrico en la Ec. 1.36, es que la energía U asociada a todo campo magnético $B(x, y, z)$ viene dada por

$$\boxed{U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{el campo}}} B^2\,dv} \quad (75)$$

Tomando B en tesla y v en metros cúbicos, la U de la Ec. 75 vendrá dada en joules.

Problemas

7.1 .Cuál es la fuerza electromotriz máxima inducida en una bobina de 4000 espiras, de radio medio 12 cm, girando a 30 revoluciones por segundo en el campo magnético terrestre, donde la intensidad del campo vale $5 \cdot 10^{-5}$ tesla.

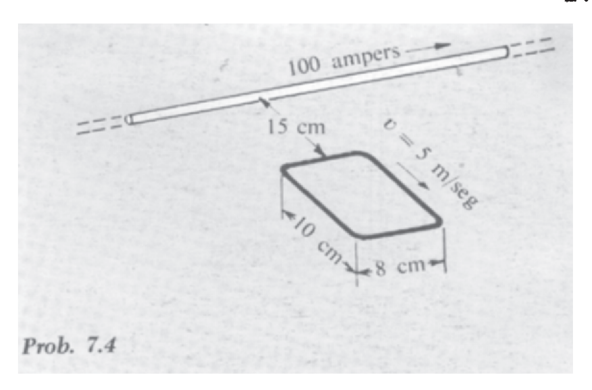
Resultado: 1,71 volt

7.2 Un hilo recto largo es paralelo al eje y pasando por el punto $z = h$ sobre el eje z. Una corriente I circula por este hilo, regresando por un conductor remoto cuyo campo puede despreciarse. En el plano xy hay una espira cuadrada con dos de sus lados, de longitud b, paralelos al hilo largo. Esta espira se desplaza a celeridad constante en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{x}}$. Determinar el valor de la fuerza electromotriz inducida en la espira en el instante en que el centro de tal espira cruza el eje y.

7.3 En la región central de un solenoide que está conectado a una fuente de potencia en radiofrecuencia, el campo magnético oscila a $2{,}5 \cdot 10^6$ ci-

clos/s con una amplitud de $4 \cdot 10^{-4}$ tesla. ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico oscilante, en volt/m, en un punto a 3 cm del eje? (Este punto se halla dentro de la región donde el campo magnético es casi uniforme.)

7.4 Calcúlese la fuerza electromotriz en la espira móvil de la figura en el instante en que su posición es la indicada. Supóngase que la resistencia de la espira es tan grande que el efecto de la corriente en la propia espira es despreciable. Calcúlese aproximadamente cuánto debería valer esta resistencia, para que ocurriera lo dicho. Indíquese el sentido de la corriente en la espira en el instante considerado.



Prob. 7.4

7.5 Supongamos que la espira de la Fig. 7.6 tiene una resistencia R. Demuéstrese que sea cual fuere quien mueve la espira a velocidad constante, realiza un trabajo durante el intervalo dt que coincide exactamente con la energía disipada en la resistencia durante este intervalo, con tal que la autoinducción de la espira pueda despreciarse. ¿Cuál es la fuente de energía en la Fig. 7.11 donde la espira es estacionaria?

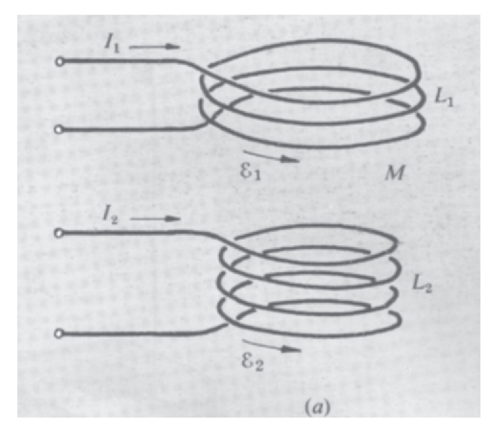
7.6 ¿La prescripción de una variación sinusoidal simple de la fuerza electromotriz de la espira giratoria en la Fig. 7.13, depende de que la espira sea rectangular, de que el campo magnético sea uniforme o de ambas cosas? Razónese. ¿Puede sugerirse una disposición de la espira giratoria y las bobinas estacionarias de manera que se obtenga una fem no senoidal definida? Represéntese la curva tensión-tiempo que se esperaría ver en el osciloscopio, con tal montaje.

7.7 Calcúlese la autoinducción de un solenoide cilíndrico de 10 cm de diámetro y una longitud de 2 metros. Tiene un devanado de una capa conteniendo 1200 espiras en total. Supóngase en primera aproximación que el campo magnético en el interior del solenoide es uniforme, justo hasta los extremos. Estímese aproximadamente el valor del error en que se incurrirá. ¿Es la L verdadera mayor o menor que nuestro resultado aproximado?

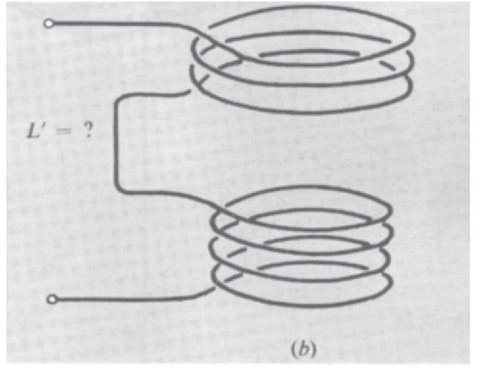
7.8 ¿Cómo devanaríamos una resistencia bobinada para que su autoinducción sea *pequeña*?

7.9 Deducir una fórmula aproximada para la inducción mutua de dos anillos circulares del mismo radio a, dispuestos como ruedas en el mismo eje con sus centros separados b cm. Utilícese una aproximación válida para $b \gg a$.

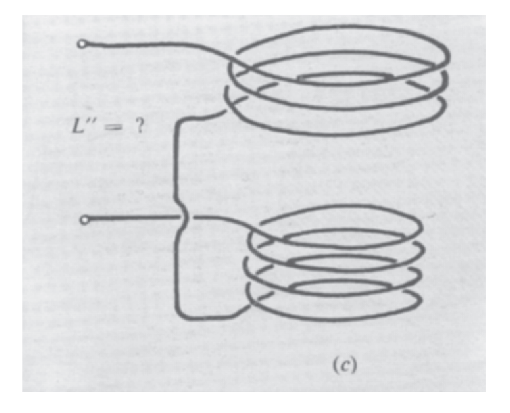
7.10 Las bobinas que produjeron primeramente una sacudida ligera, pero detectable, en el galvanómetro de Faraday las describe él mismo como bobinas de 62 m de hilo de cobre cada una, arrolladas en torno un bloque de madera largo. Las espiras de la segunda hélice (es decir, bobinado de capa única) estaban interpuestas entre las de la primera, pero separadas de ella por medio de un aislamiento. El diámetro del hilo de cobre era de 1,2 mm. No da las dimensiones del bloque de madera ni el número de espiras en las bobinas. En el experimento, una de las bobinas se conectaba a una batería de 100 elementos. Véase si se puede hacer un cálculo aproximado de la duración en segundos y del valor en amperes del pulso de corriente que atravesó el galvanómetro.



(*a*)



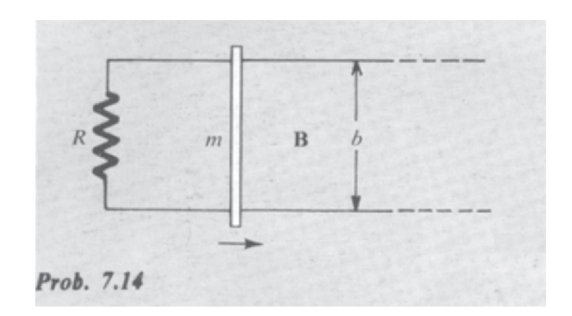
(*b*)



(*c*)

7.11 La parte (*a*) de la figura nos muestra dos autoinducciones L_1 y L_2. En la posición relativa indicada, su inducción mutua es M. Los sentidos positivos de las corrientes y de las fuerzas electromotrices en cada bobina están indicadas por medio de flechas en la figura. Las ecuaciones que relacionan corrientes y fuerzas electromotrices son

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} \underset{?}{\pm} M\frac{dI_2}{dt} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \underset{?}{\pm} M\frac{dI_1}{dt}$$

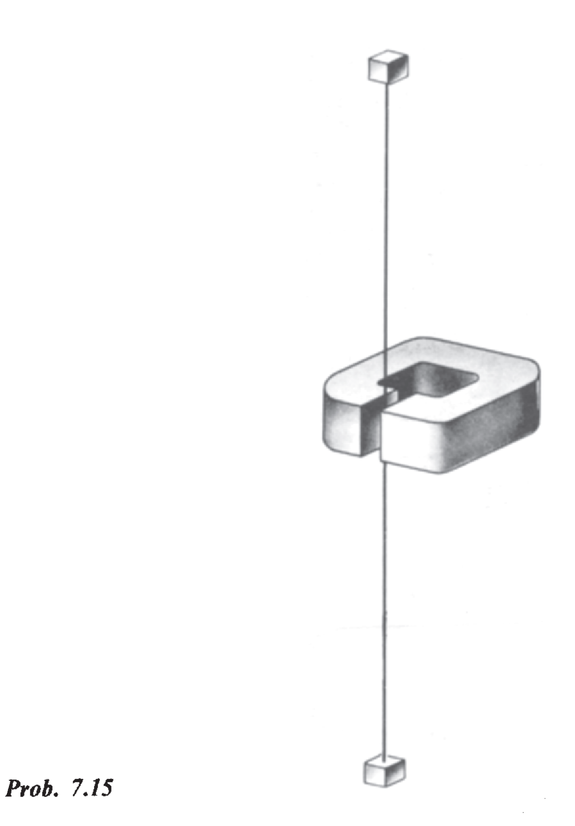


Prob. 7.14

Puesto que M debe ser una constante positiva, ¿cuáles deben ser los signos correctos para estas ecuaciones? ¿Qué ocurriría si hubiéramos escogido, como hubiera podido ocurrir, el otro sentido para la corriente positiva, y para la fuerza electromotriz, en la bobina inferior? Conectemos ahora las dos bobinas como en la parte (*b*) de la figura, para formar un circuito único. ¿Cuál es la inductancia L' de este circuito expresada en función de L_1, L_2 y M? ¿Cuál es la inductancia L'' del circuito formado al conectar las bobinas como se indica en *(c)*? ¿Qué circuito, *(b)* o *(c)*, tiene mayor autoinducción? Considerando que la autoinducción de cualquier circuito debe ser una cantidad positiva (¿por qué no puede ser negativa?), trátese de hallar una conclusión general, válida para cualquier par de bobinas imaginables, relacionando las magnitudes relativas de L_1, L_2 y M.

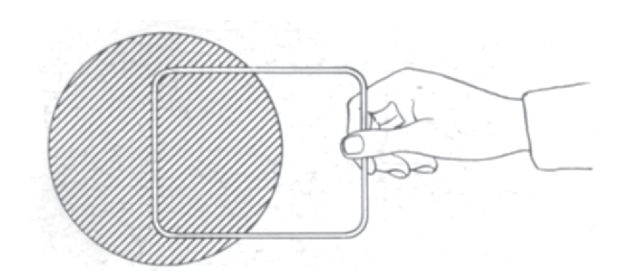
7.12 Una corriente oceánica fluye con una celeridad de 2 nudos (alrededor de 1 metro/seg) en una región donde la componente vertical del campo magnético terrestre es de $0{,}35 \cdot 10^{-4}$ tesla. La conductividad del agua del mar en esta región es 0,04 (ohm cm)$^{-1}$. Suponiendo que no haya otra componente horizontal de **E** que el término debido al movimiento $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, hállese la densidad de la corriente horizontal en ampere por metro cuadrado. ¿Si se sacase una botella de agua del mar a través del campo magnético terrestre a esta celeridad, circularía tal corriente en ella?

7.13 Una bobina de 0,01 ohm de resistencia y 0,50 milihenry de autoinducción se conecta a una gran batería de 12 volt de resistencia interna despreciable. Después de cerrar el interruptor hallar cuánto tardará la corriente en alcanzar el 90 por cien de su valor final. ¿En este instante, cuánta energía, en joules, está almacenada en el campo magnético? ¿Cuánta energía se ha tomado de la batería hasta este instante?


Prob. 7.15

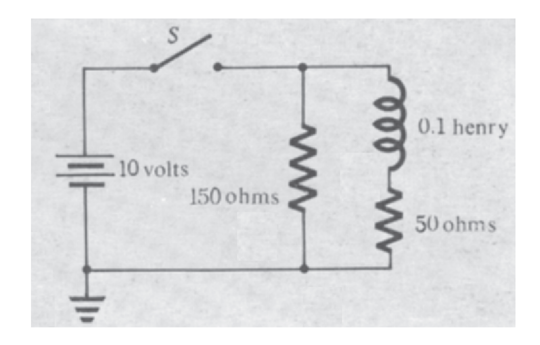
7.14 Una barra metálica de masa m se desliza sin rozamiento sobre dos largos rieles conductores paralelos, separados una distancia b. Se conecta una resistencia R entre los extremos de los dos rieles; las resistencias de los rieles y de la barra son despreciables frente a R. Existe un campo uniforme **B** perpendicular al plano de la figura. En el instante $t = 0$ se comunica a la barra una velocidad v_0 dada, dirigida hacia la derecha. ¿Qué sucede a continuación? *(a)* ¿Se para la barra en algún momento? ¿Si así es, cuándo? *(b)* ¿Qué distancia recorre antes de detenerse? *(c)* ¿Qué ocurre con la conservación de la energía?

7.15 Un hilo tenso pasa a través del entrehierro de un pequeño imán, donde la intensidad del campo es de 0,5 tesla. La longitud del hilo dentro del entrehierro es de 1,8 cm. Calcular la amplitud del voltaje alterno inducido cuando el hilo vibra a su frecuencia fundamental de 2000 Hz con una amplitud de 0,03 cm.


Prob. 7.16

7.16 La región sombreada representa el polo de un electroimán en donde existe un intenso campo magnético perpendicular al plano del papel. El armazón rectangular está hecho con varilla de aluminio de 5 mm de diámetro, curvada y con los extremos soldados. Supongamos que al aplicar una fuerza de 1 newton, partiendo de la posición indicada, el rectángulo se saca del imán en 1 segundo. Ahora bien: Si la fuerza se duplica a 2 newton, el rectángulo se sacaría en ______ s. El latón tiene aproximadamente una resistividad doble que la del aluminio. Si el armazón se hiciera de varilla de latón de 5 mm, la fuerza necesaria para sacarlo en 1 s sería ______ newtons. Si el armazón se hiciera con varilla de aluminio de 1 cm de diámetro, la fuerza necesaria para sacarlo en 1 s sería ——— newtons. Puede despreciarse en todos los casos la inercia del armazón.

7.17 En el circuito representado en el diagrama la batería de 10 volts tiene resistencia interna despreciable. El interruptor S está cerrado durante varios segundos, luego se abre. Construir una gráfica tomando el tiempo, en abscisas, en milisegundos, mostrando el potencial del punto A con respecto a tierra, precisamente antes y luego 10 milisegundos después de abrir el interruptor S. Mostrar también la variación de potencial en el punto B en el mismo período de tiempo.



Prob. 7.17

7.18 Una bobina circular de hilo, con N vueltas de radio a, está situada en el campo de un electroimán. El campo magnético es perpendicular a la bobina, y su intensidad tiene el valor constante B_0 en toda esta área. La bobina se conecta mediante un par de conductores trenzados a una resistencia externa. La resistencia total de este circuito cerrado, incluyendo la de la propia bobina, es R. Supongamos que el electroimán se desconecta, su campo cae más o menos rápidamente a cero. La fuerza electromotriz inducida da lugar a una corriente que circula por el circuito. Deducir una fórmula para la carga total $Q = \int I dt$ que pasa por la resistencia, y explicar por qué no depende de la rapidez con que el campo tiende a cero.

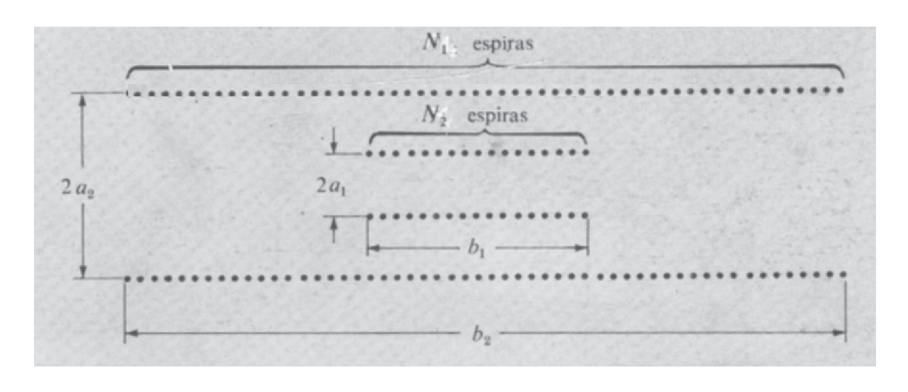
7.19 Discútanse las implicaciones del teorema $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ en el caso de anillos concéntricos grande y pequeño de la Fig. 7.20. Con una corriente fija I_1 en el anillo externo, evidentemente Φ_{21}, el flujo a través del anillo interno, disminuye si R_1 aumenta, simplemente a causa de que el campo en el centro se hace más débil. Pero con la corriente fija en el anillo interno, ¿por qué Φ_{12} el flujo a través del anillo externo, ***disminuiría*** al aumentar R_1, manteniendo R_2 constante? Debe satisfacer así a nuestro teorema.

7.20 ¿Puede idearse una manera de usar el teorema $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ para hallar la intensidad del campo magnético debido a la corriente en un anillo en puntos del plano del anillo a una distancia de éste mucho mayor que el radio del anillo? (***Sugerencia:*** Considérese el efecto de una pequeña variación ΔR_1 del radio del anillo externo de la Fig. 7.20; debe tener el mismo efecto sobre Φ_{12} que sobre Φ_{21}).

7.21 La figura muestra un solenoide de radio a_1 y longitud b_1 situado dentro de un solenoide mayor, de radio a_2 y longitud b_2. El número total de espiras es N_1 en el interior y N_2 en el exterior. Hállese una fórmula para la inducción mutua M.

7.22 Un delgado anillo de radio a tiene una carga estática q. Este anillo está en un campo magnético de intensidad B_0, paralelo al eje del anillo, y está soportado de tal manera que puede girar libremente en torno a este eje. ¿Si el campo se retira, cuánto momento cinético ha de añadirse al anillo? Suponiendo que la masa de este anillo sea m, demostrar que el anillo, si estaba inicialmente en reposo, requerirá una velocidad angular $\omega = qB_0/2m$. Adviértase que, como en el Problema 7.18, el resultado depende solamente de los valores inicial y final de la intensidad del campo, y no de la rapidez del cambio.


Prob. 7.21



7.23 En la mayor parte del espacio interestelar (en nuestra galaxia) existe un campo magnético. Hay evidencia de que la intensidad en la mayoría de las regiones está entre 10^{-10} y 10^{-9} tesla. Adoptando $3 \cdot 10^{-10}$ tesla como valor típico, hallar, en orden de magnitud, la energía total almacenada en el campo magnético de la galaxia. Para ello puede suponerse que la galaxia es un disco de unos 10^{23} cm de diámetro y 10^{21} de espesor. Para ver si la energía magnética representa mucho, a tal escala, podemos considerar el hecho de que las estrellas en esta galaxia están radiando unos 10^{37} W. ¿Cuántos años de luz estelar equivalen a la energía magnética?

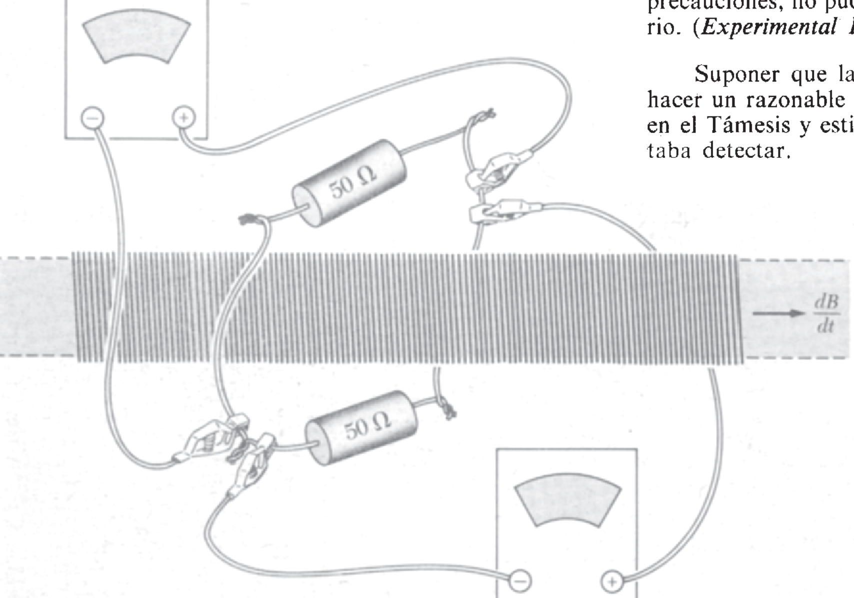
7.24 Un solenoide superconductor diseñado para imágenes del cuerpo humano por resonancia magnética nuclear es de 0,9 metros de diámetro y 2,2 m de longitud. El campo en su centro es de 0,4 tesla. Estímese aproximadamente la energía almacenada en el campo de esta bobina, en joules.

7.25 Se ha estimado que la intensidad del campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones, o ***pulsar***, puede llegar a ser de 10^8 tesla. ¿Cuál es la densidad de energía de tal campo? Expresarla, usando la equivalencia masa-energía, en kg por m^3.

7.26 Faraday describe de la siguiente manera un experimento, que no tuvo éxito, para detectar una corriente inducida, cuando parte de un circuito consiste en agua moviéndose a través del campo magnético terrestre:

Hice los experimentos en el puente de Waterloo, extendiendo un hilo de cobre de novecientos sesenta pies de longitud sobre el pretil del puente, y dejando caer desde sus extremos otros alambres con amplias placas metálicas soldadas a ellos, para completar el contacto con el agua. Así que el hilo y el agua formaban un circuito conductor; y cuando el agua subía o bajaba con la marea, esperaba obtener corrientes análogas a las de la bola de latón. Obtuve constantemente desviaciones en el galvanómetro, pero eran muy irregulares, y estaban en sucesión, atribuidas a otras causas distintas a la buscada. Las diferentes condiciones del agua como la pureza en los dos lados del río; la diferencia de temperatura; pequeñas diferencias en las placas, en la soldadura, en el mejor o peor contacto hecho al girar u otras causas; todos producían su efecto a su vez: y aunque experimenté con el agua que pasaba por debajo de los arcos centrales solamente; usé placas de platino en vez de cobre; y tomé otras precauciones, no pude obtener al cabo de tres días ningún resultado satisfactorio. (***Experimental Researches in Electricity***, Vol I, p. 55, Londres, 1839).

Suponer que la componente vertical del campo fue de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ tesla, hacer un razonable supuesto sobre la velocidad de las corrientes de la marea en el Támesis y estimar la magnitud del voltaje inducido que Faraday intentaba detectar.

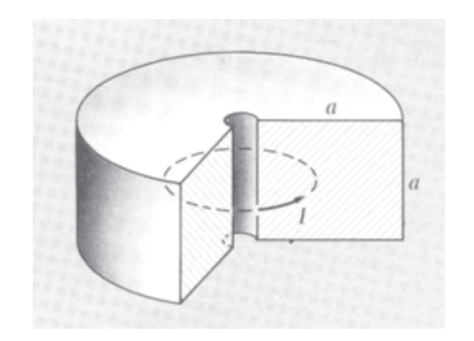


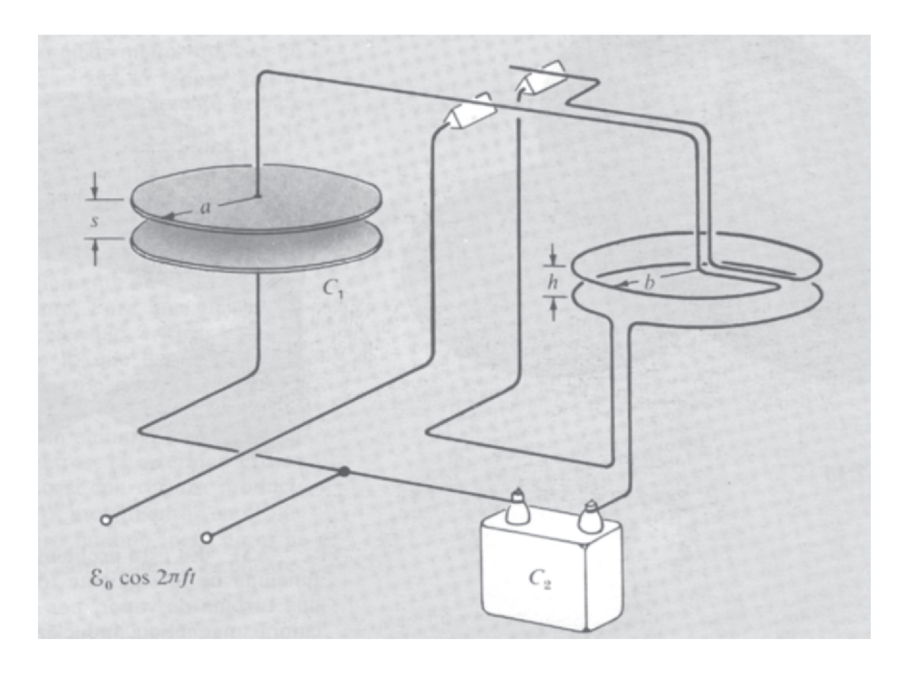
Prob. 7.27

7.27 Podemos imaginar que un voltímetro es un dispositivo que registra la integral curvilínea $-\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de un camino cerrado C. Parte de C se encuentra dentro del instrumento; el resto consta de los conductores exteriores del aparato de medida y de los conductores a los que ellos están conectados. Para el signo, el voltímetro registra un voltaje positivo cuando la integral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ en el camino *interno* desde el terminal señalado + al terminal − es mayor que cero. Teniendo esto presente, considérese el dispositivo de la figura. El solenoide es tan largo que su campo magnético exterior es despreciable. Su sección recta es de 20 cm² de área, y el campo dentro va hacia la derecha y aumenta a razón de 10^{-2} tesla/s. Se conectan dos voltímetros idénticos, como se indica, a puntos del bucle que encierre el solenoide y contenga las dos resistencias de 50 ohm. Los voltímetros son capaces de indicar microvolts y tienen resistencia interna elevada. ¿Qué indica cada voltímetro? Asegúrese que la respuesta esté de acuerdo, desde cada punto de vista, con la Ec. 25.

7.28 El campo magnético dentro de los buenos conductores no puede variar rápidamente. Hallamos que la corriente en un simple circuito inductivo disminuye exponencialmente con un tiempo característico L/R (Ec. 66). En un cuerpo conductor grande como el núcleo metálico terrestre el «circuito» no es fácil de identificar. Sin embargo, podemos hallar el orden de magnitud del tiempo de decaimiento, y de quién depende, efectuando algunas aproximaciones razonables. Consideremos el toroide de sección recta cuadrada hecho con un material de conductividad σ, en $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Circula una corriente I. Esta I se esparce de cierta manera por la sección recta, pero supondremos que la resistencia es la de un hilo de área a^2 y longitud πa, es decir $R \approx \pi/a\sigma$. Para el campo B adoptamos el campo en el centro de un anillo con corriente I y radio $a/2$. Para la energía almacenada U, una estimación razonable daría $B^2/2\mu_0$ veces el volumen del toroide. Ya que $dU/dt = -I^2R$, el tiempo de decaimiento de la energía U será $\tau \approx U/I^2R$. Demostrar que, excepto por un factor numérico dependiente de nuestras varias aproximaciones, $\tau \approx \sigma a^2/c^2$. El radio del núcleo terrestre es de 3000 Km, y su conductividad se cree que es $10^6\,(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$, aproximadamente una décima de la del hierro a la temperatura ambiente. Evaluar τ en siglos.

Prob. 7.28





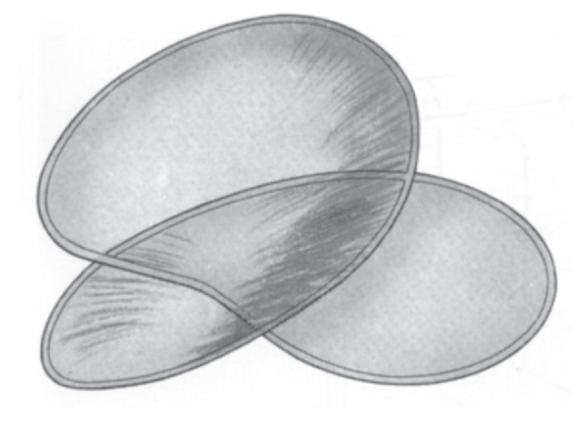
Prob. 7.29

7.29 La constante $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ que aparece en las ecuaciones de Maxwell, puede determinarse por medio de experimentos eléctricos en los que intervienen solamente campos de baja frecuencia. Consideremos el dispositivo de la figura. La fuerza entre las placas del condensador se equilibra por la fuerza entre hilos paralelos recorridos por corrientes en el mismo sentido. Se aplica una tensión alterna senoidal de frecuencia f ciclos/seg al condensador plano C_1 y también al condensador C_2. La carga que entra y sale de C_2 constituye la corriente en las espiras. Supongamos que C_2 y las diferentes distancias que intervienen se han ajustado de manera que la fuerza hacia abajo de la placa superior de C_1 equilibra exactamente la fuerza hacia abajo de la espira superior. (Por supuesto que los *pesos* de los dos lados se han equilibrado sin tensión). Demuéstrese que bajo estas condiciones la constante c puede calcularse a partir de las cantidades medidas de la siguiente manera:

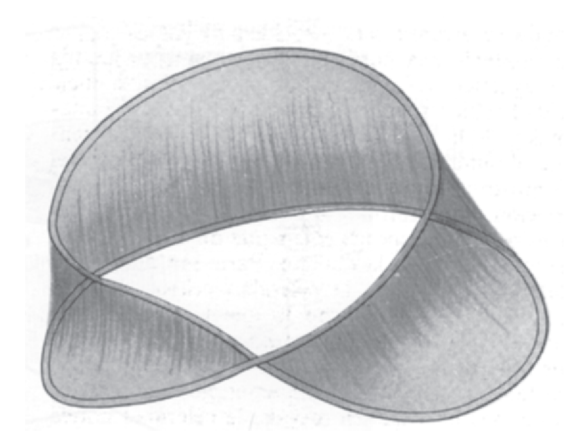
$$c = (2\pi)^{3/2}\left(\frac{ab}{h}\right)\left(\frac{C_2}{C_1}\right)f \quad \text{m/seg}$$

Adviértase que sólo se necesitan medidas de *distancia y tiempo* (o frecuencia), aparte de la medida de la relación entre las dos capacidades C_1 y C_2. Las unidades eléctricas, como tales, no intervienen en el resultado. (El experimento es realmente factible a frecuencias tan bajas como la de 60 ciclos/seg si C_2 es, digamos, 10^6 veces C_1 y las espiras son de varias vueltas para multiplicar el efecto de una corriente pequeña).

7.30 Consideremos la espira representada en la figura. Supongamos que queremos hallar el flujo de **B** a través de esta espira. Se muestran *dos* superficies limitadas por la espira, en (*a*) y (*b*) respectivamente. ¿Cuál es la diferencia esencial entre ellas? ¿Cuál es, si hay alguna, la superficie correcta que deberá usarse para calcular la integral de superficie $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ para hallar el flujo? Descríbase la superficie correspondiente para una bobina de tres espiras. Demuéstrese que es totalmente compatible con nuestra afirmación previa de que para una bobina compacta de N espiras es exactamente N veces la que tendríamos para una bobina única del mismo tamaño y forma.



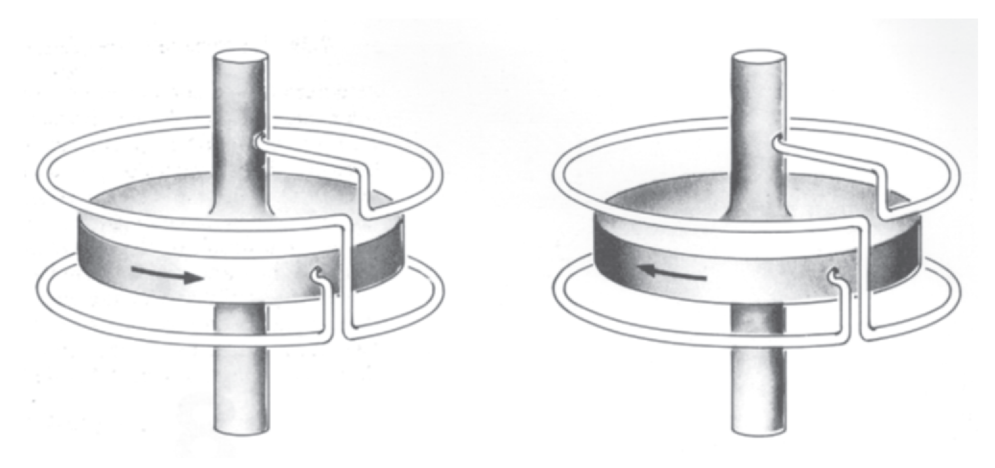
(*a*)



(*b*)

Prob. 7.30

7.31 En este problema el término *dínamo* se usa para un generador que funciona de la siguiente forma. Mediante cierto agente exterior —el eje de una turbina de vapor, por ejemplo—, un conductor se mueve a través de un campo magnético, induciéndose una fuerza electromotriz en un circuito del cual este conductor forma parte. La fuente de campo magnético es la co-



***Prob.* 7.31**

rriente obligada a fluir en este circuito por la citada fuerza electromotriz. Un ingeniero eléctrico le llamaría generador de cc autoexcitado. Una de las dínamos más simple imaginable está representada en la figura. Tiene solamente dos partes esenciales. Una parte es un disco metálico macizo y el eje que puede hacerse girar. La otra es una «bobina» de dos vueltas que es estacionaria pero que está conectada mediante contactos deslizantes o «escobillas» al eje y al borde del disco giratorio. Uno de los dos dispositivos representados, al menos potencialmente, es una dínamo. El otro no. ¿Cuál es la dínamo? Adviértase que la respuesta a esta cuestión no puede depender de la convención que sea acerca de regla de la mano o sentidos de la corriente. Un extraterrestre inteligente que examinase los esquemas podría dar la contestación, con tal de que conociese algo acerca de flechas. ¿Qué es lo que determina el sentido de la corriente en tal dínamo? ¿Qué determinará el valor de la corriente?

7.32 Una dínamo como la del problema precedente tiene cierta celeridad crítica ω_0. Si el disco gira con cierta velocidad angular menor que ω_0, no ocurre nada. Solamente cuando se alcanza esta velocidad se induce una $\mathscr{E}$ suficientemente grande para producir una corriente suficientemente grande que dé lugar a un campo magnético suficientemente grande para inducir una $\mathscr{E}$ de este valor. La celeridad crítica solamente puede depender del tamaño y forma de los conductores y de la conductividad σ. Sea d cierta dimensión característica que exprese el tamaño de la dínamo, tal como el radio del disco en nuestro ejemplo. Demostrar por un argumento dimensional que ω_0 debe venir dada por una relación de la forma: $\omega_0 = (K/\mu_0 d^2 \sigma)$, donde K es cierto factor numérico adimensional que depende solamente de la disposición y tamaño *relativo* de las distintas partes de la dínamo. Para una dínamo de tamaño modesto hecha totalmente de cobre, la celeridad crítica ω_0 sería prácticamente inalcanzable. Es el ferromagnetismo lo que hace posible el generador ordinario de cc para proporcionar un campo magnético mucho más intenso que el que podría producir la corriente en las bobinas, por sí misma. Para una dínamo del tamaño de la tierra, sin embargo, con d medido en centenares de kilómetros más bien que en metros, la celeridad crítica es mucho menor. El campo magnético terrestre es casi con certeza producido por una dínamo no ferromagnética que comporta movimientos en el núcleo metálico fluido. Resulta que este fluido es hierro fundido, pero no es ni ligeramente ferromagnético debido a que está demasiado caliente. Explicaremos esto en el Capítulo 11.

8

Circuitos de corriente alterna

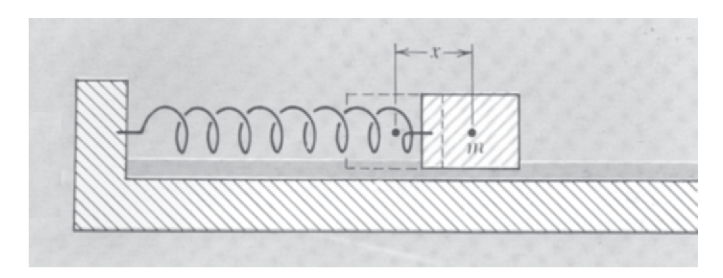


Fig. 8.1 Un oscilador armónico amortiguado mecánico.

8.1 Un circuito resonante

Una masa unida a un muelle es un ejemplo familiar de un oscilador. Si la amplitud de la oscilación no es muy grande, el movimiento será una función sinusoidal del tiempo. En este caso, le llamamos un *oscilador armónico*. La característica más notable de todo oscilador armónico mecánico es una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento de la masa m de su posición de equilibrio, $F = -kx$ (Fig. 8.1). En ausencia de otras fuerzas exteriores, la masa, desplazada inicialmente, oscilará con amplitud constante a la frecuencia angular, $\omega = \sqrt{k/m}$. Pero generalmente cierto tipo de fricción lo conducirá eventualmente al reposo. El caso más simple es el de la fuerza retardadora proporcional a la velocidad de la masa, dx/dt. Un ejemplo nos lo proporciona el movimiento en un fluido viscoso. Un sistema en el que la fuerza recuperadora sea proporcional a cierto desplazamiento x y que la fuerza amortiguadora sea proporcional a la derivada respecto al tiempo dx/dt se llama *oscilador armónico amortiguado.*

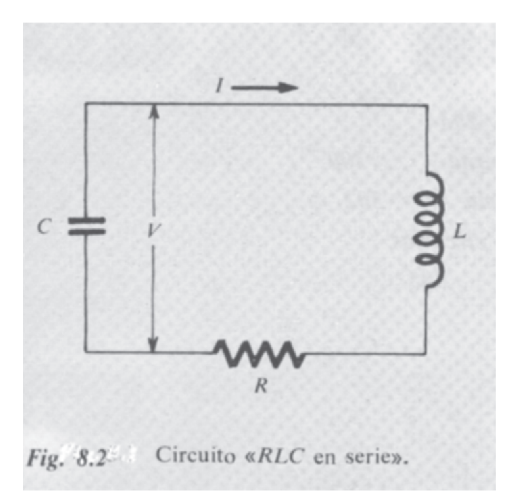


Fig. 8.2 Circuito «*RLC* en serie».

Un circuito eléctrico que contenga capacidad y autoinducción tiene lo esencial del oscilador armónico. La resistencia ohmica le convierte en oscilador armónico amortiguado. En realidad, gracias a la extraordinaria linealidad de los elementos del circuito eléctrico real, el oscilador armónico amortiguado eléctrico es más próximo al ideal que la mayoría de osciladores mecánicos. El sistema que estudiaremos primero es el circuito «RLC en serie» representado esquemáticamente en la Fig. 8.2.

Sea Q la carga en el condensador de este circuito, en el instante t. La diferencia de potencial o voltaje en el condensador es V, que evidentemente es el mismo que el voltaje, o tensión, en la combinación en serie de la inductancia L y la resistencia R. Tomamos V positiva cuando la placa superior del condensador está cargada positivamente, y definimos el sentido positivo de la corriente por la flecha en la Figura 8.2. Con los signos elegidos de esta manera, las relaciones que ligan a la carga Q, la corriente I, y el voltaje V en el condensador son:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV \qquad V = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{1}$$

Queremos eliminar dos de las tres variables Q, I y V. De las dos primeras ecuaciones obtenemos $I = - C\,dV/dt$, y la tercera ecuación se convierte en $V = - LC(d^2V/dt^2) - RC(dV/dt)$, o

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0 \tag{2}$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes. Ensayaremos una solución de la forma

$$V = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t \tag{3}$$

en donde A, α y ω son constantes. Las derivadas primera y segunda de esta función son:

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha\cos\omega t - \omega\,\text{sen}\,\omega t] \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\,\text{sen}\,\omega t] \tag{5}$$

Sustituyendo en la Ec. 2, simplificando el factor común $Ae^{-\alpha t}$ nos queda

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\,\text{sen}\,\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\,\text{sen}\,\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0 \tag{6}$$

Se satisfará en todo instante t si, y solamente si, los coeficientes de $\text{sen}\,\omega t$ y $\cos\omega t$ son ambos nulos. Es decir, debe cumplirse que:

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0 \tag{7}$$

y

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8}$$

La primera de estas ecuaciones da una condición para:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \tag{9}$$

mientras la segunda requiere que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha\frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \tag{10}$$

Ya que nuestra constante ω es un número real, ω^2 no puede ser negativo. Por lo tanto logramos obtener una solución de la forma dada en la Ec. 3 solamente si $R^2/4L^2 \leqq 1/LC$. En realidad, este es el caso de « amortiguamiento ligero », es decir, baja resistencia, que necesitamos examinar, así que supondremos que los valores de R, L, y C en el circuito son tales que se cumple la desigualdad $R < 2\sqrt{L/C}$.

La función $Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ no es la única solución posible. Cumple igualmente la función $Be^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega t$, con los mismos requisitos, Ec. 9 y Ec. 10, para α y ω respectivamente. La solución general es la suma de ambas:

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t) \tag{11}$$

Las constantes A y B pueden ajustarse para cumplir con las condiciones iniciales. Esto no es muy interesante. El que, en cualquier caso, en la solución intervenga la función seno o la coseno, o una superposición, es una cosa insignificante, que depende de cómo se coloque el reloj. El fenómeno esencial es una oscilación sinusoidal amortiguada.

La variación de la tensión, o voltaje, con el tiempo se representa en la Fig. 8.3*a*. Por supuesto que esto no puede cumplirse realmente para todo tiempo *pasado*. En cierto instante, en el pasado, el circuito debía haber estado provisto, de algún modo, de energía y luego se abandona a sí mismo. Por ejemplo, el condensador se podía haber cargado, con el circuito abierto, y luego conectado a la bobina.

En la Fig. 8.3*b* la escala de tiempo se ha ensanchado y se ha añadido la curva de trazos que representa la variación de la corriente I. Para V tomamos el coseno amortiguado, Ec. 3. Entonces la corriente en función del tiempo viene dada por:

$$I = -C\frac{dV}{dt} = AC\omega\left(\operatorname{sen}\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right)e^{-\alpha t} \tag{12}$$

La relación α/ω es una medida del amortiguamiento. Si α/ω es muy pequeña, tienen lugar muchas oscilaciones mientras la amplitud dis-

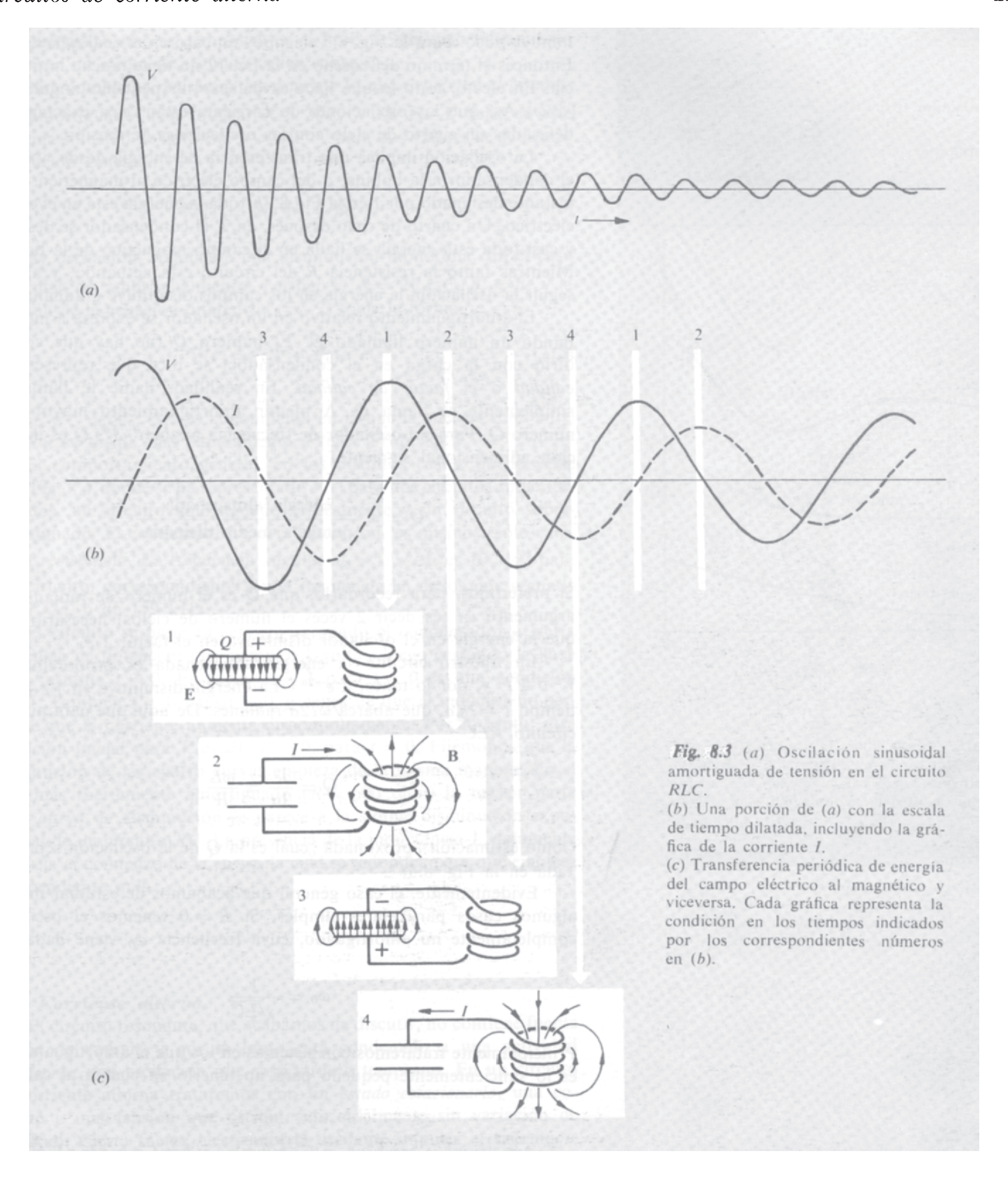


Fig. 8.3 (*a*) Oscilación sinusoidal amortiguada de tensión en el circuito *RLC*.
(*b*) Una porción de (*a*) con la escala de tiempo dilatada, incluyendo la gráfica de la corriente *I*.
(*c*) Transferencia periódica de energía del campo eléctrico al magnético y viceversa. Cada gráfica representa la condición en los tiempos indicados por los correspondientes números en (*b*).

minuye poco. Para la Fig. 8.3 elegimos un caso en el cual $\alpha/\omega \approx 0{,}04$. Entonces el término del coseno en la Ec. 12 no tiene mucha importancia. En efecto, todo lo que hace es defasar un pequeño ángulo $tg^{-1}(\alpha/\omega)$. Así que las oscilaciones de corriente están, casi exactamente, defasadas un cuarto de ciclo con las oscilaciones de tensión.

La oscilación implica una transferencia de energía desde, y hacia, el condensador a la bobina, o del campo eléctrico al magnético. En el instante designado por 1 en la Fig. 8.3*b* toda la energía está en el campo eléctrico. Un cuarto de ciclo después, en 2, el condensador se descarga y casi toda esta energía se halla en el campo magnético de la bobina. Mientras tanto la resistencia R del circuito está actuando, y al proseguir la oscilación, la energía en los campos disminuye gradualmente.

El amortiguamiento relativo en un oscilador se expresa a menudo dando un número llamado Q. El número Q (no hay que confundirlo con la carga en el condensador) se dice que representa la *calidad* o el *factor de calidad*. En realidad, nadie le llama así; simplemente se llama Q. A menor amortiguamiento mayor es el número Q. Para un oscilador de frecuencia angular ω*, Q es la relación adimensional siguiente:

$$Q = \omega \frac{\text{energía almacenada}}{\text{potencia media disipada}} \tag{13}$$

Si preferimos, para recordarlo, que Q es el número de radianes del argumento ωt (es decir 2 veces el número de ciclos) necesario para que la energía en el oscilador disminuya en el factor $1/e$.

En nuestro circuito la energía almacenada es proporcional a V^2 o a I^2 y, por lo tanto, a $e^{-2\alpha t}$. La energía disminuye en $1/e$ en un tiempo $t = {}^1/_2\alpha$, que abarca $\omega/2\alpha$ radianes. De aquí que para nuestro circuito RLC

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R} \tag{14}$$

Como estimación aproximada ¿cuál es la Q de la oscilación representada en la Fig. 8.3?

Evidentemente, el caso general que acabamos de estudiar incluye algunos casos particulares simples. Si $R = 0$ tenemos el oscilador completamente no amortiguado, cuya frecuencia ω_0 viene dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{15}$$

Principalmente trataremos con sistemas en los que el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño para no tenerlo en cuenta al calcular

---

* A la frecuencia angular ω, se le acostumbra a llamar *pulsación*. *(N. del T.)*.

la frecuencia. Como se demuestra en el Prob. 8.9, el amortiguamiento sólo tiene un efecto de segundo orden sobre ω.

Para completar revisemos brevemente lo qué ocurre en el circuito sobreamortiguado, con lo cual $R > 2\sqrt{L/C}$. La Ec. 2 tiene en este caso una solución de la forma $V = Ae^{-\beta t}$ para dos valores de β, siendo la solución general

$$V(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t} \tag{16}$$

No hay oscilación, solamente una disminución monótona. En el caso particular de amortiguamiento « crítico », $R = 2\sqrt{L/C}$, $\beta_1 = \beta_2$ y la solución de la ecuación diferencial (Ec. 2) toma la forma

$$V(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} \tag{17}$$

Para L y C dadas, esta es la condición en la que la energía total en el circuito, se disipa más rápidamente. (Véase Prob. 8.8.)

El comportamiento general, en los distintos casos, puede verse en la Fig. 8.4, donde se ha representado $V(t)$ para dos circuitos subamortiguados, un circuito amortiguado críticamente y un circuito sobreamortiguado. El condensador y el inductor son los mismos; sólo cambia la resistencia. La frecuencia angular $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es 10^{-6} s^{-1} para este circuito, correspondiente a una frecuencia en ciclos por segundo de $10^6/2\pi$, o de 159 kHz.

El circuito se pone en servicio cargando el condensador a cierta diferencia de potencial, por ejemplo, 1 volt, y luego cerrando la llave en el instante $t = 0$. Es decir, $V = 1$ para $t = 0$ es una condición inicial. También $I = 0$ para $t = 0$, a causa de que el inductor no permitirá que la corriente aumente discontinuamente. Por lo tanto, otra condición inicial para V es $dV/dt = 0$, para $t = 0$. Fijémonos que la disminución de las cuatro curvas empieza de la misma manera. En el caso más fuertemente amortiguado ($R = 600$ ohm) la mayor parte de la curva de disminución se parece a la simple disminución exponencial de un circuito RC. La presencia de la inductancia L, solamente se revela al comienzo de la curva, la cual se redondea para que empiece con pendiente nula.

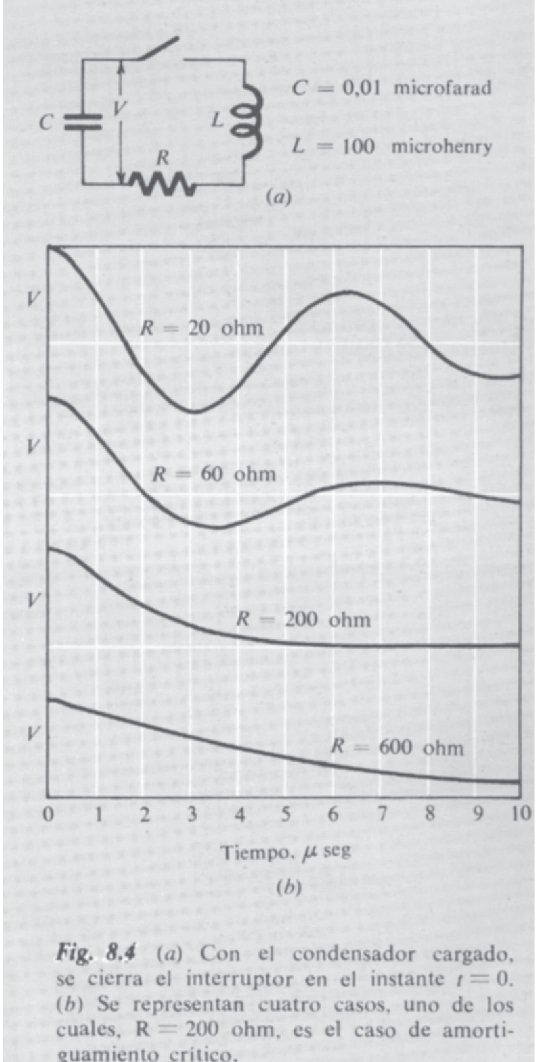


Fig. 8.4 (*a*) Con el condensador cargado, se cierra el interruptor en el instante $t = 0$. (*b*) Se representan cuatro casos, uno de los cuales, R = 200 ohm, es el caso de amortiguamiento crítico.

8.2 *Corriente alterna*

El circuito resonante, que acabamos de discutir, no contiene fuente alguna de energía y por lo tanto está condenado a una actividad *transitoria*, una oscilación que cesa tarde o temprano. En un circuito de corriente alterna trataremos con un *estado estacionario*, una corriente y una tensión que oscilan sinusoidalmente sin variación de amplitud. Cierta fuerza electromotriz oscilante impulsa el sistema.

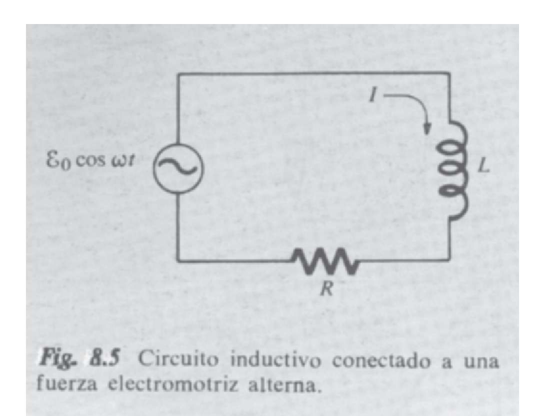


Fig. 8.5 Circuito inductivo conectado a una fuerza electromotriz alterna.

Apliquemos una fuerza electromotriz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ a un circuito que contiene inductancia y resistencia. Podíamos generar $\mathcal{E}$ con una máquina esquemática igual al de la Fig. 7.14, habiéndola provisto de algún dispositivo o motor para que el eje gire a velocidad angular constante ω. En la Fig. 8.5 esta fuerza electromotriz se representa conectada al circuito. Despreciaremos toda resistencia interna del generador, o la incluimos en R. Establezcamos que la suma de caídas de tensión a lo largo de los elementos de este circuito sea igual a la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$, exactamente igual como se hizo en la Ec. 7.61. La ecuación que rige la corriente es entonces:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \tag{18}$$

Ahora bien, aquí puede existir cierto comportamiento transitorio, dependiente de las condiciones iniciales, es decir, de cómo y cuando se conectó el generador. Pero únicamente nos interesa el estado estacionario, cuando la corriente está oscilando de acuerdo con la frecuencia de la fuerza impulsora, con la amplitud y la fase adecuadas para satisfacer a la Ec. 18. Para demostrar que esto es posible, consideremos una corriente definida por

$$I = I_0 \cos (\omega t + \varphi) \tag{19}$$

Para determinar las constantes I_0 y φ, la sustituimos en la Ec. 18:

$$-LI_0\omega \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) - RI_0 \cos (\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \tag{20}$$

Podemos separar las funciones $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$:

$$\begin{aligned} -LI_0\omega(\operatorname{sen} \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi) \\ + RI_0(\cos \omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \end{aligned} \tag{21}$$

Haciendo iguales a cero, separadamente, los coeficientes de $\cos \omega t$ y de $\operatorname{sen} \omega t$,

$$-LI_0\omega \cos \varphi - RI_0 \operatorname{sen} \varphi = 0 \tag{22}$$

que da

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R} \tag{23}$$

$$-LI_0\omega \operatorname{sen} \varphi + RI_0 \cos \varphi - \mathcal{E}_0 = 0 \tag{24}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\mathcal{E}_0}{R \cos \varphi - \omega L \operatorname{sen} \varphi} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{R(\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \ \operatorname{tg} \varphi)} = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \varphi}{R} \end{aligned} \tag{25}$$

o ya que

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \text{(de la Ec. 23)} \tag{26}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{27}$$

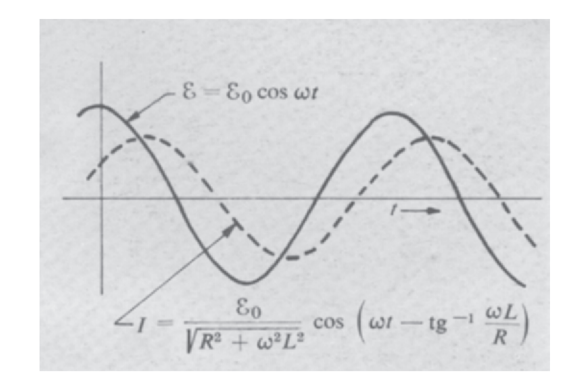


Fig. 8.6 La corriente I, en el circuito de la figura 8.5, representada junto con la fuerza

En la Fig. 8.6 las oscilaciones de ε y de I se representan en la misma gráfica. Ya que φ es un ángulo negativo, la corriente alcanza su máximo un poco *más tarde* que la fuerza electromotriz. Se dice, « La corriente, en un circuito inductivo, está retrasada respecto a la tensión ». A la cantidad ωL, que tiene dimensiones de resistencia y se puede expresar en ohm, se le llama *reactancia inductiva*.

Si sustituimos la inductancia L por un condensador C, como en la Fig. 8.7, tenemos un circuito regido por la ecuación

$$-\frac{Q}{C} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \tag{28}$$

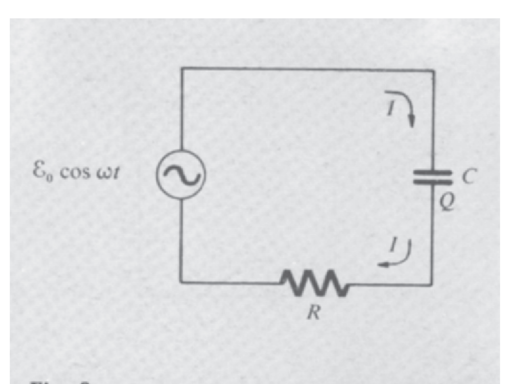


Fig. 8. Fuerza electromotriz alterna en un circuito que contiene resistencia y capacidad.

Consideremos la solución del estado estacionario

$$I = I_0 \cos (\omega t + \varphi) \tag{29}$$

Ya que $I = -dQ/dt$, tenemos

$$Q = -\int I\, dt = \frac{I_0}{\omega} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) \tag{30}$$

Observemos que al pasar de I a Q por integración, no hay necesidad de una constante de integración, pues sabemos que Q debe oscilar simétricamente en torno a cero en el estado estacionario.

Sustituyendo en la Ec. 28 llegamos a

$$-\frac{I_0}{\omega C} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) + RI_0 \cos (\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \tag{31}$$

Exactamente igual que antes, obtenemos las condiciones para φ e I_0 exigiendo que los coeficientes de $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$ se anulen separadamente. En este caso los resultados son:

$$\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{1}{R\omega C} \tag{32}$$

y

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \tag{33}$$

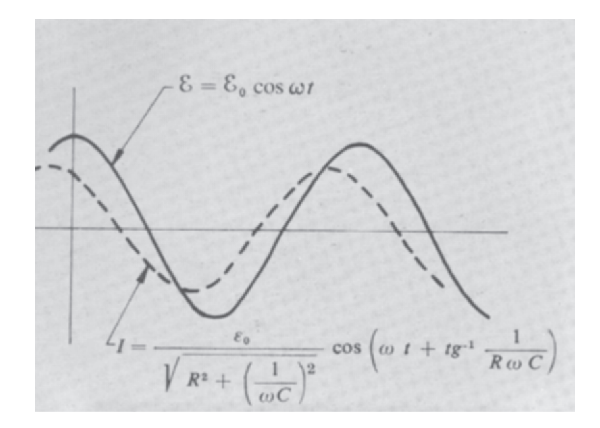


Fig. 8.8 Corriente en el circuito *RC*. Compárese el defasaje en este caso con el del circuito inductivo en la Fig. 8.5.

Ahora vemos que la fase es positiva. Por lo que se dice, la corriente « adelanta a la tensión » en un circuito capacitivo. Lo que esto significa es evidente en la gráfica de la Fig. 8.8.

Matemáticamente hablando, la función

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \text{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \tag{34}$$

es una *integral particular* de la ecuación diferencial, Ec. 18. A ésta podría añadírsele una *función complementaria*, es decir, una solución de la ecuación diferencial homogénea

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \tag{35}$$

Ahora bien, esto es precisamente la Ec. 65 del Cap. 7, cuya solución se halló en la Sec. 7.9, que es una función que disminuye exponencialmente

$$I \sim e^{-(R/L)t} \tag{36}$$

El significado físico es éste: Un transitorio, determinado por ciertas condiciones iniciales, está representado por una componente de $I(t)$, disminuyendo en la forma de la Ec. 36. Transcurrido un tiempo $t \gg L/R$, ésta se habrá extinguido llegándose solamente a la oscilación sinusoidal estacionaria a la frecuencia impulsora, representada por la integral particular, Ec. 34.

La similitud de nuestros resultados para el circuito *RL* y el *RC* sugiere una manera de considerar el inductor y el condensador en serie. Supongamos que una corriente alterna $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ de la manera que sea, se obliga a circular a través de tal combinación (representada en la Fig. 8.9). La tensión V_L en el inductor será:

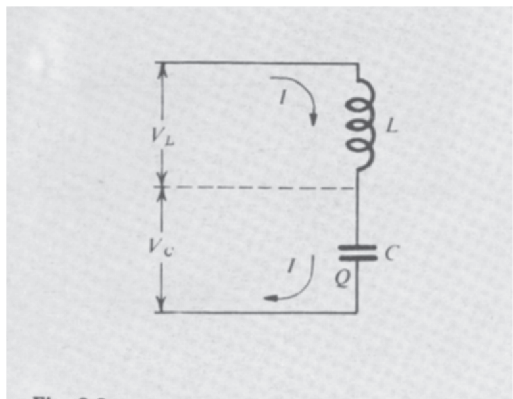


Fig. 8.9 El inductor y el condensador en serie son equivalentes a un sólo elemento reactivo que es o bien un inductor o un condensador según $\omega^2 LC$ sea mayor o menor que 1.

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = -I_0 \omega L \text{ sen } (\omega t + \varphi) \tag{37}$$

La tensión en el condensador, con el signo de acuerdo con el de V_L, es

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I \, dt = \frac{I_0}{\omega C} \text{ sen } (\omega t + \varphi) \tag{38}$$

La tensión a lo largo de la combinación es pues

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi) \tag{39}$$

Para una ω dada, la combinación es evidentemente equivalente a un solo elemento, o inductor o condensador, dependiendo de que la

cantidad $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ sea positiva o negativa. Supongamos, por ejemplo, que $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. Entonces la combinación es equivalente a un inductor L' tal que

$$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{40}$$

Equivalencia significa *solamente* que la relación entre la corriente y la tensión, para oscilación estacionaria a la frecuencia angular particular ω, es la misma. Esto permite sustituir L y C por L' en un circuito a esta frecuencia.

Esto puede aplicarse al circuito simple RCL en la Fig. 8.10. Solamente necesitamos recordar las Ecs. 23 y 27, la solución para el circuito RL alimentado con la fuerza electromotriz $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$, y sustituir ωL por $\omega L - \frac{1}{\omega C}$:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \tag{41}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R} \tag{42}$$

Para determinar amplitud $\mathcal{E}_0$ de la fuerza electromotriz, y elementos de circuito dados L, C y R, obtenemos la corriente máxima cuando la frecuencia angular ω es tal que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{43}$$

que es lo mismo que decir que $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, la frecuencia de resonancia del circuito LC no amortiguado. En este caso, la Ec. 39 se reduce a

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \omega t}{R} \tag{44}$$

Es exactamente la corriente que circularía si el circuito solamente constase de la resistencia.

Como ejemplo, consideremos el circuito de la Fig. 8.4*a*, conectado ahora a una fuente o generador de fem alterna, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. La frecuencia angular ω puede ser distinta de la de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la cual, para la capacidad dada (0,01 microfarad) y la inductancia (100 microhenry), es 10^6 radianes/s (ó $10^6/2\pi$ Hz). La Fig. 8.11 muestra la amplitud de la corriente oscilante, en función de ω, para tres valores distintos de la resistencia R en el circuito. Se supone que la amplitud $\mathcal{E}_0$ de la fem es de 100 volt en cada caso. Notemos que el pico de resonancia para $\omega = \omega_0$ es más prominente y agudo para el valor menor de la resistencia. Este es el mismo valor

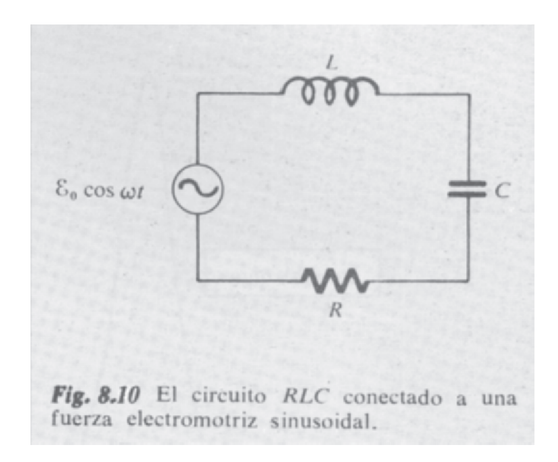


Fig. 8.10 El circuito RLC conectado a una fuerza electromotriz sinusoidal.

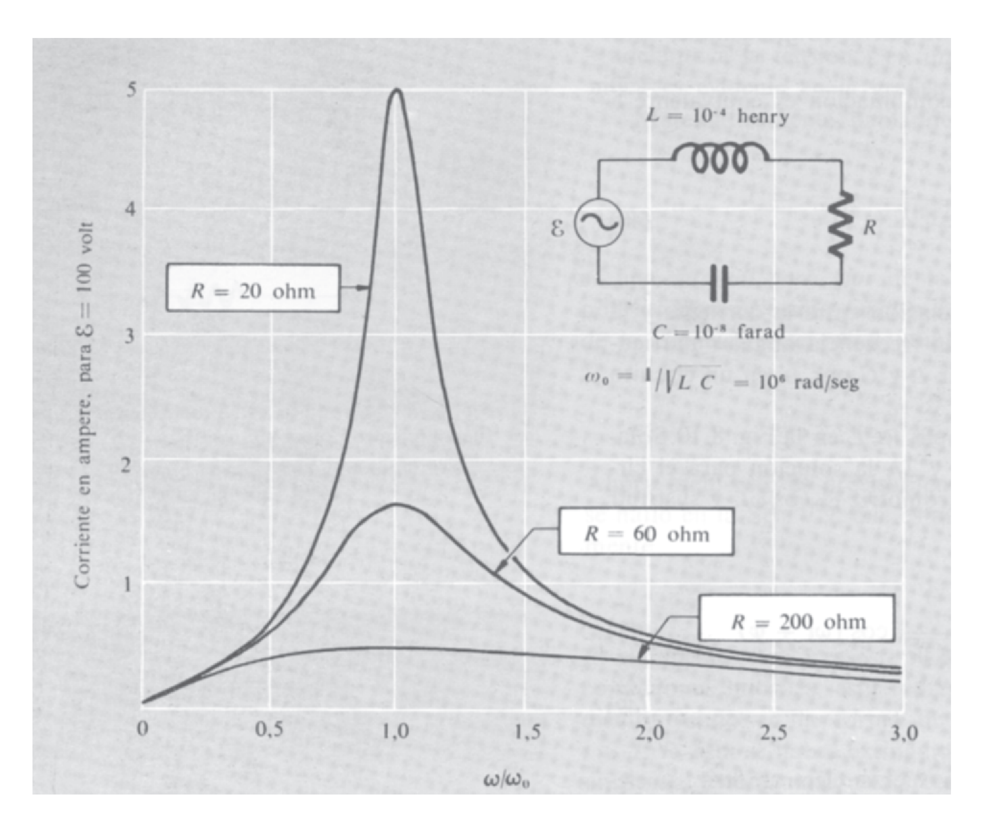


Fig. 8.11 Una fem de 100 volt de amplitud se aplica a un circuito RLC en serie. Los elementos de circuito son los mismos que en el ejemplo del circuito amortiguado en la Fig. 8.4. La amplitud de la corriente se calcula por la Ec. 41 y se representa, en función de ω/ω_0, para tres valores distintos de la resistencia.

de R para el cual, actuando como oscilador sin fem alimentadora, el circuito se comporta como se ve en la parte superior de la gráfica de la Fig. 8.4*b*.

La Q del circuito, definida por la Ec. 14 como $\omega_0 L/R$ *, es $10^6 \times$ $\times\ 10^{-4}/20$, o sea 5 en este caso. Generalmente hablando, cuanto mayor sea la Q de un circuito, tanto mayor será la estrechez y altura del pico de su respuesta en función de la frecuencia angular ω. Para precisar más, consideremos frecuencias en el entorno de ω_0, escribiendo $\omega =$ $= \omega_0 + \Delta\omega$. Entonces para el primer orden de $\Delta\omega/\omega_0$, la expresión

* La ω en la Ec. 14 era la frecuencia angular del oscilador amortiguado libremente, prácticamente la misma que ω_0 para amortiguamiento moderado o ligero. Aquí usamos ω_0 en la definición de Q. En la presente discusión ω es cualquier frecuencia angular que pueda elegirse para aplicar a este circuito.

$\omega L - 1/\omega C$ que está en el denominador de la Ec. 41 puede aproximarse de esta manera:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C(1 + \Delta\omega/\omega_0)} \tag{45}$$

y como ω_0 es $1/\sqrt{LC}$, esto se convierte en,

$$\omega_0 L \left[1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0}\right] \approx \omega_0 L \left(2\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \tag{46}$$

Exactamente en la resonancia, la cantidad subradical en la Ec. 41, es precisamente R^2. Al desplazarse ω de la resonancia, la cantidad subradical se duplica si $|\omega L - 1/\omega C| = R$, o cuando, aproximadamente,

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} \tag{47}$$

Esto significa que la amplitud de la corriente ha bajado a $1/\sqrt{2}$ veces el pico cuando $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2Q$. Éstos son los puntos « potencia-mitad », debido a que la energía, o la potencia, es proporcional al cuadrado de la amplitud, como se explicará en la Sec. 8.5. A menudo se expresa la anchura del pico de resonancia dando la anchura entre los puntos

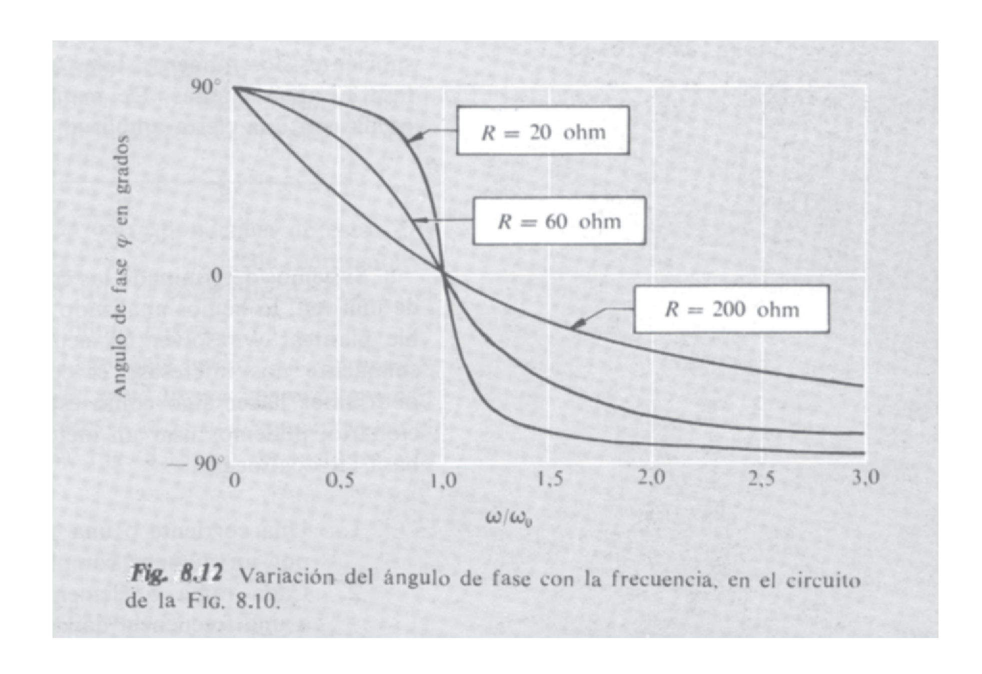


Fig. 8.12 Variación del ángulo de fase con la frecuencia, en el circuito de la Fig. 8.10.

de potencia mitad. Evidentemente ésta es $1/Q$ veces la frecuencia angular de resonancia. Son muy corrientes los circuitos con una Q mucho mayor que la de éste. Un receptor de radio puede seleccionar una emisora particular y aislarla de otras con la ayuda de un circuito resonante con una Q de varios centenares. Es fácil obtener un circuito resonante para microondas con una Q de 10^4, o incluso 10^5.

El ángulo φ, que expresa la fase relativa de las oscilaciones de corriente y fem, varía con la frecuencia de la manera indicada en la Figura 8.12. A frecuencias muy bajas el condensador es el impedimento determinante a la circulación de la corriente, y φ es positivo. En la resonancia $\varphi = 0$. A mayor Q, más bruscamente φ se desplaza de ángulos positivos a negativos al aumentar la frecuencia a partir de ω_0.

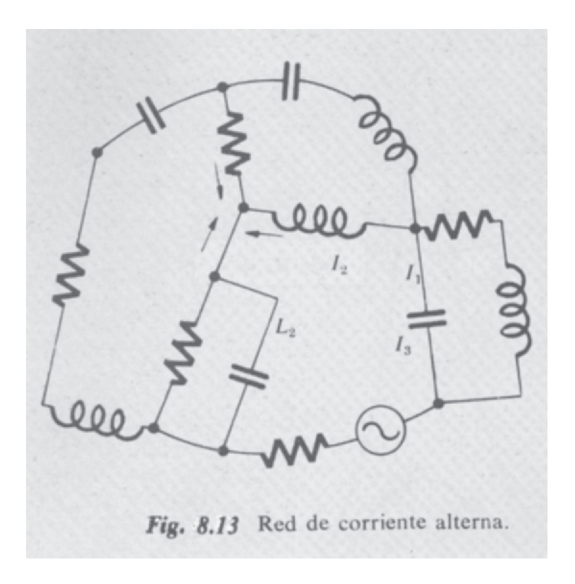


Fig. 8.13 Red de corriente alterna.

8.3 Redes de corriente alterna

Una red de corriente alterna es un conjunto de resistencias, condensadores, e inductores en los cuales circula corriente que oscila estacionariamente a frecuencia angular ω constante. Una o más fuerzas electromotrices, a esta frecuencia, impulsan la oscilación. La Figura 8.13 es un esquema de una red de éstas. La fuente de fuerza electromotriz se representa por el símbolo -(~)-. En una rama del circuito, por ejemplo, la rama que contiene el inductor L_2, la corriente en función del tiempo es

$$I_2 = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \tag{48}$$

Ya que la frecuencia es una constante para todo el circuito, para determinar, en todo instante, la corriente en una rama particular son suficientes dos números, tales como la amplitud I_{02} y la constante de fase φ_2 antes citadas. De manera parecida, la tensión en una rama oscila con una cierta amplitud y fase:

$$V_2 = V_{02} \cos(\omega t + \theta_2) \tag{49}$$

Si hemos determinado las corrientes y tensiones en todas las ramas de una red, lo hemos analizado completamente. Para hallarlo es posible plantear y resolver las ecuaciones diferenciales adecuadas; y si solamente nos interesase el comportamiento transitorio de la red podríamos hacer algo como esto. Sin embargo, para el estado estacionario, podemos usar un método mucho más simple y elegante. Se basa en dos ideas:

1. Una corriente o una tensión alternas pueden representarse por un número complejo.
2. Cada rama o elemento del circuito puede caracterizarse, a una frecuencia dada, por la relación entre la tensión y la corriente en esta rama.

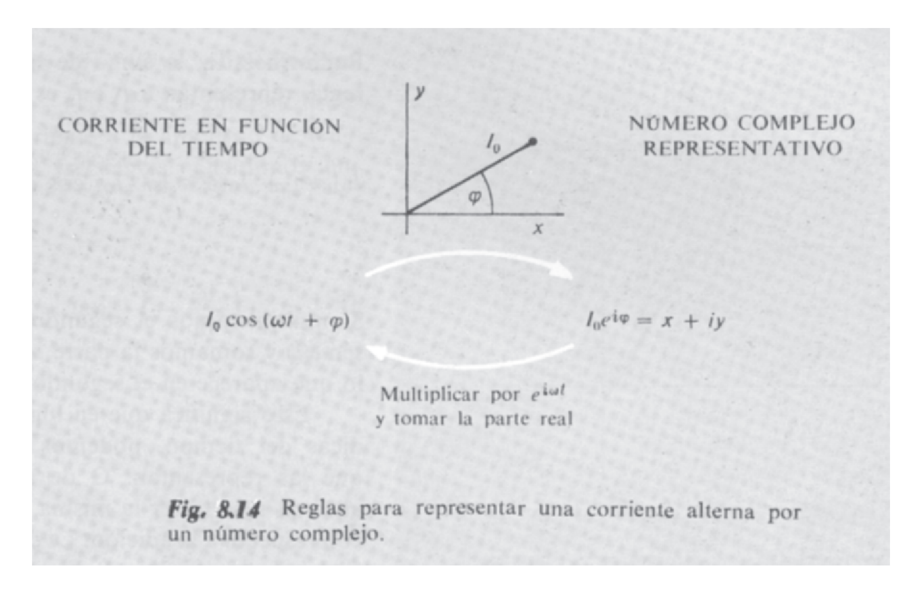


Fig. 8.14 Reglas para representar una corriente alterna por un número complejo.

La primera idea utiliza esta notable identidad matemática

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{50}$$

con $i^2 = -1$. Para llevarlo a cabo adoptamos la siguiente *regla* para la representación:

> Una corriente alterna $I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ se *representa por* el número complejo $I_0 e^{i\varphi}$, es decir, el número cuya parte real es $I_0 \cos\varphi$ y cuya parte imaginaria es $I_0 \operatorname{sen}\varphi$.
>
> De otra manera, si el número complejo $x + iy$ representa una corriente I entonces la corriente en función del tiempo viene dada por la parte real del producto $(x \times iy)e^{i\omega t}$.

La Fig. 8.14 es un resumen de la correspondencia de estos dos métodos. Ya que un número complejo $z = x + iy$ puede representarse gráficamente en el plano, es fácil ver que la constante de fase es el ángulo $tg^{-1}\, y/x$, y la amplitud I_0 el módulo $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Lo que hace útil a todo esto es el siguiente hecho: *La representación de la suma de dos corrientes es la suma de sus representaciones.* Consideremos la suma de dos corrientes I_1 e I_2 que concurren en el punto de conexión de dos hilos en la Fig. 8.13. En un instante t la suma de las corrientes es:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + I_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= (I_{01} \cos\varphi_1 + I_{02} \cos\varphi_2) \cos\omega t \\ &\qquad - (I_{01} \operatorname{sen}\varphi_1 + I_{02} \operatorname{sen}\varphi_2) \operatorname{sen}\omega t \end{aligned} \tag{51}$$

Por otro lado, la suma de los número complejos, que según nuestra regla, representan a I_1 e I_2 es:

$$I_{01}e^{i\varphi_1} + I_{02}e^{i\varphi_2} = (I_{01}\cos\varphi_1 + I_{02}\cos\varphi_2) + i(I_{01}\operatorname{sen}\varphi_1 + I_{02}\operatorname{sen}\varphi_2) \quad (52)$$

Si multiplicamos el segundo miembro de la Ec. 52 por $(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t)$ y tomamos la parte real del producto, hallaremos exactamente lo que aparece en el segundo miembro de la Ec. 51.

Esto significa que en lugar de sumar o restar las funciones periódicas del tiempo, podemos sumar o restar los números complejos que las representan. O de otro modo, el álgebra de las corrientes alternas resulta ser la misma que el álgebra de los números complejos, con respecto a la adición. La correspondencia *no* se extiende al producto. El número complejo $I_{01}I_{02}e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ *no* representa el producto de las dos funciones corriente de la Ec. 51.

No obstante, solamente necesitamos llevar a cabo la suma de corrientes y tensiones para analizar el circuito. Por ejemplo, en la unión donde I_1 e I_2 concurren, en la Fig. 8.13, existe el requisito físico de que en *todo instante* el flujo neto de corriente en la unión sea nulo. De aquí que debe cumplirse la condición

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (53)$$

siendo I_1, I_2 e I_3 las *actuales funciones periódicas del tiempo*. Gracias a nuestra correspondencia, esto puede expresarse algebraicamente de manera simple, como suma de tres números complejos que es nula. Las tensiones pueden manejarse de la misma manera. La suma de las caídas de tensión, en un instante, a lo largo de una malla de la red, debe ser igual a la fuerza electromotriz en la malla en este instante. Esta condición que relaciona las funciones periódicas tensión que puede sustituirse de la misma manera por la expresión de la suma de números complejos, las representaciones de las distintas funciones oscilatorias $V_1(t)$, $V_2(t)$, etc.

8.4 Admitancia e impedancia

La relación entre el flujo de corriente en un elemento de circuito y la tensión en el elemento puede expresarse como una relación entre los números complejos que representan la tensión y la corriente. Consideremos la combinación resistencia-inductancia en la Fig. 8.5.

La oscilación de tensión se representa por $\mathcal{E}_0$ y la de corriente por $I_0 e^{i\varphi}$, donde $I_0 = \mathcal{E}_0/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ y tg $= -\omega L/R$. La diferencia de fase φ y la relación de la amplitud de corriente a la amplitud de tensión son propiedades del circuito a esta frecuencia. Definimos un número complejo Y como sigue:

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \text{con} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \tag{54}$$

Entonces se cumple la relación

$$I = YV \tag{55}$$

siendo V el número complejo que representa la tensión a través de la combinación en serie R y L. e I es el número complejo que representa la corriente. A Y se le llama *admitancia*. La misma relación puede expresarse con el recíproco de Y, designado por Z y que se llama impedancia:

$$V = \left(\frac{1}{Y}\right) I = ZI \tag{56}$$

Aquí hacemos uso del producto de dos números complejos, pero solamente uno de los números es la representación de una corriente o de una tensión alterna. El otro es la impedancia o la admitancia.

La impedancia se mide en ohm. En realidad, si el elemento de circuito hubiese consistido solamente de resistencia R, la impedancia sería real e igual a R, así que la Ec. 56 se parecería a la ley de Ohm para un circuito de corriente continua: $V = RI$.

La admitancia de un inductor sin resistencia es la cantidad imaginaria $Y = -i/\omega L$. El factor $-i$ muestra que la oscilación de corriente tiene la fase retrasada en $\pi/2$ con respecto a la tensión. En el diagrama del número complejo, si la tensión se representa por V (Fig. 8.15*b*), la corriente debería representarse por I situada como se representa aquí. Para el condensador, $Y = i\omega C$, como puede verse de la expresión para la corriente en la Fig. 8.8. En este caso V e I están relacionadas como se indica en la Fig. 8.15*c*. El esquema añadido a cada una de las figuras muestra cómo debe especificarse el signo relativo de V e I. A menos que esto se haga convenientemente, « adelanto » o « retraso » no tienen sentido. Adviértase que siempre definimos el sentido positivo de la corriente para que una tensión positiva aplicada a una resistencia origine corriente positiva (Fig. 8.15*a*).

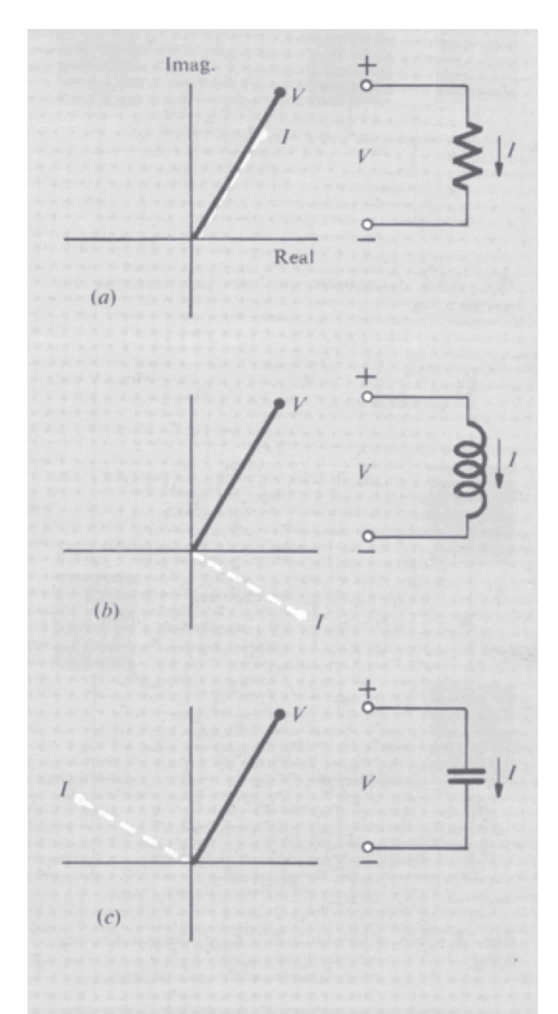


Fig. 8.15 V e I son números complejos que representan la tensión en un elemento de circuito y la corriente a través del mismo. La fase relativa de las oscilaciones de corriente y de tensión se manifiesta aquí por el ángulo entre los «vectores». (*a*) En la resistencia, la corriente y la tensión están en fase.
(*b*) En el inductor, la corriente está rezagada de la tensión.
(*c*) En el condensador, la corriente adelanta a la tensión.

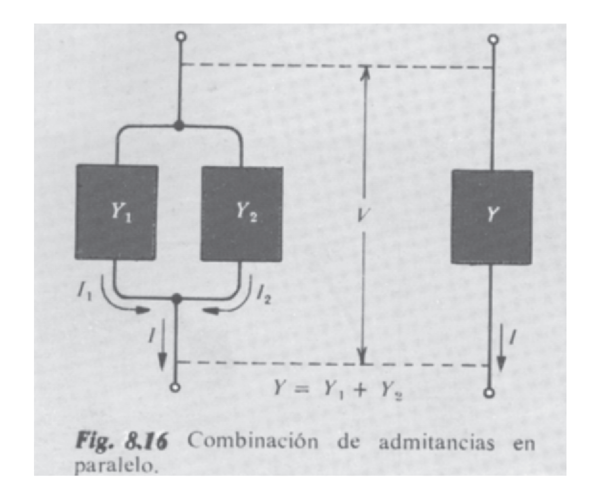


Fig. 8.16 Combinación de admitancias en paralelo.

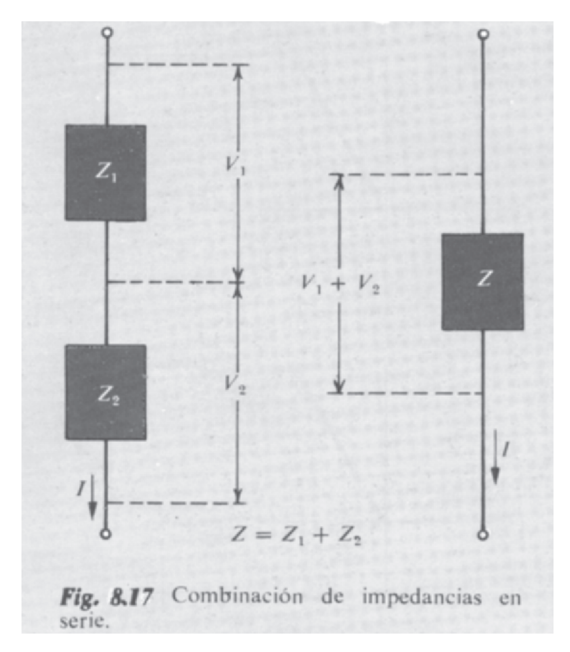


Fig. 8.17 Combinación de impedancias en serie.

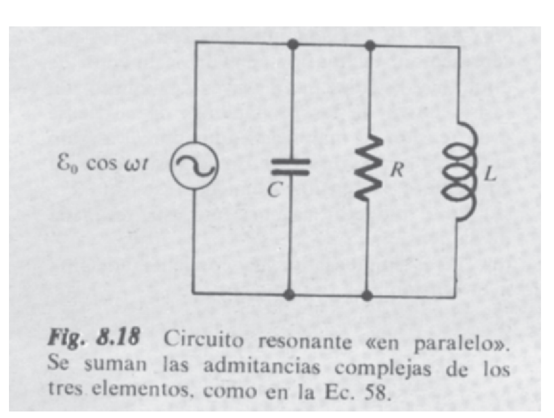


Fig. 8.18 Circuito resonante «en paralelo». Se suman las admitancias complejas de los tres elementos, como en la Ec. 58.

Las propiedades de los tres elementos básicos de circuito se resumen a continuación:

Símbolo	*Admitancia*, Y	*Impedancia*, $Z = \frac{1}{Y}$
R (resistencia)	$\frac{1}{R}$	R
L (bobina)	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
C (condensador)	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$
	$I = YV$	$V = ZI$

Podemos formar cualquier circuito con estos elementos. Cuando se conectan en paralelo elementos o combinación de elementos, es conveniente utilizar la admitancia, pues en este caso las admitancias se suman. En la Fig. 8.16 dos « cajas negras » con admitancias Y_1 e Y_2 se conectan en paralelo. Entonces tenemos

$$I = I_1 + I_2 = Y_1V + Y_2V = (Y_1 + Y_2)V \tag{57}$$

lo que indica que la caja negra equivalente tiene una admitancia $Y = Y_1 + Y_2$. De la Fig. 8.17 es evidente que para elementos conectados en *serie* las *impedancias* se suman. Parece como si estuviésemos hablando de circuitos de corriente continua. De hecho, hemos reducido ahora el problema del circuito de c. a. al problema del circuito en c. c., sólo con esta diferencia: los números que manejamos son números complejos.

Como ejemplo, consideremos el circuito « *RCL* en paralelo » de la Fig. 8.18. La admitancia combinada de las tres ramas en paralelo es

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L} \tag{58}$$

La tensión es simplemente $\mathcal{E}_0$, así que la corriente compleja es

$$I = YV = \mathcal{E}_0 \left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right] \tag{59}$$

La amplitud de la oscilación de corriente es el módulo del número

complejo I, el cual es $\mathcal{E}_0 [(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2]^{1/2}$ y el ángulo de fase es $\text{tg}^{-1} (R\omega C - R/\omega L)$.

De esta manera solamente podemos tratar con elementos de circuito *lineales*, elementos en los que la corriente es proporcional a la tensión. En otras palabras, nuestro circuito debe definirse por una ecuación diferencial lineal. No podemos aún definir la impedancia, de un elemento, no lineal. Los elementos de circuito no lineales son dispositivos muy importantes e interesantes. Se habrán visto algunos en el laboratorio, y puede comprenderse fácilmente por qué no admiten fácilmente esta clase de análisis.

Además, todo esto se afirmó en las oscilaciones continuas a frecuencia constante. El comportamiento transitorio del circuito es un problema distinto. Sin embargo, para circuitos lineales, los argumentos que acabamos de desarrollar tienen cierta utilidad, incluso para transitorios. La razón es que por superposición de oscilaciones estacionarias de varias frecuencias podemos representar un comportamiento no estacionario, y la respuesta a cada una de las frecuencias individuales puede calcularse como si estuviese presente solamente esta frecuencia.

8.5 Potencia y energía en circuitos de corriente alterna

Si la tensión en una resistencia es $V_0 \cos \omega t$, la corriente es $I = (V_0/R) \cos \omega t$. La potencia instantánea, es decir, la variación instantánea de la energía con el tiempo que se disipa en la resistencia es

$$P = RI^2 = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t \qquad (60)$$

Ya que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ en varios ciclos es $^1/_2$, el valor medio de la potencia disipada en el circuito es

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} \qquad (61)$$

Se acostumbra a expresar la tensión y la corriente en un circuito de c. a. dando $1/\sqrt{2}$ veces la amplitud en vez de la amplitud. A este valor se le llama a menudo « valor cuadrático medio » o « valor eficaz ». Esto da cuenta del factor $^1/_2$ de la Ec. 61, así que

$$\bar{P} = \frac{V_{\text{vcm}}^2}{R} \qquad (62)$$

Por ejemplo, la tensión de la línea de distribución para usos domés-

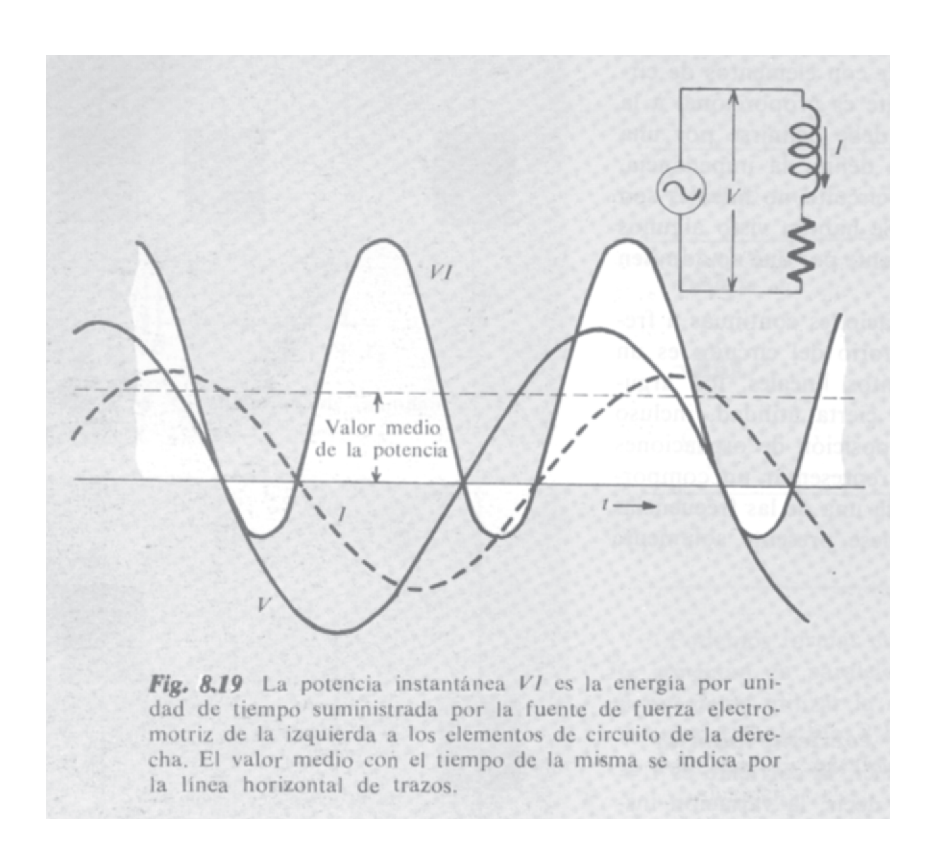


Fig. 8.19 La potencia instantánea VI es la energía por unidad de tiempo suministrada por la fuente de fuerza electromotriz de la izquierda a los elementos de circuito de la derecha. El valor medio con el tiempo de la misma se indica por la línea horizontal de trazos.

ticos, de 120 volt, corresponde a una *amplitud* $120\sqrt{2}$ volt. La diferencia de potencial entre los terminales de un enchufe de una habitación (si la tensión es la normal) es

$$V(t) = 170 \cos 377t \tag{63}$$

con V en volt y t en segundos. Un amperímetro de c. a. está calibrado para leer 1 ampere cuando la amplitud de la corriente es 1,414 ampere.

En general el valor instantáneo de la energía liberada por unidad de tiempo en un elemento de circuito es VI, el producto de la tensión y la corriente instantáneas, con la debida consideración al signo. Consideremos este aspecto de la corriente que circula en el circuito simple LR en la Fig. 8.5. En la Fig. 8.19 hemos vuelto a dibujar las gráficas de la corriente y de la tensión y hemos añadido una curva proporcional al producto VI. El valor positivo de VI significa que se va transfiriendo energía a la combinación LR desde la fuente de fuerza electromotriz, o generador. Obsérvese que VI es negativo en ciertas partes del ciclo. En estos períodos cierta energía vuelve al generador. Esto se explica por la oscilación de la energía almacenada en el campo magnético del inductor. Esta energía almacenada, $\frac{1}{2}LI^2$, pasa por un máximo dos veces en cada ciclo completo.

La potencia *media* $\bar{P}$, corresponde a la línea horizontal de trazos. Para calcular su valor, consideremos el producto VI,. con $V = \mathcal{E}_0$ $\cos \omega t$ e $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$:

$$VI = \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$
$$= \mathcal{E}_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi) \qquad (64)$$

El término proporcional a $\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t$ tiene valor medio temporal nulo, lo cual es evidente si se escribe $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t$, mientras que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ es $\frac{1}{2}$. Así que para el valor medio con el tiempo tenemos

$$\bar{P} = \overline{VI} = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi \qquad (65)$$

Si la corriente y la tensión se expresan ambas como valores eficaces, en volt y ampere, respectivamente,

$$\underset{\text{(watt)}}{\bar{P}} = \underset{\text{(volt)}}{V_{\text{vcm}}} \; \underset{\text{(amp.)}}{I_{\text{vcm}}} \cos \varphi \qquad (66)$$

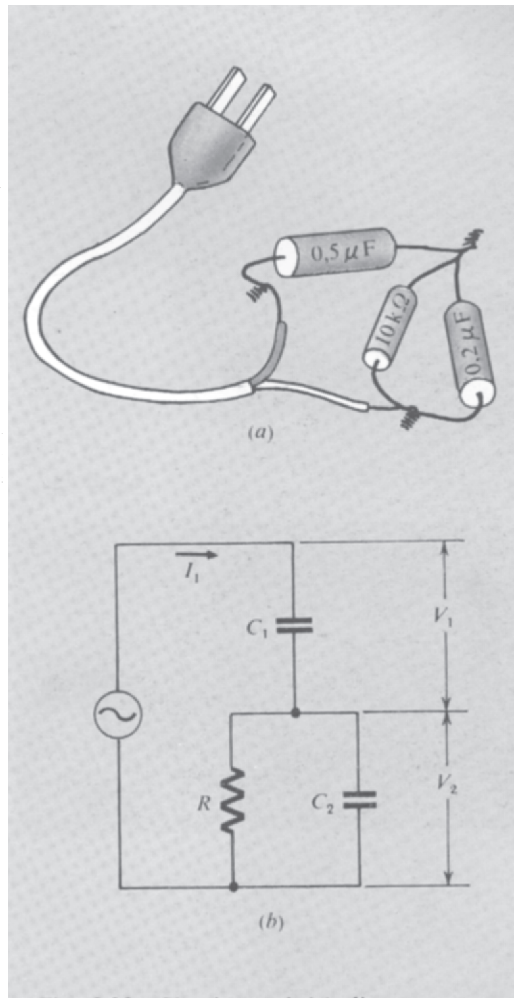


Fig. 8.20 Circuito real (*a*) dispuesto para ser conectado a una fuente de fuerza electromotriz, y (*b*) diagrama del circuito.

En este circuito, toda la energía disipada lo es en la resistencia R. Naturalmente que todo inductor real tiene cierta resistencia. Para el análisis del circuito, la incluimos con la resistencia R. Por descontado que el calor se desprende en el lugar real de la resistencia.

Para practicar con los métodos desarrollados en la Sec. 8.4, analizaremos el circuito de la Fig. 8.20*a*. Una resistencia de 10 000 ohm, 1 watt, se ha conectado a dos condensadores de capacidad 0,2 y 0,5 microfarad (μF). Proponemos conectarlos a la red de 120 volt, 60 ciclos. *Pregunta:* ¿Se calentará demasiado la resistencia? Para hallar si la potencia media disipada en R excede de 1 watt, calculamos las corrientes y las tensiones que esperamos medir en este circuito. Una manera de operar en el circuito es como sigue.

(i) La admitancia de $C_2 = i\omega C_2 = (377)(2 \times 10^{-7})i$
$= 0{,}754 \times 10^{-4} i \text{ ohm}^{-1}$

(ii) Admitancia de la resistencia $= \dfrac{1}{R} = 10^{-4} \text{ ohm}^{-1}$

(iii) Admitancia de [R ∥ C] $= 10^{-4}(1 + 0{,}754i) \text{ ohm}^{-1}$

(iv) Impedancia de [R ∥ C] $= \dfrac{1}{10^{-4}(1 + 0{,}754i)}$

$$= \frac{10^4(1 - 0{,}754i)}{1^2 + 0{,}754^2}$$

$$= (6360 - 4800i) \text{ ohm}$$

(v) Impedancia de $C_1 = -\dfrac{i}{\omega C} = -\dfrac{i}{(377)(5 \times 10^{-7})}$

$$= -5300i \text{ ohm}$$

(vi) Impedancia del circuito total $= (6360 - 10\,100i)$ ohm

(vii) $$I_1 = \frac{120}{6360 - 10\,100i} = \frac{120(6360 + 10\,100i)}{(6360)^2 + (10\,100)^2}$$

$$= (5{,}37 + 8{,}53i) \times 10^{-3} \text{ amp}$$

Ya que hemos utilizado 120 volt, que es el valor eficaz, obtenemos el valor eficaz de la corriente. Es decir, el módulo del número complejo I_1, que es $[(5{,}37)^2 + (8{,}53)^2]^{1/2} \times 10^{-3}$ ampere ó 10,0 miliampere (mA), es el valor eficaz de la corriente en ampere. En un amperímetro conectado en serie con la línea leeríamos 10 mA. Esta corriente tiene un ángulo de fase $\varphi = -\operatorname{tg}^{-1}(0{,}853/0{,}537)$ o $-1{,}01$ radianes con respecto a la tensión en la línea. El valor medio de la potencia liberada en el circuito total es pues:

(viii) $\bar{P} = (120 \text{ volt})(0{,}010 \text{ amp}) \cos 1{,}01 = 0{,}64$ watt

En este circuito, el único elemento disipativo es la resistencia, así que ésta debe ser la potencia media disipada en ella. Como comprobación podemos hallar la tensión V_2 en la resistencia

(ix) $$V_1 = I_1\left(\frac{-i}{\omega C}\right) = (5{,}37 + 8{,}53i)(-5300i)10^{-3}$$

$$= (45{,}2 - 28{,}4i) \text{ volt}$$

(x) $$V_2 = 120 - V_1 = (74{,}8 + 28{,}4i) \text{ volt}$$

La corriente I_2 en R estará en fase con V_2, así que la potencia media en R será

$$\bar{P} = \frac{V_2{}^2}{R} = \frac{(74{,}8)^2 + (28{,}4)^2}{10^4} = 0{,}64 \text{ watt} \tag{67}$$

lo cual concuerda.

Así que el valor en la resistencia no excede de la potencia indicada, por lo que merece seguridad. Realmente, el que la resistencia se caliente o no, no solamente depende del promedio de potencia disipada sino que también de la facilidad de poder librarse del calor. La potencia disipada en la resistencia solamente es una guía aproximada.

Problemas

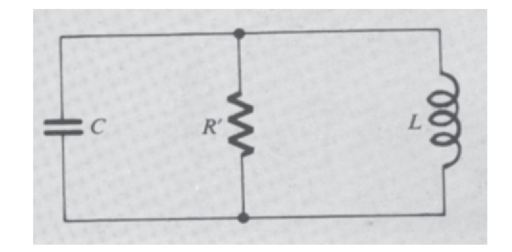
8.1 ¿Cuál debe ser el valor de una inductancia, en henry, que al conectarla en serie con una bombilla de 120 volt, 60 watt, ésta actúa normalmente cuando la combinación se conecta a una línea de 240 volt, 60 ciclos por segundo? (Determínese primero la reactancia inductiva necesaria. Puede despreciarse la resistencia del inductor y la inductancia de la bombilla).

8.2 Una resistencia de 2000 ohm y un condensador de 1 microfarad se conectan en serie a una línea de 120 volt (eficaz), 60 Hz.
(*a*) ¿Cuál es la impedancia?
(*b*) ¿Cuál es el valor eficaz de la corriente?
(*c*) ¿Cuál es la potencia disipada en el circuito?
(*d*) ¿Qué leemos en un voltímetro de c.a. conectado a los bornes de la resistencia? ¿y del condensador?
(*e*) Las placas horizontales de un tubo de rayos catódicos se conectan a los extremos de la resistencia y las verticales al condensador. Esquematícese lo que esperamos ver en la pantalla.

8.3 Una resistencia de 1000 ohm, un condensador de 500 pF y un inductor 2mH se conectan en paralelo. ¿Cuál es la impedancia de la combinación a una frecuencia de 10 kc/s? ¿Y a una frecuencia de 10 Mc/s? ¿Cuál es la frecuencia a la cual el valor absoluto de la impedancia es mayor?

8.4 En el circuito resonante de la figura el elemento disipativo es una resistencia conectada en paralelo, en lugar de estarlo en serie, con la combinación LC. Hállese la ecuación, análoga a la Ec. 2, que se aplica a este circuito. Hállense también las condiciones en la solución análogas a las que se cumplen en el circuito serie RLC. ¿Si una serie RLC y un circuito paralelo $R'LC$ tienen la misma L, C y Q, cómo debe estar relacionada R' con la R?

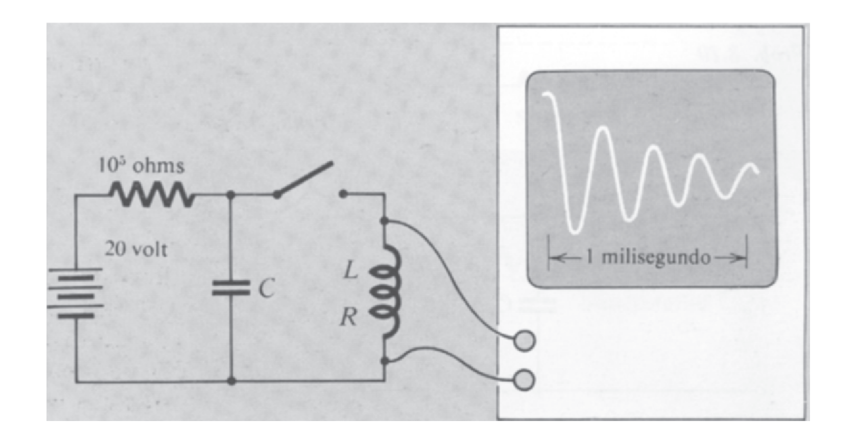
Prob. 8.4

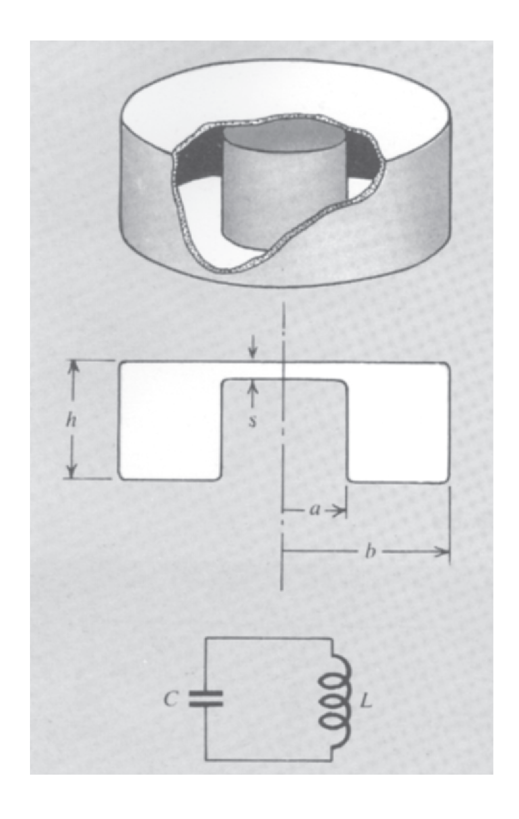


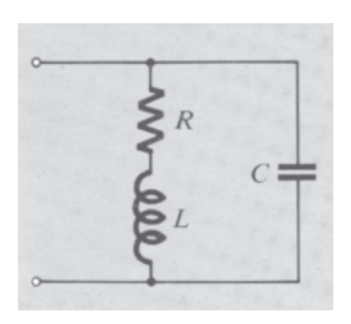
8.5 La bobina del circuito mostrado en el diagrama se sabe que posee una autoinducción de 0,01 henry. Cuando el interruptor se cierra, se dispara el barrido del osciloscopio.
(*a*) Determinar lo mejor que se pueda el valor de la capacidad C.
(*b*) Estimar el valor de la resistencia R de la bobina.
(*c*) ¿Cuál es el valor del voltaje en los bornes de entrada del osciloscopio un tiempo largo, digamos 1 segundo, después de haber cerrado el interruptor?

8.6 Para el circuito de la Fig. 8.3*a*, determínense los valores de β_1 y β_2 para el caso sobreamortiguado, con R = 600 ohm. Determínese también la relación de B a A, las constantes en la Ec. 16.

Prob. 8.5







Prob. 8.10

8.7 Una cavidad resonante de la forma indicada en la figura es la parte esencial de muchos osciladores de microondas. Puede considerarse como un simple circuito «LC». La inductancia es la del toroide con una vuelta; este inductor está conectado directamente a las placas del condensador. Hállese una expresión para la frecuencia de resonancia de este circuito, y represéntese esquemáticamente la configuración de los campos eléctricos y magnético.

8.8 Para el circuito amortiguado RLC de la Fig. 8.3, hallar una expresión para la energía total almacenada en el circuito, la energía en el condensador más la energía en la bobina de inducción, en cierto instante t. Demostrar que la condición de amortiguamiento crítico, $R = 2\sqrt{L/C}$, es aquella en la que la energía total se disipa más rápidamente.

8.9 Utilizando las ecuaciones 10 y 13, expresar el efecto del amortiguamiento sobre la frecuencia de un circuito serie RLC. Sea $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la frecuencia angular del circuito no amortiguado. Supongamos que se ha añadido suficiente resistencia para que la Q pase de ∞ a 1000. ¿Con esto, en qué porcentaje está desfasada la frecuencia angular ω de ω_0?

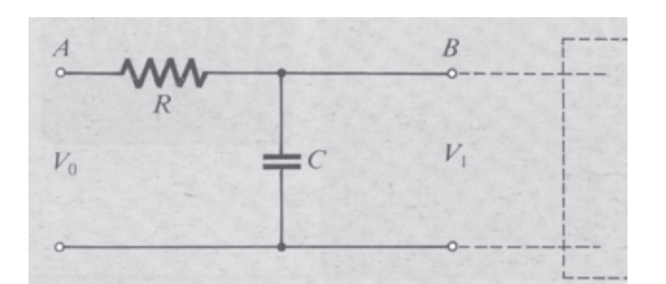
8.10 ¿Es posible hallar una frecuencia para la cual la impedancia en los terminales de este circuito sea puramente real?

8.11 Un voltaje alterno $V_0 \cos \omega t$ se aplica en A a los terminales. Los terminales en B están conectados a un amplificador de audio de impedancia de entrada muy elevada. (O sea, la corriente que circula dentro del amplificador es despreciable.) Calcular la relación $|V_1|^2/V_0^2$. Siendo $|V_1|$ el valor absoluto de la amplitud del voltaje complejo en los terminales B. Elíjanse valores para R y C para que $|V_1|^2/V_0^2 = 0{,}1$ para una señal de 5000 Hz. Este circuito es el más primitivo de los filtros «pasa-bajo», proporcionando una atenuación que aumenta al aumentar la frecuencia. Demostrar que, para frecuencias suficientemente altas, la potencia de señal se reduce en un factor 1/4 cada vez que se duplica la frecuencia. ¿Puede diseñarse un filtro con una acción más drástica, tal como un factor 1/16 por octava?

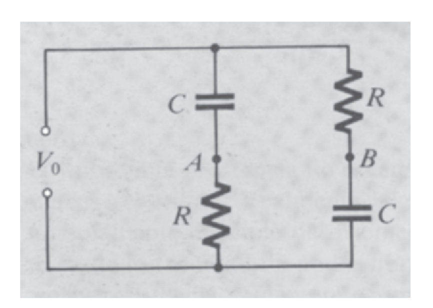
8.12 Sea $V_{AB} = V_B - V_A$, en este circuito. Demostrar que $|V_{AB}|^2 = V_0^2$ para cualquier ω. Hállese la frecuencia angular para la cual V_{AB} está desfasada 90° con V_0.

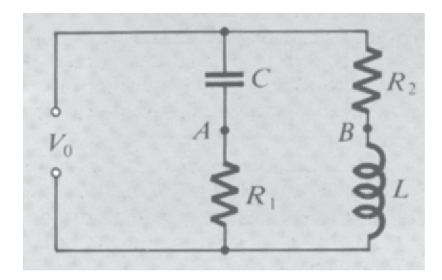
8.13 Demostrar que si se satisface la condición $R_1R_2 = L/C$ por las componentes del circuito indicado, la diferencia de voltaje entre los puntos A y B será nula para cualquier frecuencia. Discútase la adecuación de este circuito como puente de ca para la medida de inductancias desconocidas.

Prob. 8.11



Prob. 8.12





Prob. 8.13

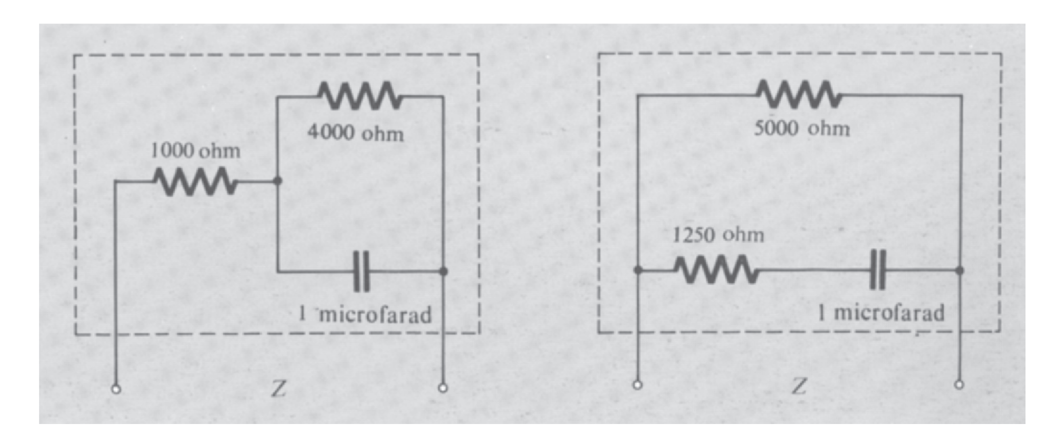
8.14 En el laboratorio hallamos una bobina de coeficiente de autoinducción L desconocido y de resistencia interna desconocida. Usando un óhmetro de cc, un voltímetro de ca de alta impedancia, un condensador de 1 microfarad, y un generador de señal de 1000 Hz, determinar L y R como sigue: Según el óhmetro, R es de 35 ohm. Se conecta el condensador en serie con la bobina y el generador de señal. El voltaje en ambos bornes es de 10,1 volts. El voltaje en bornes del condensador es de 15,5 volts. Puede también, como comprobación, medir el voltaje entre los extremos de la bobina que es de 25,4 volts. ¿Cuánto vale L? ¿La comprobación es correcta?

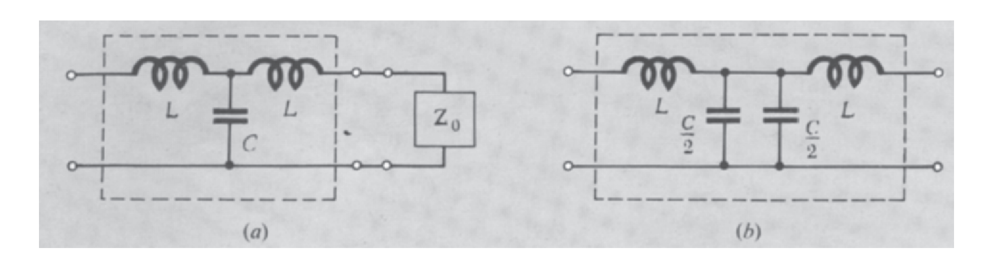
8.15 Demostrar que la impedancia Z en los terminales de cada uno de los circuitos indicados es

$$\frac{5000 + 16 \times 10^{-3}\omega^2 - 16i\omega}{1 + 16 \times 10^{-6}\,\omega^2}$$

Ya que presentan, para cualquier frecuencia, la misma impedancia, las dos cajas negras son completamente equivalentes e indistinguibles desde el exterior. Véase si puede descubrirse las reglas generales para construir la caja de la derecha, dando los valores de las resistencias y capacidades en la caja de la izquierda.

Prob. 8.15





Prob. 8.16

8.16 La caja (*a*) con cuatro terminales contiene un condensador C y dos bobinas de inducción de igual coeficiente de autoinducción L conectadas como se muestra. A los terminales de la derecha ha de conectarse una impedancia Z_0. Para una frecuencia angular ω dada hallar el valor que debe tener Z_0 para que la impedancia resultante entre los terminales de la izquierda (la impedancia de «entrada») sea igual a Z_0. Se hallará que el valor requerido de Z_0 es una resistencia pura R_0, con tal que $\omega^2 < 2/LC$. Una cadena de tales cajas pueden conectarse juntas para formar un circuito en escalera parecido a la escalera de resistencias del Problema 4.32. Si la cadena termina en una resistencia del correcto valor R_0, su impedancia de entrada a la frecuencia angular ω será R_0, no importa el número de cajas que formen la cadena.

¿Cuál es Z_0 en el caso particular $\omega = \sqrt{2/LC}$? Ayuda a comprender este caso advertir que el contenido de la caja (*a*) puede igualmente representarse correctamente por la caja (*b*).

9

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

9.1 *«Algo se ha omitido»*

Volvamos a ver las relaciones entre cargas y campos. Como ya vimos en el Cap. 2, una expresión equivalente a la ley de Coulomb es la relación diferencial

$$\text{div}\ \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1}$$

entre la densidad de carga eléctrica ρ y el campo eléctrico **E**. Esto se cumple tanto para cargas estacionarias como para cargas móviles. Es decir, ρ puede ser una función del tiempo al igual que de la posición. Como ya se señaló en el Cap. 5, el hecho de que la Ec. 1 se cumpla para cargas en movimiento, es compatible con la *invariancia de carga*. Prescindiendo de cómo se mueva una partícula aislada, su carga, medida por la integral de **E** extendida a una superficie que la rodee, vale lo mismo en cualquier sistema de referencia.

La carga eléctrica en movimiento es una corriente eléctrica. Puesto que la carga ni se crea ni se destruye, la densidad de carga ρ y la densidad de corriente **J** satisfacen siempre la condición

$$\text{div}\ \mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2}$$

Escribimos por primera vez esta « Ecuación de Continuidad » como la Ec. 9 del Cap. 4.

Si la densidad de corriente **J** es constante con el tiempo, la llamamos distribución estacionaria de corriente. El campo magnético de una distribución estacionaria de corriente satisface la ecuación

$$\text{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{3}$$

Esta relación se halló en el Cap. 6.

Ahora nos interesan las distribuciones de carga y los campos variables con el tiempo. Supongamos que tenemos una distribución de carga $\rho(x, y, zt)$ con $\partial\rho/\partial t \neq 0$. Por ejemplo, podíamos tener un condensador que se descarga a través de una resistencia. De acuerdo con la Ec. 2, $\partial\rho/\partial t \neq 0$ implica que

$$\text{div}\ \mathbf{J} \neq 0$$

Pero según la Ec. 3 y puesto que la diferencia del rotacional de *cualquier* función vectorial es idénticamente nula (véase Prob. 2.16),

$$\text{div}\ \mathbf{J} = \mu_0\ \text{div}\,(\text{rot}\ \mathbf{B}) = 0 \tag{4}$$

Esta contradicción nos indica que la Ec. 3 ***no puede ser correcta*** para un sistema en el que la densidad de carga varía con el tiempo. Por descontado, nadie dijo que lo fuera; una distribución estacionaria de corriente, para la cual se cumple la Ec. 3, es aquella en la que ni siquiera la densidad de corriente **J**, dejando aparte la densidad de carga ρ, es dependiente del tiempo.

El problema puede plantearse en términos algo distintos, considerando la integral curvilínea del campo magnético en torno a un hilo que conduce cargas a partir de la placa de un condensador en la Fig. 9.1. Según el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad (5)$$

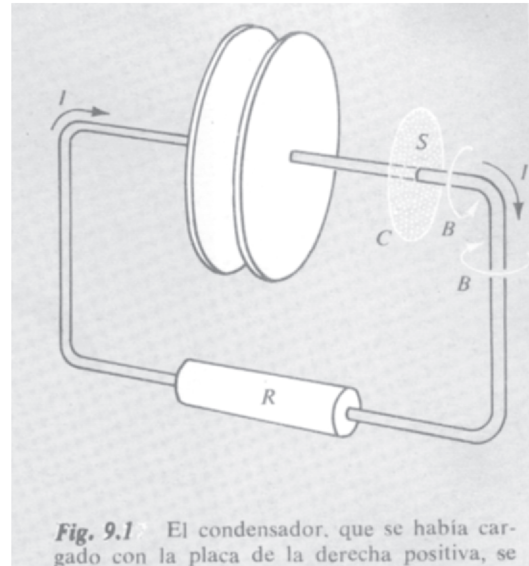


Fig. 9.1 El condensador, que se había cargado con la placa de la derecha positiva, se descarga a través de la resistencia. Existe un campo magnético **B** en torno al hilo. La integral de rot **B** extendida a la superficie S que es atravesada por el hilo, tiene el valor $\mu_0 I$.

La superficie S está situada perpendicularmente al conductor por el que circula una corriente I. En el interior del conductor, rot **B** tiene un valor finito, que vale $\mu_0\mathbf{J}$, y la integral del segundo miembro vale $\mu_0 I$. Esto es, si la curva C está muy cerca del hilo y lejos de la parte entre placas del condensador, el campo magnético no es muy diferente del campo en torno a cualquier hilo recorrido por la misma corriente. Ahora bien, la superficie S' en la Fig. 9.2 es una superficie que también está limitada por C, y puede muy bien usarse en la aplicación del teorema de Stokes, Ec. 5. Sin embargo, a través de esta

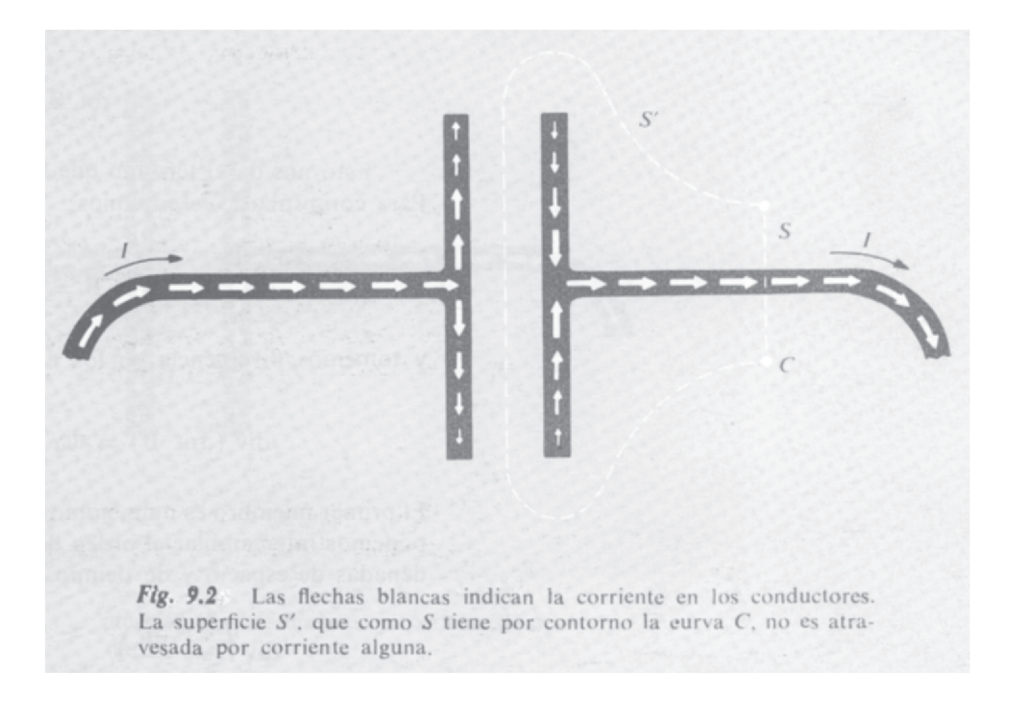


Fig. 9.2 Las flechas blancas indican la corriente en los conductores. La superficie S', que como S tiene por contorno la curva C, no es atravesada por corriente alguna.

superficie *no circula ninguna corriente*. A pesar de esto, rot **B** no puede ser nulo en toda la superficie S' sin violar el teorema de Stokes. Por lo tanto, sobre la superficie S', rot **B** debe depender de algo más que de la densidad de corriente **J**.

Podemos concluir que la Ec. 3 ha de sustituirse por alguna otra relación, en el caso más general de distribución de carga variable. Escribamos en su lugar

$$\text{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0\ \mathbf{J} + (?) \tag{6}$$

y veamos si podemos hallar lo que debe ser (?).

Otra forma de razonamiento nos sugiere la respuesta. Recordemos que las leyes de transformación del campo electromagnético, Ec. 58 del Cap. 6, son completamente simétricas en **E** y **B**. Ahora bien, en el fenómeno de la inducción de Faraday, un campo magnético variable va acompañado de un campo eléctrico, de la forma descrita por la Ec. 30, del Cap. 7:

$$\text{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7}$$

Esta es una relación local entre los campos eléctricos y magnéticos en el vacío — no intervienen directamente las cargas. Si debe prevalecer la simetría con respecto a **E** y **B**, debemos esperar que un *campo eléctrico variable* pueda dar lugar a un *campo magnético*. Debería existir un fenómeno de inducción expresado por una ecuación como la Ec. 7, pero con los papeles de **E** y **B** cambiados. Resultará que además deberemos cambiar el signo, pero esto será todo:

$$\text{rot}\ \mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{8}$$

Esto nos da el término que falta, es decir, requerido en la Ec. 6. Para comprobarlo, escribamos

$$\text{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{9}$$

y tomemos divergencia en los dos miembros:

$$\text{div}\ (\text{rot}\ \mathbf{B}) = \text{div}\left(\mu_0\,\mathbf{J}\right) + \text{div}\left(\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{10}$$

El primer miembro es nulo, como ya se señaló. En el segundo miembro podemos intercambiar el orden de derivación con respecto a las coordenadas de espacio y de tiempo. Así pues

$$\text{div}\left(\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\ \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

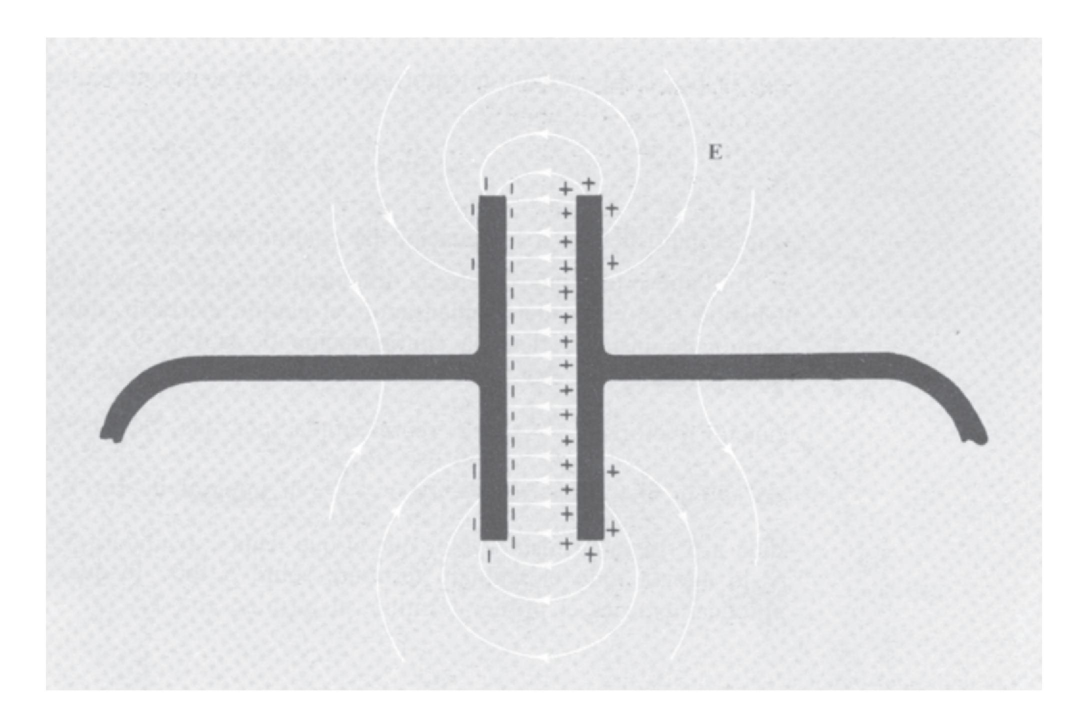


Fig. 9.3 Campo eléctrico en cierto instante. El valor de **E** *disminuye* en todo punto en el transcurso del tiempo.

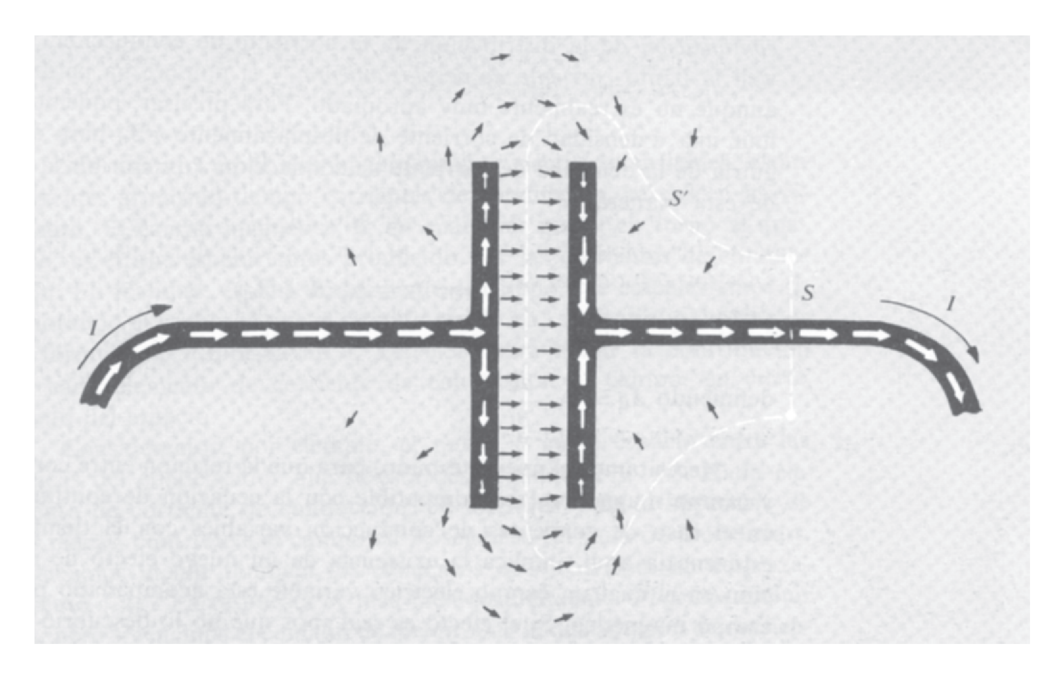


Fig. 9.4 Corriente de conducción (flechas blancas) y corriente de desplazamiento (flechas negras).

por la Ec. 1. El segundo miembro de la Ec. 10 se convierte ahora en

$$\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{12}$$

que es nulo debido a la ecuación de continuidad, Ec. 2.

El nuevo término resuelve la dificultad que apareció en la Fig. 9.2. Cuando sale carga del condensador, el campo eléctrico, que en determinado instante tiene la configuración de la Fig. 9.3, *disminuye* en intensidad. En este caso $\partial \mathbf{E}/\partial t$ señala sentido opuesto al $\mathbf{E}$. La función vectorial $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ está representada por las flechas negras, en la Fig. 9.4. Con rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, la integral de rot $\mathbf{B}$ extendida a S' tiene el mismo valor que el que tenía extendida a S. Sobre S' lo aporta todo el segundo término; sobre S todo lo que cuenta prácticamente es el primer término, el término con $\mathbf{J}$.

9.2 Corriente de desplazamiento

Obsérvese que el campo vectorial $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ parece formar una *continuación* de la distribución de la corriente de conducción. Maxwell la llamó *corriente de desplazamiento*, y el nombre ha perdurado aunque no es realmente muy apropiado. Para precisar, podemos definir una « densidad de corriente de desplazamiento » $\mathbf{J}_d$ para distinguirla de la densidad de corriente de conducción $\mathbf{J}$, y escribir la Ec. 9 de esta manera:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) \tag{13}$$

definiendo $\mathbf{J}_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Necesitamos el nuevo término, para que la relación entre corriente y campo magnético, sea compatible con la ecuación de continuidad, en el caso de corrientes de conducción variables con el tiempo. Si esto encaja aquí, implica la existencia de un nuevo efecto de inducción en el cual un campo eléctrico variable está acompañado por un campo magnético. Si el efecto es real ¿por qué no lo descubrió Faraday? La razón es que no la buscaba, pero hay además una razón más fundamental de por qué los experimentos de Faraday no podían haber revelado efecto alguno atribuible al último término de la Ec. 9

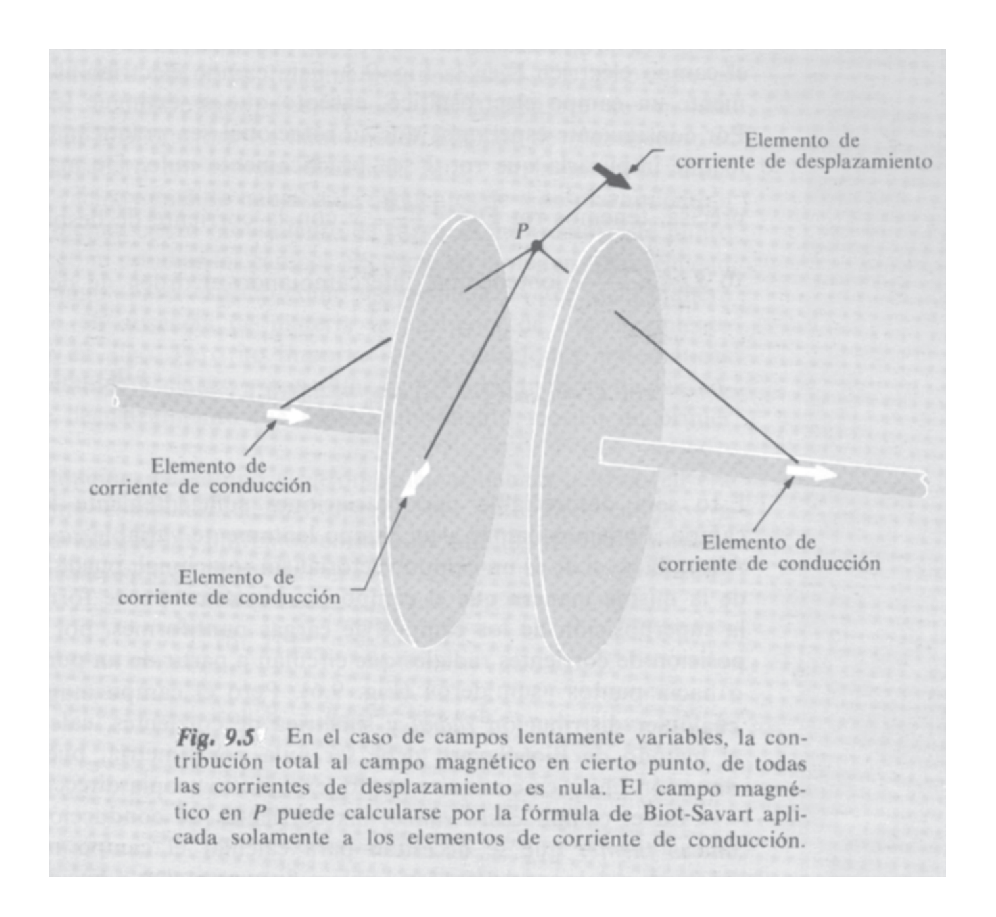


Fig. 9.5 En el caso de campos lentamente variables, la contribución total al campo magnético en cierto punto, de todas las corrientes de desplazamiento es nula. El campo magnético en *P* puede calcularse por la fórmula de Biot-Savart aplicada solamente a los elementos de corriente de conducción.

En todo aparato en el que hayan campos eléctricos variables, están presentes al mismo tiempo corrientes de conducción, cargas en movimiento. El campo magnético **B**, en cualquier punto en torno al aparato, es el que esperaríamos producido por las corrientes de conducción. En realidad, es casi exactamente el campo que calcularíamos si, ignorando el hecho de que el circuito puede no ser continuo, usáramos la fórmula de « Biot-Savart », Ec. 6.38, para hallar la contribución de cada elemento de corriente de conducción al campo, en cierto punto del espacio.

Consideremos, por ejemplo, el punto *P* en el espacio entre las placas del condensador que se está descargando, Fig. 9.5. Cada elemento de corriente de conducción, en los hilos y en la superficie de las placas, contribuye al campo en *P*, según la fórmula de Biot-Savart. ¿Debemos incluir también los elementos de « corriente de desplazamiento » $\mathbf{J}_d$? La respuesta es más bien sorprendente. *Podemos* incluir $\mathbf{J}_d$; pero si tenemos el cuidado de incluir *toda* la distribución de corrientes de desplazamiento, su efecto total será *nulo* para campos que varían de manera relativamente lenta.

Para ver el por qué de esto, advirtamos que la función vectorial $\mathbf{J}_d$,

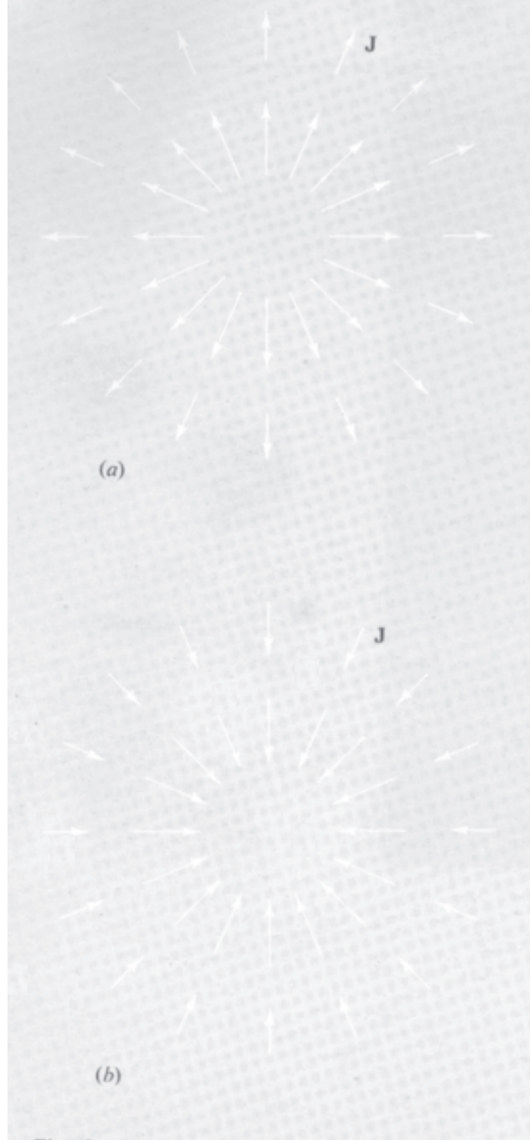


Fig. 9.6 Se enseña lo que se entiende por distribución radial de corriente. La densidad de corriente **J** para fuente puntiforme en (*a*), o para «sumidero» puntiforme en (*b*) es como el campo eléctrico de una carga puntiforme. Toda distribución de corriente para la que rot **J** = 0 puede formarse superponiendo tales manantiales y sumideros y por lo tanto debe tener campo magnético nulo.

indicada por flechas negras en la Fig. 9.4, tiene la misma forma que el campo eléctrico **E** en la Fig. 9.3. Este campo eléctrico es prácticamente un campo electrostático, excepto que se extingue lentamente. Por consiguiente esperamos que su rotacional sea prácticamente nulo, lo que implicaría que rot **J** sea prácticamente nulo. De manera más precisa, tenemos rot $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ y con la corriente de desplazamiento $\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, obtenemos, intercambiando el orden de derivación,

$$\text{rot } \mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \text{ rot}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad (14)$$

Esto será despreciable para variaciones suficientemente lentas del campo. Podemos llamar a un campo lentamente variable *casi-estático*. Ahora bien, si $\mathbf{J}_d$ es un campo vectorial sin rotacional, puede formarse, de la misma manera que el campo electrostático puede formarse por la superposición de los campos de cargas puntiformes, por la superposición de corrientes radiales que circulan a partir de un punto fuente o hacia puntos «sumidero» (Fig. 9.6). Pero el campo magnético de cualquier distribución *radial* y simétrica de corrientes, calculada por el método de Biot-Savart, debe ser nula por simetría, pues no hay dirección única en cualquier punto, excepto la propia dirección radial.

En el campo *casi-estático*, las corrientes de conducción son las únicas *fuentes* que se necesitan para calcular el campo magnético. En otras palabras, si Faraday hubiese dispuesto algo parecido a la Figura 9.5, y hubiese sido capaz de medir el campo magnético en *P*, por ejemplo, utilizando una brújula, no se habría sorprendido. No habría necesitado inventar una corriente de desplazamiento para explicarlo.

Para ver este nuevo efecto de inducción necesitamos campos rápidamente variables. De hecho, necesitamos que las variaciones tengan lugar en el tiempo que emplea la luz en cruzar el aparato. Este es el motivo del por qué la demostración directa tuvo que esperar hasta que Hertz realizase sus experimentos, muchos años después de que la hubiese sido demostrada por Maxwell.

9.3 Ecuaciones de Maxwell

James Clerk Maxwell, después de estudiar las causas de los resultados de las investigaciones de Faraday, se dispuso a formular matemáticamente la teoría de la electricidad y magnetismo. Maxwell no podía usar la relatividad — que apareció cincuenta años más tarde. La constitución eléctrica de la materia era un misterio, la relación entre la luz y el electromagnetismo, insospechada. Muchos de los razo-

namientos que hemos utilizado para efectuar nuestro próximo paso parecen evidentes, no eran imaginables entonces. Sin embargo, el término que hemos estado discutiendo, $\partial \mathbf{E}/\partial t$, aparece de manera natural en su formulación. Le llamó « corriente de desplazamiento ». Maxwell consideró los campos eléctricos tanto en la materia sólida como en el vacío, y cuando hablaba de corrientes de « desplazamiento » a menudo incluía cierto movimiento de carga. Aclararemos este punto en el Cap. 10 al estudiar los campos eléctricos en la materia. En realidad, Maxwell imaginaba el espacio como un medio, el « éter », de manera que incluso en ausencia de materia la corriente de desplazamiento tenía lugar en algo. Pero no importa — sus ecuaciones matemáticas eran perfectamente claras y concretas, y su introducción de las corrientes de desplazamiento fue un descubrimiento teórico de primer orden.

La definición del campo electromagnético debida a Maxwell era esencialmente completa. Hemos llegado por diferentes caminos a distintas partes que las uniremos en la forma de las tradicionalmente llamadas *ecuaciones de Maxwell:*

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Están escritas para los campos en el vacío, en presencia de una densidad de carga eléctrica ρ y de corriente, es decir, cargas en movimiento de densidad **J**.

La primera ecuación es la *ley de la inducción* de Faraday. La segunda expresa la dependencia del campo magnético de la densidad de *corriente de desplazamiento*, o velocidad de variación del campo eléctrico, y de la densidad de la *corriente de conducción* o variación del movimiento de la carga con el tiempo. La tercera ecuación es equivalente a la ley de Coulomb. La cuarta nos indica que no existen fuentes del campo magnético con *excepción* de las corrientes. En el Capítulo 11 tendremos algo más que decir acerca de este aspecto de la naturaleza.

Nótese que la falta de simetría de estas ecuaciones con respecto a **B** y **E**, es enteramente debida a la presencia de carga eléctrica y corriente de conducción eléctrica. En el espacio vacío, los términos con ρ y **J** son nulos y las ecuaciones de Maxwell se convierten en

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad & \text{div } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Aquí lo importante es el término debido a la corriente de desplazamiento. Su presencia, al igual que su contrapartida en la primera ecuación, implica la posibilidad de *ondas electromagnéticas*. Comprendiendo esto, Maxwell desarrolló con brillante éxito, la teoría electromagnética de la luz.

Un recordatorio acerca de las unidades: E va en volts/m, B en tesla, ρ en coulombs/m^3 y J en amperes/m^2. En estas ecuaciones no aparece c. Pero si prescindimos de los términos carga y corriente de la Ec. 15 y comparamos lo que queda con nuestras ecuaciones de Maxwell para el «espacio vacío» (16) se hace evidente que c debe estar oculta en la constante $\mu_0\varepsilon_0$. En realidad $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$. La manera en que esto fija el valor exacto de ε_0 se explica en el Apéndice E.

9.4 Una onda electromagnética

Vamos a construir un campo electromagnético, más bien simple, que satisfaga las ecuaciones de Maxwell en el vacío, Ecs. 16. Supongamos que hay un campo eléctrico $\mathbf{E}$ paralelo al eje z, en todo punto, cuya intensidad dependa solamente de la coordenada espacial y y del tiempo t. Sea esta dependencia de la forma:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}E_0 \operatorname{sen} (y - vt) \tag{17}$$

en donde E_0 y v son simples constantes. El campo llena todo el espacio —al menos todo el espacio con el que ahora estamos interesados. También necesitamos un campo magnético. Supondremos que tiene solamente una componente x que depende de y y de t, como E_z.

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}B_0 \operatorname{sen} (y - vt) \tag{18}$$

donde B_0 es otra constante.

La Fig. 9.7 puede ayudarnos a visualizar estos campos. Es difícil representar gráficamente dos campos tales que llenen todo el espacio. Recordemos que nada varía con x o z; todo lo que ocurra en un punto del eje y está ocurriendo en cualquier punto del plano perpendicular a dicho eje, en este punto. Como el tiempo se desplaza invariablemente hacia la derecha, gracias a la forma particular del argumento de la función seno de las Ecs. 17 y 18. Para este argumento $y - vt$ tiene el mismo valor para $y + \Delta y$ y $t + \Delta t$ que para y y t con tal que $\Delta y = v\Delta t$. Dicho de otro modo, aquí tenemos una onda plana que se propaga a celeridad constante v en la dirección $\hat{\mathbf{y}}$.

Ahora demostraremos que este campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell, si se satisfacen ciertas condiciones. Es fácil

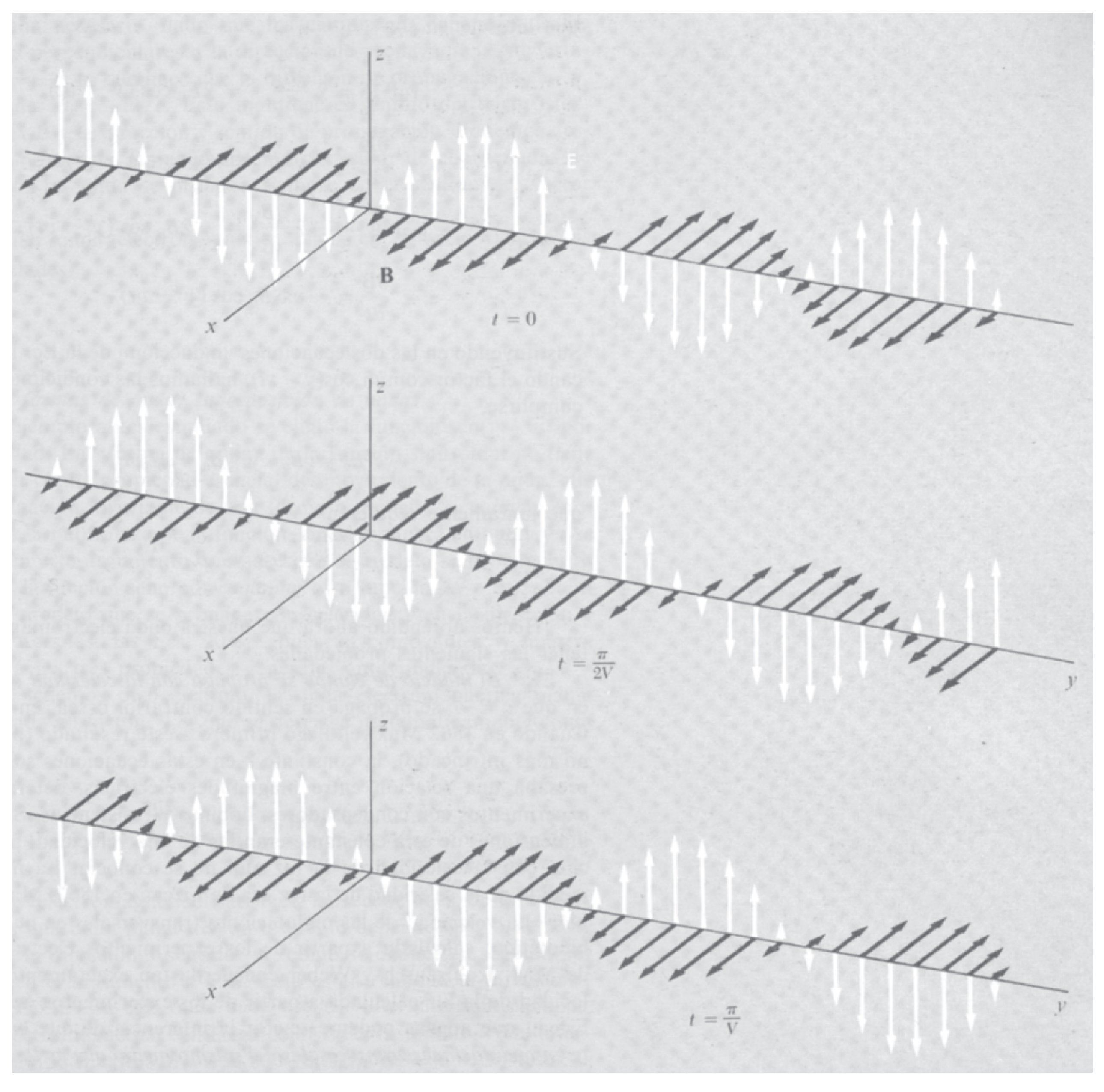


Fig. 9.7 La onda descrita por las ecuaciones 17 y 18 se representa en tres tiempos distintos. Se propaga hacia la derecha en la dirección *y* y sentido positivo.

ver que div **E** y div **B** son nulas para este campo. Las otras derivadas que intervienen son

$$\begin{aligned}
\text{rot }\mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial E_z}{\partial y} = \hat{\mathbf{x}}E_0\cos(y - vt)\\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -v\hat{\mathbf{z}}E_0\cos(y - vt)\\
\text{rot }\mathbf{B} &= -\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\hat{\mathbf{z}}B_0\cos(y - vt)\\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -v\hat{\mathbf{x}}\,B_0\cos(y - vt)
\end{aligned} \tag{19}$$

Sustituyendo en las dos ecuaciones «inducción» de la Ec. 16 y simplificando el factor común $\cos(y - vt)$, hallamos las condiciones que deben cumplirse,

$$E_0 = vB_0 \quad \text{y} \quad B_0 = \mu_0\varepsilon_0 v E_0 \tag{20}$$

que juntamente requieren

$$v = \pm c \quad \text{y} \quad B_0 = \frac{E_0}{c} \tag{21}$$

Hemos aprendido ahora que nuestra onda electromagnética debe tener las siguientes propiedades:

1. *El modelo de campo se propaga con la celeridad c.* En el caso en que $v = -c$ se propaga en sentido contrario, o sea, en sentido $-\hat{\mathbf{y}}$. Cuando en 1862 Maxwell llegó primero a este resultado (por un camino más intrincado), la constante c en estas ecuaciones solamente expresaba una relación entre magnitudes eléctricas, determinada por experimentos con condensadores, bobinas y resistencias. Sin duda, las dimensiones de esta constante eran las de una velocidad, pero su relación con la celeridad de la luz aún no se conocía. La más reciente medida de la celeridad de la luz era de Fizeau en 1857. Maxwell escribió: «La velocidad de las ondulaciones transversales en nuestro medio hipotético, calculada a partir de los experimentos electromagnéticos de MM. Kohlrausch y Weber concuerda tan exactamente con la velocidad de la luz calculada a partir de los experimentos ópticos de M. Fizeau que apenas podemos evitar la inferencia de que *la luz consiste en ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos*». Las cursivas son de Maxwell.

2. *En cada punto de la onda y en cada instante, la intensidad del campo eléctrico es igual a c por la del magnético.* En nuestro ejemplo B está expresado en tesla y E en volt/m; Si el campo eléctrico tiene una intensidad de $3 \cdot 10^4$ volts/m, el campo magnético asociado es de 10^{-4} tesla.

3. *El campo eléctrico y el magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.* Para asegurarnos ya hemos supuesto

esto al construir nuestro ejemplo, pero no es difícil demostrar que es una condición necesaria, dado que los campos no dependen de las coordenadas perpendiculares a la dirección de propagación. Adviértase que, si $v = -c$, lo que hace que la dirección de propagación sea $-\hat{\mathbf{y}}$, debemos tener $B_0 = -E_0/c$. Esto mantiene el sentido del triedro formado por **E, B** y la dirección y sentido de propagación. Podemos describirlo sin referencia a ningún sistema particular de coordenadas de esta manera: La onda se propaga siempre en el sentido del vector $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Cualquier onda electromagnética plana en el vacío tiene estas tres propiedades.

9.5 Otras formas de onda; superposición de ondas

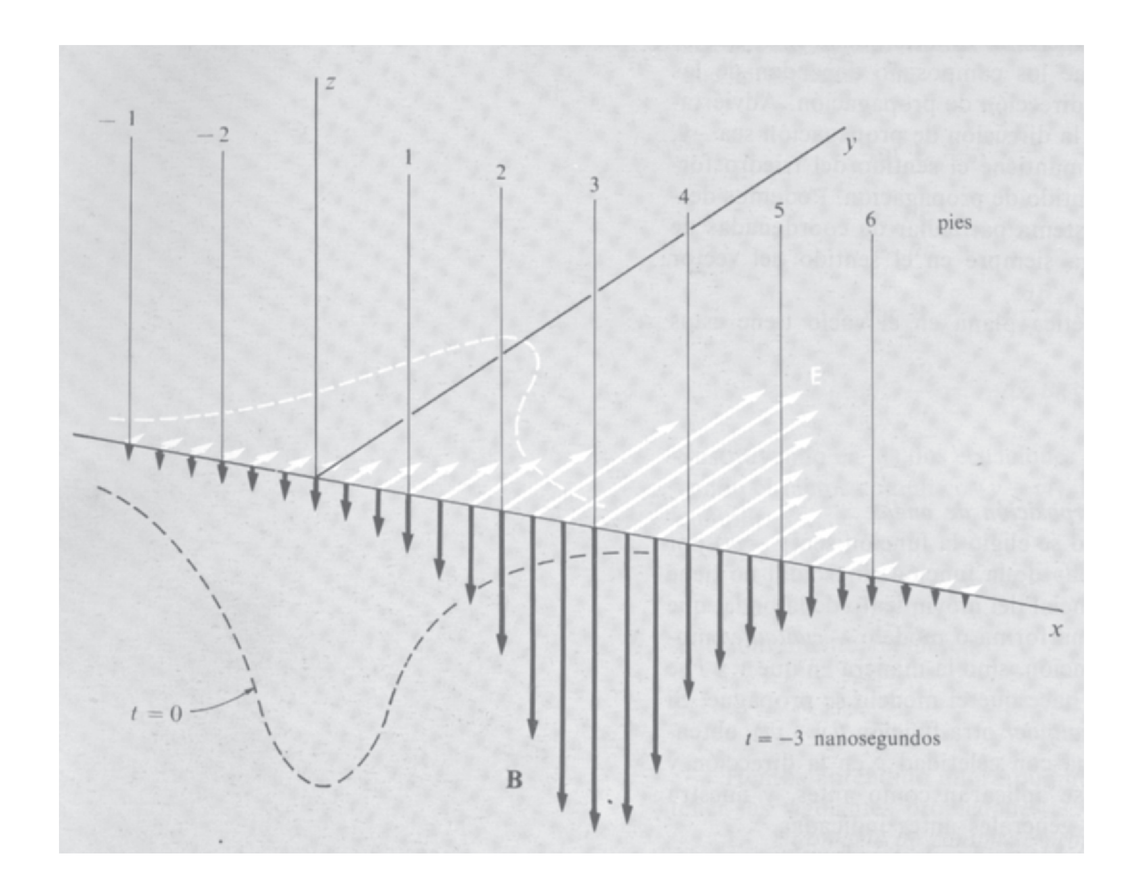
En el ejemplo antes estudiado se eligió la función sen$(y - vt)$ por su simplicidad. La «forma de onda» de la función sinusoidal no tiene *nada que ver* con la propiedad esencial del movimiento de la onda, que es la propagación invariable de una forma o modelo —*cualquier* modelo. No es la naturaleza de la función, sino la manera en que y y t se combinan en este argumento que hace que el modelo se propague. Si sustituimos la función seno por *cualquier* otra función $f(y - vt)$, obtendremos un modelo que se propaga con celeridad v en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{y}}$. Además, las Ecs. 20 se aplicarán como antes, y nuestra onda tendrá las tres propiedades generales antes indicadas.

Ahora tenemos otro ejemplo, la onda electromagnética plana, esquematizada en la Fig. 9.8, que se describe matemáticamente como sigue:

$$\mathbf{E} = \frac{5\hat{\mathbf{y}}}{1 + 4(x + ct)^2} \qquad \mathbf{B} = \frac{-5\hat{\mathbf{z}}}{1 + 4(x + ct)^2} \tag{22}$$

Este campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell, Ecs. 16. Es una onda plana debido a que no depende de y o de z. Se propaga en la dirección y sentido $-\hat{\mathbf{x}}$, como se deduce en seguida por el signo + en el argumento $x + ct$. Esta es en realidad la dirección y sentido de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. En esta onda nada oscila o alterna; es simplemente un pulso electromagnético con larga cola. En el instante $t = 0$ la intensidad del campo máxima $E = 150\,000$ volts/m y $B = 5 \cdot 10^{-4}$ tesla, la experimentará un observador en el origen, o en cualquier otro punto del plano yz. En la Fig. 9.8 hemos indicado el campo tal como era en el instante $t = -3$ nanosegundos, con la distancia indicada fuera en pies (unos 0,3 m). La celeridad de la luz es casi 1 pie/nanosegundo.

Las ecuaciones de Maxwell para **E** y **B** en el espacio vacío son lineales. La superposición de dos soluciones es también una solución. En una misma región pueden propagarse cierto número de ondas electromagnéticas sin afectarse una a otra. El campo **E** en un punto espa-



cio temporal es el vector suma de los campos eléctricos de las ondas individuales, y lo mismo ocurre con el campo magnético **B**.

Un ejemplo importante es la superposición de dos ondas planas similares propagándose en sentidos contrarios. Consideremos una onda que se propaga en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{y}}$, descrita por

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{z}} E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) \qquad \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{x}} E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) \qquad (23)$$

Esta onda difiere poco de la de nuestro primer ejemplo. Hemos introducido la longitud de onda λ de la función periódica.

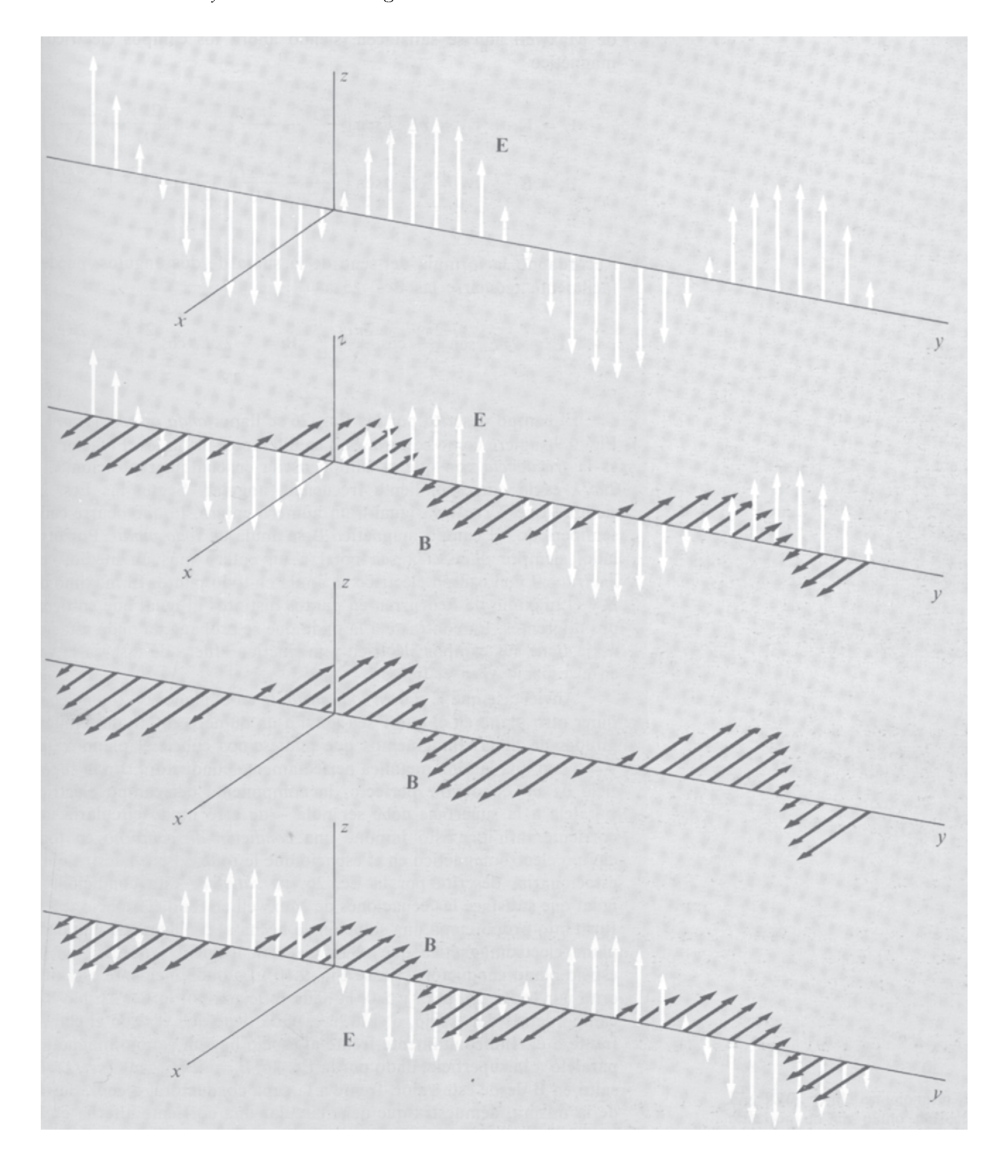
Consideremos ahora otra onda:

$$E_2 = \hat{\mathbf{z}} E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(y + ct) \qquad B_2 = -\hat{\mathbf{x}} E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(y + ct) \qquad (24)$$

Ésta es una onda con la misma amplitud y longitud de onda, pero se propaga en el sentido $-\hat{\mathbf{y}}$. Con las dos ondas presentes, las ecuaciones

Fig. 9.8 La onda descrita por la Ec. 22 se propaga en el sentido negativo de la dirección x. Se muestra 3 nanosegundos antes de que su pico pase por el origen.

Fig. 9.9 Una onda estacionaria resultado de la superposición de una onda que se propaga en el sentido positivo del eje y (Ec. 23) y una onda similar que se propaga en el sentido negativo del mismo eje (Ec. 24). Empezando por la figura superior, los campos se muestran en cuatro instantes diferentes, separados sucesivamente por un octavo de período.


z
E
x
y
z
E
B
x
y
z
B
x
y
z
B
E
x
y

de Maxwell aún se satisfacen, siendo ahora los campos eléctrico y magnético

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{z}}E_0 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{\lambda} + \frac{2\pi ct}{\lambda}\right)\right]$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_0 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{\lambda} - \frac{2\pi ct}{\lambda}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{\lambda} + \frac{2\pi ct}{\lambda}\right)\right] \tag{25}$$

Recordando la fórmula del seno de la suma de dos ángulos, pueden fácilmente reducirse las Ecs. 25 a

$$\mathbf{E} = 2\hat{\mathbf{z}}E_0 \operatorname{sen}\frac{2\pi y}{\lambda} \cos\frac{2\pi ct}{\lambda} \qquad \mathbf{B} = -2\hat{\mathbf{x}}E_0 \cos\frac{2\pi y}{\lambda} \operatorname{sen}\frac{2\pi ct}{\lambda} \tag{26}$$

El campo descrito por las Ecs. 26 se llama *onda estacionaria.* La Fig. 9.9 sugiere como se vería esto en diferentes instantes. El factor c/λ es la ***frecuencia*** con que el campo oscila en cualquier posición x, y $2\pi c/\lambda$ es la correspondiente frecuencia angular. Según las Ecs. 26 siempre que $2\ ct/\lambda$ sea igual a un número entero, lo que ocurre cada semiperíodo, el campo magnético **B** se anula en *todo punto.* Por otro lado, siempre que $2ct/\lambda$ sea igual a un entero más un medio, $\cos 2\pi ct/\lambda = 0$ y el campo eléctrico se anula en todo punto. El máximo de **B** y el máximo de **E** ocurren en puntos distintos al igual que en tiempos diferentes. En contraste a la onda que se propaga, la onda estacionaria tiene sus campos eléctrico y magnético «fuera de fase» a la vez en el espacio y en el tiempo.

Adviértase que $\mathbf{E} = 0$ *en todo instante* en el plano $y = 0$ y en cualquier otro plano en el que y sea igual a un número entero de semilongitudes de onda. Imaginemos que pudiésemos cubrir el plano xz en $y = 0$ con una lámina metálica perfectamente conductora. En la superficie de un conductor perfecto, la componente del campo eléctrico paralela a la superficie debe ser nula —de otro modo circularía una corriente infinita. Esto impone una *condición de contorno* en todo campo electromagnético en el espacio que le rodea. Pero nuestra onda estacionaria, descrita por la Ec. 26, *ya satisface* esta condición, al igual que satisface las ecuaciones de Maxwell en todo el espacio $y > 0$. Por tanto proporciona una solución ya hecha al problema de una onda plana electromagnética que se refleja, con incidencia normal, en un espejo plano conductor. (Véase Fig. 9.10.) La onda incidente está descrita por la Ec. 24, para $y > 0$, la onda reflejada por la Ec. 23. No hay campo detrás del espejo, o si lo hay, nada tiene que ver con el campo frente a él. Inmediatamente frente al espejo hay un campo magnético paralelo a la superficie, dado por la Ec. 26: $\mathbf{B} = -2\hat{\mathbf{x}}E_0 \operatorname{sen}(2\pi ct/\lambda)$. El salto en **B** desde este valor, frente a la capa conductora, a cero, detrás de la misma, demuestra que debe circular una corriente alterna en la capa.

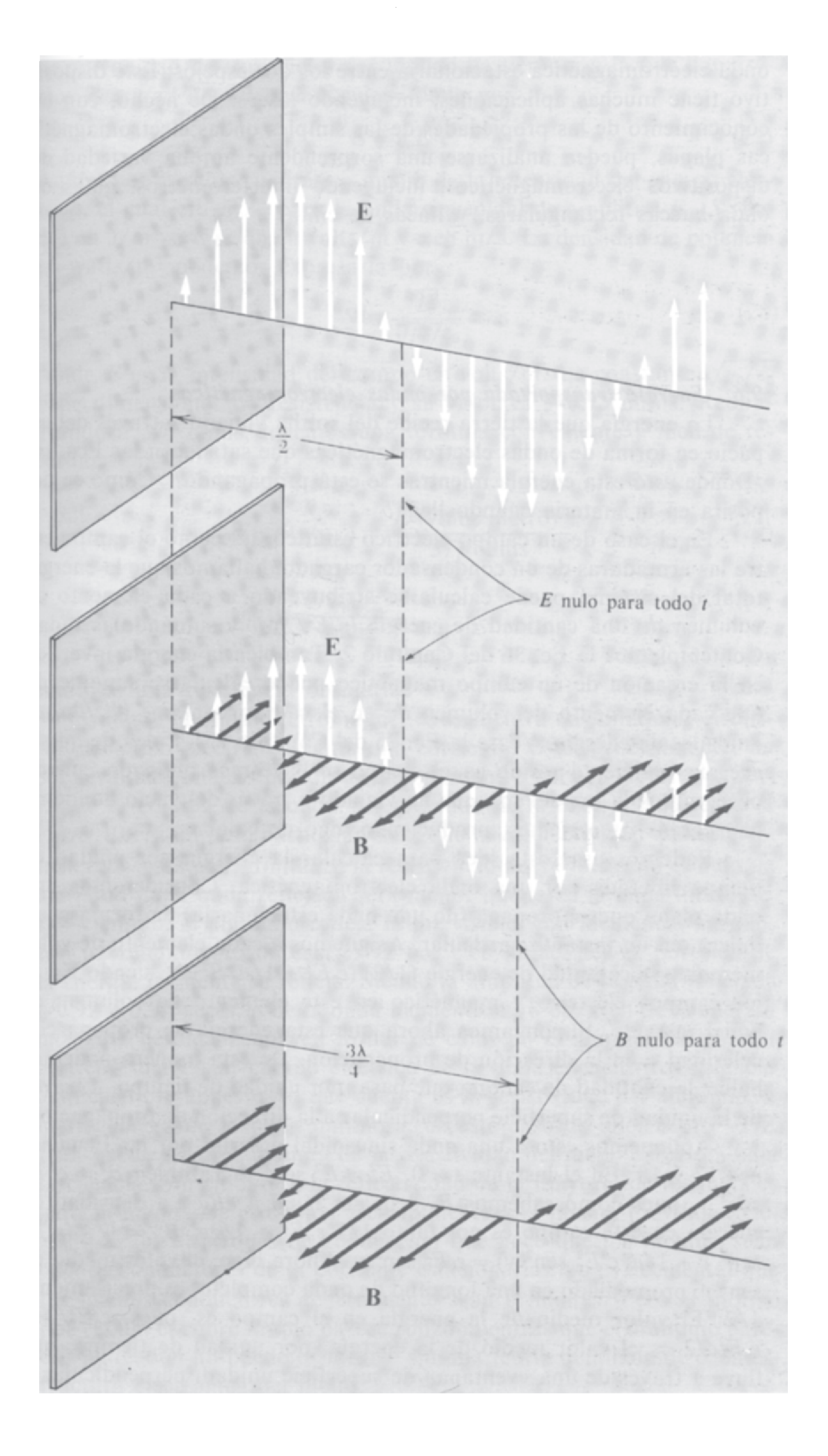


Fig. 9.10 Onda estacionaria producida por reflexión en un plano perfectamente conductor.

Podemos instalar una lámina conductora en otro plano donde **E** dado por las Ecs. 26 sea permanentemente nulo, y así atrapamos una onda electromagnética estacionaria entre los dos espejos. Este dispositivo tiene muchas aplicaciones, incluyendo lasers. De hecho, con un conocimiento de las propiedades de las simples ondas electromagnéticas planas, pueden analizarse una sorprendente amplia variedad de dispositivos electromagnéticos, incluyendo interferómetros, guías de onda huecas rectangulares, y líneas de cinta.

9.6 Energía transportada por ondas electromagnéticas

La energía que la tierra recibe del sol ha viajado a través del espacio en forma de ondas electromagnéticas que satisfacen las Ecs. 16. ¿Dónde *está* esta energía mientras se está propagando? ¿Cómo se deposita en la materia cuando llega?

En el caso de un campo eléctrico estático, tal como el campo entre las armaduras de un condensador cargado, hallamos que la energía total del sistema puede calcularse atribuyendo a cada elemento de volumen dv una cantidad de energía $(\varepsilon_0 E^2/2)\,dv$ y sumándolas todas. Contemplemos la Ec. 36 del Capítulo 2. También la energía invertida en la creación de un campo magnético puede calcularse suponiendo que cada elemento de volumen dv en el campo contiene $(B^2/2\mu_0)dv$ unidades de energía. Véase la Ec. 75 del Capítulo 7. La idea de que la energía realmente reside en el campo se hace más obligado cuando observamos la luz del sol, que ha viajado a través del vacío donde no hay cargas o corrientes, produciendo algo de calor.

Podemos usar esta idea para calcular la energía por unidad de tiempo liberada por una onda electromagnética. Consideremos una onda plana que se propaga (no una onda estacionaria) de forma cualquiera, en un instante particular. Asignemos a cada elemento de volumen dv una cantidad de energía $(1/2)\,(\varepsilon_0 E^2 + 1/\mu_0\, B^2)dv$, siendo **E** y **B** los campos eléctrico y magnético en este elemento de volumen en aquel instante. Supongamos ahora que esta energía se propaga con celeridad c en la dirección de propagación. De esta manera podemos hallar la cantidad de energía que pasa, por unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Apliquemos esto a una onda sinusoidal descrita por las Ecuaciones 17 y 18. En el instante $t = 0$, $E^2 = E_0^2$ sen$^2\, y$. También $B^2 = c^2 E_0^2$ sen$^2\, y$, pues como sabemos B_0 debe ser igual a cE_0. La densidad de energía en este campo es por tanto $1/2\ \varepsilon_0 E^2 + 1/2\mu_0\ B^2 = 1/2\ (\varepsilon_0 E_0^2$ sen$^2\, y + 1/\mu_0\, c^2 E_0^2$ sen$^2\, y) = \varepsilon_0 E_0^2$ sen$^2\, y$. Ahora bien, el valor medio de sen$^2\, y$, promediado en una longitud de onda completa, es precisamente $1/2$. El valor medio de la energía en el campo es, pues, $\varepsilon_0 E_0^2/2$ y $\varepsilon_0 E_0^2 c/2$ es el valor medio de la energía, por unidad de tiempo, que fluye a través de una «ventana» de superficie unidad, perpendicular a

la dirección *y*. De manera más general podemos decir que, para cualquier onda repetitiva continua, sea o no sinusoidal, la energía que fluye por unidad de superficie, por unidad de tiempo, a la que llamaremos *densidad de potencia S*, viene dada por

$$S = \varepsilon_0 \overline{E}^2 c \qquad (27)$$

Aquí $\overline{E}^2$ es el valor cuadrático medio de la intensidad del campo eléctrico, el cual era $E_0^2/2$ para la onda sinusoidal de amplitud E_0. S vendrá en J/m² si E se da en volts/m y c en m/s. La densidad de potencia en watts/m² podemos expresarla por

$$S = \frac{\overline{E^2}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} \qquad (28)$$

donde E es la intensidad del campo en volts/m. La constante $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ tiene dimensiones de resistencia y su valor es 376,73 ohms. Redondeando a 377 ohms, tenemos una fórmula conveniente y fácil de recordar

$$S(\text{watts/m}^2) = \frac{\overline{E^2}(\text{volts/metro})^2}{377 \text{ ohms}} \qquad (29)$$

$$\text{watts} = \frac{\text{volt}^2}{\text{ohm}}$$

como en una resistencia ordinaria.

Cuando la onda electromagnética encuentra un conductor eléctrico, el campo eléctrico origina una corriente. Esto, generalmente, da por resultado una disipación de energía dentro del conductor a expensas de la energía de la onda. La reflexión de la onda incidente en la Fig. 9.10 era un caso particular en el que la conductividad de la superficie reflectora era infinita. Si la resistividad del reflector no es nula, la amplitud de la onda reflejada será menor que la de la onda incidente. Por ejemplo, el aluminio refleja la luz visible, con incidencia normal, con un rendimiento de casi el 92 por cien. O sea, el 92 por cien de la energía incidente se refleja. Siendo la amplitud de la onda reflejada $\sqrt{0{,}92} = 0{,}96$ veces la de la onda incidente. El 8 por cien de la energía incidente perdida acaba en forma de calor en el aluminio, donde la corriente debida al campo eléctrico de la onda encuentra resistencia ohmica. Por supuesto, lo que cuenta es la resistividad del aluminio, a la frecuencia de la onda luminosa, en este caso de unos $5 \cdot 10^{14}$ Hz. Ésta puede ser algo distinta de la resistividad del metal en cc o a baja frecuencia. Sin embargo, la reflectividad de la mayoría de los metales para la luz visible es debida esencialmente a la misma movilidad elevada de los electrones de conducción que hace que los metales sean buenos conductores de la corriente estacionaria. No es accidental que los buenos conductores generalmente sean brillantes. Pero el motivo por el cual el cobre limpio parece rojizo mientras que el aluminio parece «plateado» no puede explicarse sin una teoría detallada de cada estructura electrónica del metal.

También puede absorberse energía cuando una onda electromagnética encuentra materia no conductora. Algo de luz que incide sobre un neumático de caucho negro se refleja, aunque el caucho es un excelente aislante para campos eléctricos de baja frecuencia. Aquí la disipación de energía electromagnética implica la acción del campo eléctrico de alta frecuencia sobre los electrones en las moléculas del material. En el más amplio sentido esto se aplica a la absorción de la luz en cualquier cosa en torno nuestro, incluyendo la retina del ojo.

Algunos aislantes transmiten ondas electromagnéticas con muy poca absorción. La transparencia del vidrio para la luz visible, con lo que estamos familiarizados, es realmente una notable propiedad. En las fibras de vidrio más puras usadas para la transmisión de señales de audio y video, una onda se propaga, tanto como un kilómetro, o sea, más de 10^9 longitudes de onda, antes de que la mayor parte de la energía se pierda. Sin embargo, por transparente que pueda ser un medio, la propagación de una onda electromagnética en su interior difiere de manera esencial de la propagación en el vacío. La materia interactúa con el campo electromagnético. Para tener en cuenta la interacción las Ecs. 16 deben modificarse de una manera que se explicará en el próximo capítulo.

9.7 Cómo se contempla una onda en una referencia distinta

Una onda electromagnética se propaga en el vacío. Su dirección de propagación, con respecto a cierta referencia inercial F, viene dada por un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$. Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ los campos eléctrico y magnético medidos en cierto lugar e instante en F, por un observador en F. ¿Qué campo medirá un observador en una referencia distinta que pase en aquel instante por aquel punto? Supongamos que la referencia F' se mueva con celeridad v en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ relativa a F, con sus ejes paralelos a los de F, como en la Fig. 6.25. Elijamos $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ también. Volvamos ahora a las Ecs. 58 del Capítulo 6 para las transformaciones de las componentes del campo. Escribámoslas de nuevo:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \tag{30}$$

La clave de nuestro problema es cómo se transforman dos escalares particulares, a saber, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ y $E^2 - B^2$. Usemos las Ecs. 30 para calcular $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$ y ver cómo está relacionado con $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z \\ &= E_x B_x + \gamma^2(E_y B_y + \beta E_y E_z - \beta B_y B_z - \beta^2 E_z B_z) \\ &\quad + \gamma^2(E_z B_z - \beta E_y E_z + \beta B_y B_z - \beta^2 E_y B_y) \\ &= E_x B_x + \gamma^2(1 - \beta^2)(E_y B_y + E_z B_z) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \tag{31}$$

El producto escalar $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ *no ha cambiado* en la transformación de Lorentz de los campos; es un invariante. Un cálculo parecido, que dejamos al lector como problema 9 · 13, demuestra que $E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$ también es un invariante, es decir,

$$E'^2 - B'^2 = E^2 - B^2 \tag{32}$$

La invariancia de estas dos magnitudes es una importante propiedad general de todo campo electromagnético, no solamente del campo de una onda electromagnética con el que estamos tratando ahora. Para el campo de la onda su inferencia es simple y directa. Sabemos que en la onda plana $\mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{E}$ y $B = cE$. Cada uno de los invariantes, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $E^2 - (1/c^2)B^2$, es por tanto nulo. Y si un invariante es nulo en una referencia, debe ser nulo también en todas las referencias. Vemos que toda transformación de Lorentz de la onda dará $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ perpendiculares y de módulo $B = cE$. *Una onda luminosa se parece a una onda luminosa en cualquier referencia inercial.* Esto no nos sorprende. Podríamos decir que hemos retornado a los postulados de la relatividad de Einstein. En realidad, según cuenta Einstein en su autobiografía, había empezado 10 años antes (a la edad de 16 años) a preguntarse qué se observaría si se pudiese «atrapar» una onda luminosa. Con las Ecs. 30, que hemos dado en la misma forma que en el artículo de Einstein de 1905, puede contestarse la pregunta. Sea $E_y = E_0$, $E_x = E_z = 0$, $B_z = cE_0$, $B_x = B_y = 0$. Ésta es una onda que se propaga en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{x}}$ como podemos expresar del hecho de que $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ tiene esta dirección y sentido. Usando las Ecs. 30 y la identidad $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$, hallamos que

$$E'_y = E_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad B'_z = \frac{E_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{33}$$

Observada desde F' la amplitud de la onda se reduce. La velocidad de la onda, por supuesto, es c en F' como en F. La onda electromagnética no tiene referencia en reposo. En el límite $\beta = 1$, las amplitudes E'_y y B'_z observadas en F' se anulan. La onda ha desaparecido!

Problemas

9.1 Si el campo eléctrico en el espacio libre es $\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$ sen $(2\pi/\lambda)(z + ct)$, con $E_0 = 2$ volts/m. ¿Cuál debe ser el campo magnético, no incluyendo campo magnético estático alguno?

9.2 La densidad de potencia de la luz solar, en la tierra, es aproximadamente 1 kw/m^2. ¿Cuál es el valor cuadrático medio de la intensidad del campo magnético?

Solución: $2 \cdot 10^{-6}$ tesla.

9.3 Un protón libre estaba en reposo en el origen antes de pasar una onda descrita por las Ecs. 21 y 22. ¿Dónde podría esperarse hallar el protón en el instante $t = 1$ microsegundo? La amplitud del pulso va en volts/m. Masa del protón = $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg. ***Sugerencia:*** Ya que la duración del pulso es de unos pocos nanosegundos, puede despreciarse el desplazamiento del protón durante el paso del pulso. Además, si la velocidad del protón no es muy grande, puede ignorarse el efecto del campo magnético sobre su movimiento. Lo primero que hay que calcular es la cantidad de movimiento adquirida por el protón durante el pulso.

Solución: 0,063 m del origen, en la dirección $\hat{\mathbf{y}}$.

9.4 Supongamos que en el problema precedente el efecto del campo magnético no era despreciable. ¿Cómo cambiaría la dirección de la velocidad final del protón?

9.5 Tenemos un campo magnético particular en el espacio libre:

$$E_x = 0 \qquad E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t) \qquad E_z = 0$$

$$B_x = 0 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = -E_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

(a) Demostrar que este campo puede satisfacer las ecuaciones de Maxwell si ω y k están relacionadas de cierta manera.

(b) Supongamos que $\omega = 10^{10}$ s^{-1} y $E_0 = 1500$ volt/m. ¿Cuál es la longitud de onda en m? ¿Cuál es la densidad de energía en J/m^3, promediada en una región grande? A partir de ésta calcular la densidad de potencia, el flujo de energía en J/m$^2 \cdot$ s.

9.6 Partimos de las ecuaciones de Maxwell en el «espacio vacío» en unidades SI, obtenidas eliminando los términos con ρ y $\mathbf{J}$ de las Ecs. 15. Consideremos una onda descrita por las Ecs. 17 y 18, pero ahora E_0 en volt/m y B_0 en tesla. ¿Qué condiciones deben cumplir E_0, B_0 y v para satisfacer las ecuaciones de Maxwell?

9.7 Escribir las fórmulas para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ que especifican una onda electromagnética plana sinusoidal con las siguientes características: La onda se propaga en la dirección y sentido $-\hat{\mathbf{x}}$; su frecuencia es de 100 megahertz (MHz, 10^8 ciclos por segundo); el campo eléctrico es perpendicular a la dirección $\hat{\mathbf{z}}$

9.8 Demostrar que el campo electromagnético descrito por

$$E = E_0\hat{\mathbf{z}} \cos kx \cos ky \cos \omega t$$

$$B = B_0(\hat{\mathbf{x}} \cos kx \operatorname{sen} ky - \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen} kx \cos ky) \operatorname{sen} \omega t$$

satisfará las Ecs. 16 si $E_0 = \sqrt{2}B_0c$ y $\omega = \sqrt{2}ck$. Este campo puede existir dentro de una caja metálica cuadrada, de dimensión π/k en la dirección x e y y altura arbitraria. ¿Cuál es el campo magnético?

9.9 De toda la energía electromagnética del universo, con mucho, la cantidad mayor está en forma de ondas de longitud de onda en la región del milímetro. Ésta es la radiación de micrrondas de fondo cósmica descubierta por Penzias y Wilson en 1965. Aparentemente llena todo el espacio, incluyendo el vasto espacio entre galaxias, con una densidad de energía de $4 \cdot 10^{-14}$ J/m^3. Calcular el valor cuadrático medio de la intensidad del campo eléctrico en esta radiación. ¿A qué distancia aproximada de una emisora de radio de 1 kW hallaríamos una onda electromagnética de intensidad comparable?

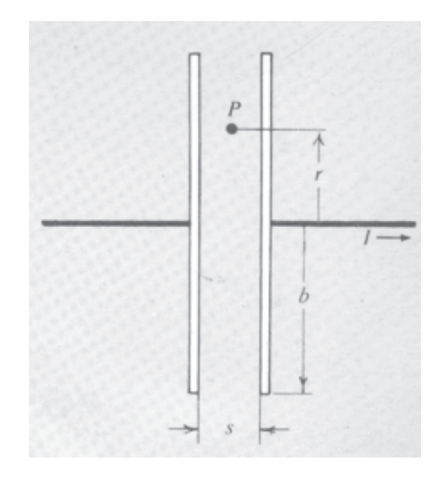
Solución: 0,06 volt/m; 3 km.

9.10 El campo magnético dentro del condensador en descarga representado en la Fig. 9.1 puede calcularse, en principio, sumando las contribuciones de todos los elementos de la corriente de conducción, como se indica en la Fig. 9.5. Esto puede resultar largo. Si podemos suponer simetría en torno a ese eje, es mucho más fácil hallar este campo **B** en un punto usando la integral

$$\int_s \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \right] \cdot d\mathbf{s}$$

aplicada a un camino circular en torno a este punto. Solamente necesitamos conocer la corriente total que abarca este camino. Utilícese esto para hallar el campo *P*, que es el punto medio entre las placas del condensador y a una distancia *r* del eje de simetría. (Compárese esto con el cálculo del campo eléctrico inducido **E**, en el ejemplo de la Fig. 7.16.)

Solución: $2\pi r B = \mu_0 \dfrac{I}{\pi b^2} \pi r^2, \quad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi b^2}$



Prob. 9.10

9.11 Desde un satélite en órbita estacionaria se emite una señal dirigida hacia la tierra con una potencia de 10 kW. El haz que llega a la tierra cubre una región aproximadamente circular de diámetro 1000 km. ¿Cuál es el campo eléctrico en los receptores en milivolts/m?

9.12 Una onda sinusoidal se refleja en la superficie de un medio cuyas propiedades son tales que la mitad de la energía incidente es absorbida. Consideremos el campo resultante de la superposición de la onda incidente y la reflejada. Un observador estacionado en un punto de este campo encuentra el campo eléctrico local que oscila con cierta amplitud *E*. ¿Cuál es la relación entre la mayor amplitud notada por un observador y la amplitud más pequeña notada por cualquier otro? (A esto se le llama relación de voltaje de ondas estacionarias, en inglés en el argot de laboratorio VSWR: *voltage standing wave ratio*).

9.13 Partiendo de la transformación de campos dada por la Ec. 60 del Capítulo 6, demostrar que el escalar $E^2 - B^2$ es invariante en la transformación. O sea, demostrar que $\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 = E^2 - B^2$. Puede hacerse usando solamente álgebra vectorial, sin despejar las componentes *x*, *y* o *z*. (Para esto es conveniente la descomposición en componentes paralelas y perpendiculares de los vectores, ya que $\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{E}_\parallel = 0$, $\mathbf{B} \times \mathbf{E}_\parallel = 0$, etc).

10

Campos eléctricos en la materia

10.1 Dieléctricos

El condensador que estudiamos en el Cap. 3 estaba constituido por dos conductores aislados uno de otro, sin nada entre ellos. El sistema de dos conductores se caracterizaba por cierta capacidad C, una constante que relaciona el valor de la carga Q del condensador (carga positiva en una armadura, la misma negativa en la otra) a $\varphi_1 - \varphi_2$, la diferencia de potencial eléctrico entre los dos conductores:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} \qquad (1)$$

Para el condensador plano, dos placas planas cada una de área A m^2 separadas la distancia s, hallamos que la capacidad viene dada por

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{s} \qquad (2)$$

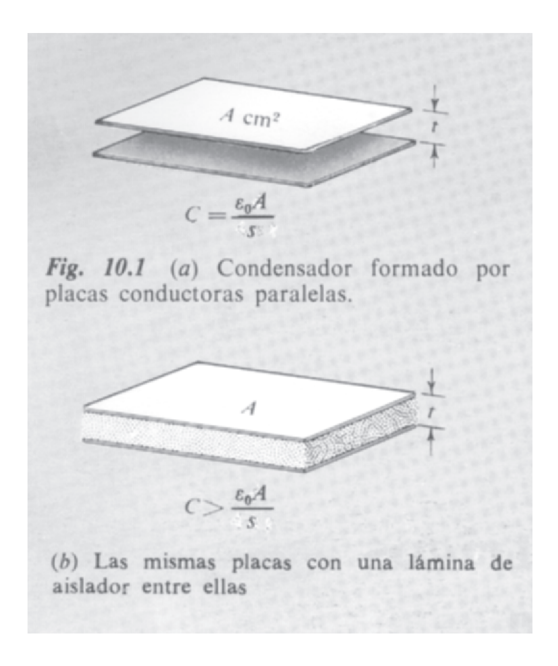
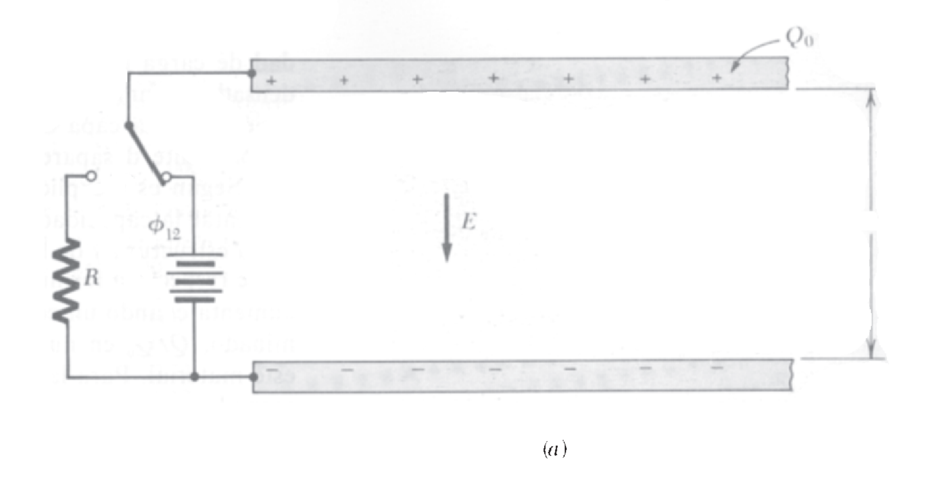


Fig. 10.1 (*a*) Condensador formado por placas conductoras paralelas.

(*b*) Las mismas placas con una lámina de aislador entre ellas

Condensadores como éstos pueden encontrarse en algunos aparatos eléctricos. Se les llama *condensadores en el vacío* y constan de placas encerradas en un recipiente en el que se ha producido el vacío. Se utilizan principalmente cuando intervienen potenciales muy elevados y rápidamente variables. Sin embargo, corrientemente, se utilizan mucho más los condensadores en los que el espacio entre las armaduras está lleno con una substancia no conductora sólida o líquida. La mayoría de condensadores que se manejan en el laboratorio son de esta clase; en cualquier televisor hay docenas de ellos. Para los conductores en un medio material la Ec. 2 no está de acuerdo con la experiencia. Supongamos que llenamos el espacio entre las placas, representadas en la Fig. 10.1*a*, con una lámina de plástico, como en la Figura 10.1*b*. Experimentando con este nuevo condensador, encontramos aun proporcionalidad directa entre la carga y la diferencia de potencial, así que podemos *definir* una capacidad por la Ec. 1. Pero hallamos que la C es apreciablemente *mayor* que lo que indica la Ec. 2. O sea, hallamos más carga en cada una de las placas, para la misma diferencia de potencial, área de las placas, y distancia de separación. La lámina de plástico debe ser la causa de esto.

De una manera general, no es difícil comprender cómo ocurre esto. La lámina de plástico consta de moléculas, las moléculas están compuestas de átomos que a su vez están formados por partículas cargadas eléctricamente, electrones y núcleos atómicos. El campo eléctrico entre las placas del condensador actúa sobre estas cargas, atrayendo los electrones hacia arriba, si la placa superior es positiva como en la Fig. 10.2, y empujando las cargas positivas hacia abajo. Nada se mueve muy lejos. (No hay electrones libres alrededor, desligados de los átomos y prestos a desplazarse, como lo harían en un conductor metálico.) Habrán algunos ligeros desplazamientos de las cargas, pues un átomo no es una estructura infinitamente rígida. El efecto de lo



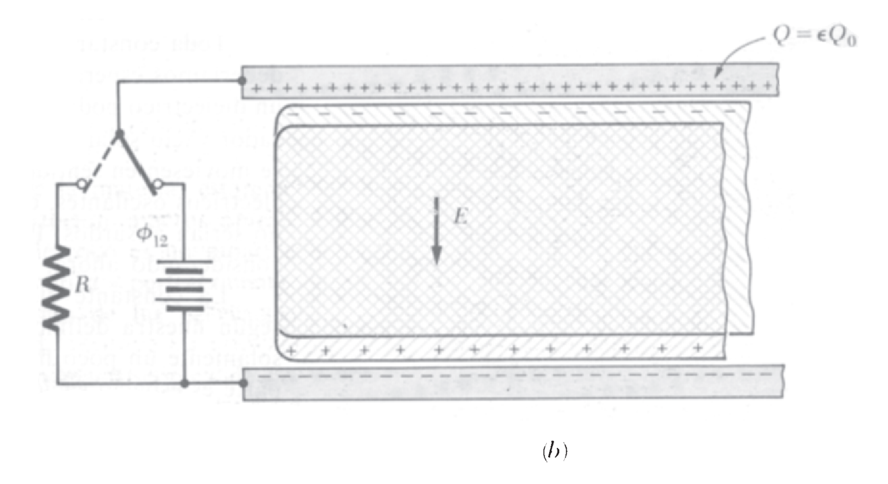


Fig. 10.2 Cómo un dieléctrico aumenta la carga en las placas de un condensador. (*a*) Espacio entre las placas vacío; $Q_0 = C_0\phi_{12}$. (*b*) Espacio entre las placas lleno de un material no conductor, o sea, un dieléctrico. El campo eléctrico empuja las cargas negativas hacia arriba y a las positivas hacia abajo, revelando capas de carga negativa no compensada en la parte superior de la superficie del dieléctrico, y carga positiva no compensada en la superficie inferior. La carga total en la parte superior, *incluyendo* la carga Q de la placa superior es la misma que en (*a*). La Q sola es mayor ahora que Q_0, $Q = \varepsilon Q_0 \cdot Q$ es la cantidad de carga que circularía por la resistencia R si el condensador se descargase conmutando el interruptor.

dicho dentro de la lámina de plástico es que la distribución de carga negativa, considerada en conjunto, y la distribución total de carga positiva (los núcleos de los átomos) están muy ligeramente desplazadas una con respecto a la otra, como se indica en la Fig. 10.2*b*. El interior del bloque permanece eléctricamente neutro, pero ha emergido una delgada capa de carga negativa no compensada en la parte superior, con una correspondiente capa de carga positiva no compensada en la parte inferior.

Por la presencia de la capa de carga negativa debajo de la placa superior, la carga Q de la placa aumenta. En realidad, Q debe aumentar hasta que la carga total en la parte superior, la suma algebraica de Q y la capa de carga inducida, sea igual a Q_0. Lo podremos demostrar cuando retornemos a este problema en la Sección 10.8 después de aclarar algunas cuestiones acerca dél campo eléctrico dentro de la materia. Ahora el punto importante es que la carga Q en la Fig. 10.2*b* es *mayor* que Q_0 y que esta Q es la carga del condensador en la rela-

ción $Q = C\varphi_{12}$. Ésta es la carga que procede de la batería, y es la cantidad de carga que circularía por la resistencia R al descargar el condensador conmutando el interruptor indicado en el diagrama. Si lo hiciéramos, la capa de carga inducida, la cual no forma parte de Q, simplemente desaparecería dentro de la lámina.

Según esta explicación la aptitud de un material particular para aumentar la capacidad debe depender de la cantidad de carga eléctrica en su estructura y de la facilidad con que los electrones puedan desplazarse respecto a los núcleos atómicos. El factor por el que la capacidad aumenta cuando un condensador vacío se llena con un material determinado, Q/Q_0 en nuestro ejemplo, se llama *constante dieléctrica* de este material. Para la misma se usa el símbolo ε. El propio material a menudo se llama *dieléctrico* cuando se habla de su comportamiento en un campo eléctrico. Pero cualquier substancia homogénea no conductora puede caracterizarse así. En la Tabla 10.1 se dan los valores de la constante dieléctrica de varias substancias.

Toda constante dieléctrica en la tabla es mayor que 1. Es lo que deberíamos esperar si nuestra explicación es correcta. La presencia de un dieléctrico podría *reducir* la capacidad por debajo de la del condensador vacío solamente si sus electrones, al aplicar el campo eléctrico, se moviesen en sentido contrario a la fuerza resultante. En los campos eléctricos oscilantes, dicho de paso, algunos de tales comportamientos no serían absurdos. Pero para los campos estacionarios, que estamos considerando ahora, esto no es posible.

La constante dieléctrica del vacío perfecto es exactamente 1,0 según nuestra definición. Para los gases en condiciones normales es solamente un poco mayor que 1,0, debido a que un gas en su mayor parte es espacio vacío. Los sólidos ordinarios y los líquidos tienen generalmente constantes dieléctricas que van de 2 a 6, poco más o menos. Adviértase que el amoníaco líquido es una excepción, y el agua una excepción espectacular. Realmente el agua líquida es ligeramente conductora, pero esto, como explicaremos más adelante, no impide nuestra definición y medida de su constante dieléctrica. La conductividad iónica del líquido no es la razón de la enorme constante dieléctrica del agua. Podemos distinguir esta extraordinaria propiedad del agua en la constante dieléctrica del vapor si se recuerda que es realmente la *diferencia* entre ε y 1 lo que revela la influencia eléctrica del material. Compárense los valores de ε dados en la tabla para el vapor de agua y para el aire.

Una vez determinada la constante dieléctrica de un material particular, puede ser midiendo la capacidad de un condensador lleno con él, somos capaces de predecir el comportamiento, no sólo de los condensadores de dos placas, sino que también de *todo* sistema electrostático constituido por conductores y piezas de este dieléctrico, de forma cualquiera. Es decir, podemos predecir todos los campos eléctricos que existirán en el vacío, fuera de los dieléctricos, para cargas o potenciales dados en los conductores del sistema.

La teoría que nos capacita para hacerlo fue lograda completamente por los físicos del siglo diez y nueve. Careciendo de una repre-

Tabla 10.1 Constantes dieléctricas de varias substancias

Substancia	*Condiciones*	*Constante dieléctrica*
Aire	Gas, 0° C, 1 atm	1,00059
Metano	Gas, 0° C, 1 atm	1,00088
Ácido clorhídrico, HCl	Gas, 0° C, 1 atm	1,0046
Agua H_2O	Gas, 110° C, 1 atm	1,0126
	Líquido, 20° C	80
Benceno, C_6H_6	Líquido, 20° C	2,28
Metanol CH_3OH	Líquido, 20° C	33,6
Amoníaco, NH_3	Líquido, — 34° C	22
Aceite de transformador	Líquido, 20° C	2,24
Cloruro sódico, NaCl	Cristal, 20° C	6,12
Azufre, S	Sólido, 20° C	4,0
Silicio, Si	Sólido, 20° C	11.7
Polietileno	Sólido, 20° C	2,25-2 3
Porcelana	Sólido, 20° C	6,0-8,0
Cera de parafina	Sólido, 20° C	2,1-2,5
Vidrio pyrex 7070	Sólido, 20° C	4,00

sentación completa de la estructura atómica de la materia, estamos más o menos obligados a adoptar una descripción macroscópica. Desde tal punto de vista, el interior de un dieléctrico es un espacio sin rasgos característicos, con una « jalea matemática » perfectamente uniforme, cuya única propiedad eléctrica distinta de las del vacío es una constante dieléctrica distinta de la unidad.

Si solamente desarrollamos una descripción macroscópica de la materia en un campo eléctrico, encontraremos difícil contestar algunas preguntas tal vez evidentes — o quizá, difícil preguntar estas cuestiones de manera que puedan contestarse con significado completo. Por ejemplo, cuál es la intensidad del campo eléctrico, en el *interior* de la lámina de plástico de la Fig. 10.1*b*, cuando existen ciertas cargas en las placas. La intensidad de un campo eléctrico se define por la fuerza sobre una carga de prueba. ¿Cómo podemos colocar una carga de prueba en el interior de un sólido perfectamente denso, sin perturbación alguna, y medir la fuerza sobre ella? ¿Qué significaría esta fuerza si la midiéramos? Podríamos intentar taladrar un orificio y colocar la carga de prueba en él, con cierto espacio para moverse, de manera que pueda medirse la fuerza sobre ella, como sobre una partícula libre. Pero entonces mediríamos, no el campo eléctrico en el dieléctrico, sino el campo eléctrico en una cavidad dentro del dieléctrico, que es una cosa completamente distinta.

Afortunadamente nos es útil otra línea de ataque, una que parte del nivel microscópico o *atómico*. Sabemos que la materia está constituida por átomos y moléculas; a su vez, éstos están formados por partículas elementales cargadas. Sabemos algo acerca del tamaño y estructura de estos átomos y acerca de su disposición en cristales, fluidos y gases. En lugar de describir nuestra lámina dieléctrica como

un volumen lleno de materia continua sin estructura, lo describiremos como una agrupación de moléculas que ocupan un vacío. Si podemos hallar cómo actúan las cargas eléctricas en *una* molécula, cuando esta molécula está situada en un campo eléctrico, seríamos capaces de establecer el comportamiento de dos moléculas tales, separadas cierta distancia en el vacío. Solamente necesitaremos incluir la influencia, sobre cada molécula, del campo eléctrico debido a la otra. Este es un problema en el vacío. Ahora bien, todo lo que tenemos que hacer es extender esto a una agrupación de moléculas, digamos 10^{20}, que ocupan algo así como un centímetro cúbico de vacío, y tenemos nuestro dieléctrico real. Esperamos hacerlo sin crear 10^{20} problemas separados.

Si llevamos a cabo este programa, nos recompensará de dos maneras. Al menos seremos capaces de decir algo con cierto sentido completo acerca de los campos eléctrico y magnético dentro de la materia, contestando preguntas tales como la efectuada antes. Lo que es más estimable, estableceremos cómo se establecen los fenómenos eléctricos y magnéticos en la materia, y por lo tanto revelan la naturaleza de la estructura atómica fundamental. Vamos a estudiar los efectos eléctricos y magnéticos separadamente. Empezamos con los dieléctricos. Ya que nuestra primera meta es describir el campo eléctrico producido por un átomo o molécula, será útil hacer algunas observaciones generales acerca del campo electrostático exterior a cualquier sistema de cargas pequeño.

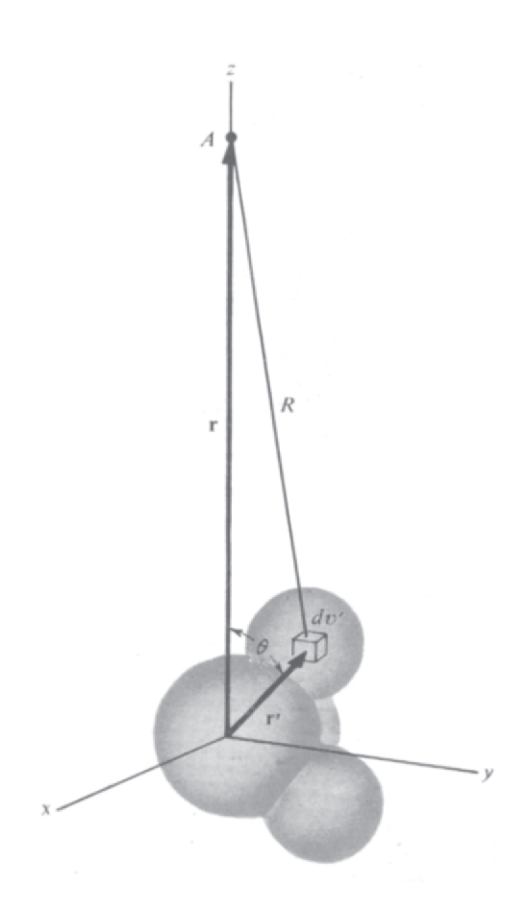


Fig. 10.3 Cálculo del potencial, en un punto A, de una distribución molecular de carga.

10.2 Momentos de una distribución de carga

Un átomo o molécula consta de ciertas cargas eléctricas que ocupan un pequeño volumen, puede ser de unos angstrom cúbicos (10^{-24} cm^3) de espacio. Nos interesa el campo eléctrico en el exterior de este volumen, debido a esta distribución de carga más bien complicada. Particularmente nos interesa el campo lejos de la fuente, con lo que indicamos distancia grande comparada con el tamaño de la propia fuente. ¿Qué aspectos de la estructura de la carga determinan principalmente el campo en puntos remotos? Para contestar esto, fijémonos en cierta distribución arbitraria de carga y veamos cómo podemos emprender el cálculo del campo en un punto exterior a ella. La Fig. 10.3 muestra una distribución de carga de cierta clase situada en las proximidades del origen de coordenadas. Puede ser una molécula que consista de varios núcleos positivos y un gran número de electrones. En todo caso supondremos que esto se define por una función $\rho(x, y, z)$. Esta ρ es negativa en donde están los electrones y positiva en donde están los núcleos. Para hallar el campo eléctrico en puntos

distantes podemos empezar calculando el potencial debido a la distribución de cargas. Como ilustración, tomemos un punto A exterior sobre el eje z. (Ya que no hemos supuesto ninguna simetría especial en la distribución de carga, no hay nada especial acerca del eje z.) Sea r la distancia del origen a A. El potencial eléctrico en A, al que llamamos φ_A, se obtiene como de costumbre sumando las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,dv'}{R} \tag{3}$$

En la integral, dv' es un elemento de volumen en la distribución de carga, $\rho(x', y', z')$ la densidad de carga allí y la R del denominador es la distancia de A a este elemento particular. La integración se efectúa en las coordenadas x', y', z' y se extiende a toda la región que contiene la carga. Podemos expresar R en función de r y de la distancia r' del origen al elemento de carga. Utilizando el teorema del coseno, siendo θ el ángulo entre r' y el eje en donde está A:

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{1/2} \tag{4}$$

Sustituyendo este valor de R en la integral tenemos:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho\, dv' [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} \tag{4a}$$

Ahora vamos a hacer uso del hecho de que para un punto distante como A, r' es mucho menor que r para todo punto de la distribución de carga. Esto sugiere que podemos desarrollar la raíz cuadrada de la Ec. 4 en serie de potencias de r'/r. Escribiendo

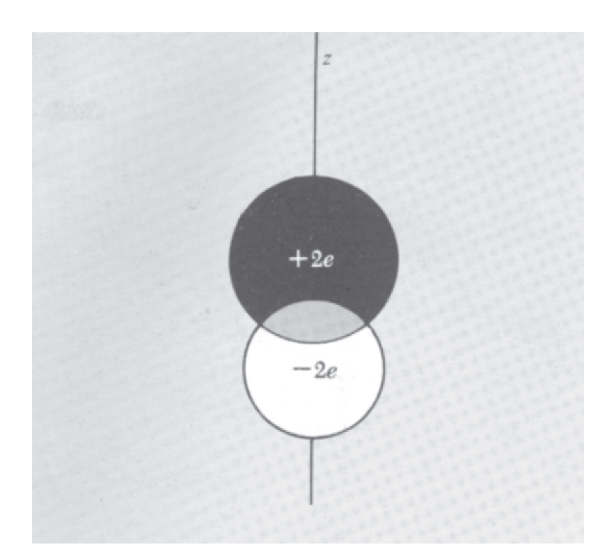
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2} \tag{5}$$

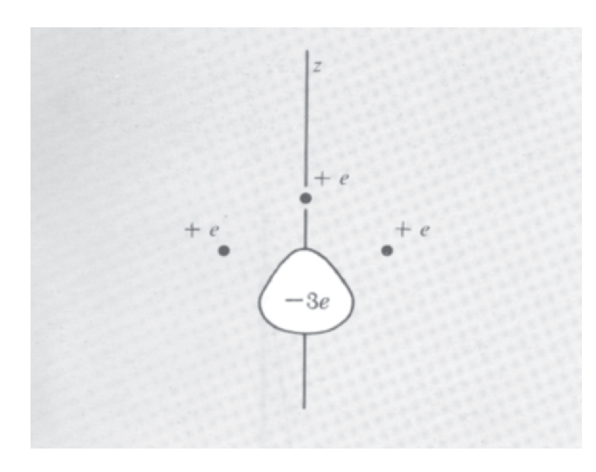
y usando el desarrollo $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \ldots$, obtenemos, después de agrupar los términos del mismo grado de r'/r:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta - 1) + \left(\begin{matrix}\text{términos de}\\ \text{grado superior}\end{matrix}\right)\right] \tag{6}$$

Ahora bien, r es constante en la integración, así que sacándolo fuera





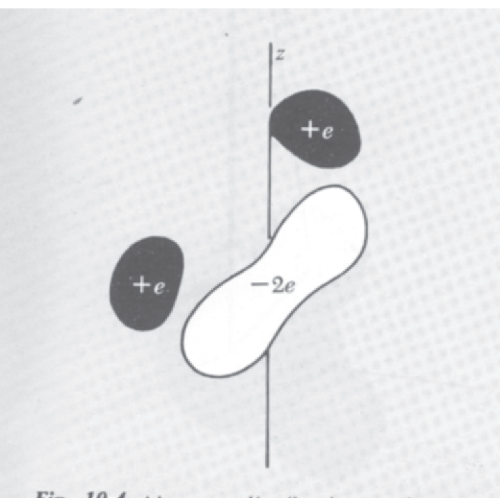


Fig. 10.4 Algunas distribuciones de carga con $K_0 = 0$, $K_1 \neq 0$. Es decir, cada una tiene una carga total nula, pero momento dipolar distinto de cero.

escribimos el potencial obtenido en el punto A como sigue:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\int \rho\, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\underbrace{\int r' \cos\theta\, \rho\, dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\underbrace{\int r'^2(3\cos^2\theta - 1)\rho\, dv'}_{K_2} + \cdots \qquad (7)$$

Cada una de las integrales anteriores, K_0, K_1, K_2, y las sucesivas, tienen un valor que depende solamente de la estructura de la distribución de carga. De aquí que el potencial para todos los puntos del eje z puede escribirse como una serie de potencias de $1/r$ con coeficientes constantes:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots\right] \qquad (8)$$

Para acabar el problema deberíamos obtener el potencial en todos los otros puntos, para poder calcular el campo eléctrico por — grad φ. No obstante, hemos ido lo suficientemente lejos para presentar el punto esencial. El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el primer término de esta serie cuyo coeficiente no sea nulo.

Vamos a considerar más atentamente estos coeficientes. El coeficiente K_0 es $\int \rho\, dv'$ que no es otra cosa que la carga total en la distribución. Si tenemos las mismas cantidades de carga positiva y negativa, como en una molécula neutra, K_0 debe ser nulo. Para una molécula simplemente ionizada, K_0 tendrá el valor e. Si K_0 no es nulo, no interesa la cuantía de K_1, K_2, etc., para una distancia suficientemente grande el término K_0/r prevalecerá. Según esto, el potencial tenderá al de una carga puntiforme en el origen y lo mismo el campo. Esto apenas sorprende.

Supongamos que tenemos una molécula neutra, así que K_0 es nulo. Nuestro interés se desplaza ahora al segundo término, con coeficiente $K_1 = \int r' \cos\theta\, \rho\, dv'$. Ya que $r' \cos\theta$ es simplemente z', este término mide el desplazamiento relativo, en la dirección hacia A, de la carga positiva y negativa. Tiene valor no nulo para las distribuciones esquematizadas en la Fig. 10.4, en donde las densidades de carga positiva y negativa se han indicado separadamente. En realidad, todas las distribuciones representadas allí tienen aproximadamente el mismo valor de K_1.

Esto nos indica que si la distribución es neutra, el valor de K_1 es independiente de la posición del origen. Es decir, si reemplazamos z' por $(z' + z'_0)$, o sea desplazando el origen, el valor de la integral

no varía: $\int(z' + z_0')\rho\,dv' = \int z'\rho\,dv' + z_0'\int\rho\,dv'$ y la última integral es siempre nula para una distribución neutra.

Evidentemente si $K_0 = 0$ y $K_1 \neq 0$, el potencial a lo largo del eje z variará asintóticamente como $1/r^2$ (es decir, con mayor aproximación para distancias mayores). Esperemos que la intensidad del campo eléctrico, en este caso, se comporte asintóticamente como $1/r^3$, en contraste a la dependencia de $1/r^2$ del campo de una carga puntiforme. Por supuesto que hemos discutido solamente el potencial sobre el eje z. Volveremos a la cuestión de la forma exacta del campo después de obtener una perpspectiva general de la situación.

Si K_0 y K_1 son ambos nulos, y K_2 no lo es, el potencial se comportará como $1/r^3$ a grandes distancias, y la intensidad del campo disminuirá con el inverso de la cuarta potencia de la distancia. La Fig. 10.5 presenta una distribución de carga para la cual K_0 y K_1 son ambos nulos (y serían nulos para cualquier dirección elegida para el eje z) mientras que K_2 no es nulo.

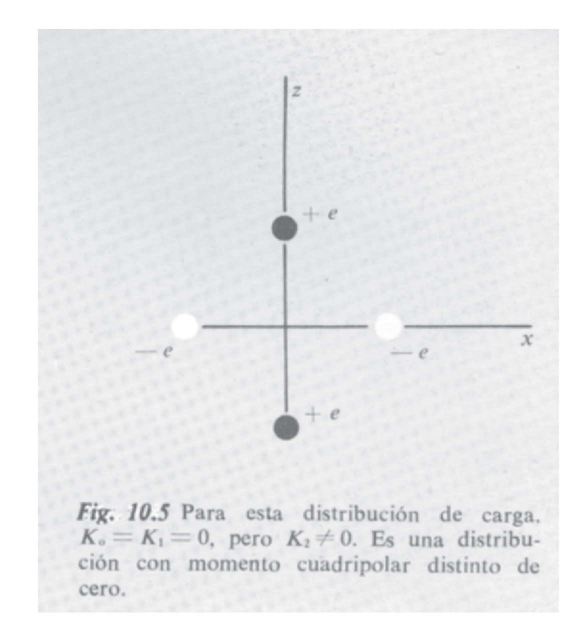


Fig. 10.5 Para esta distribución de carga, $K_0 = K_1 = 0$, pero $K_2 \neq 0$. Es una distribución con momento cuadripolar distinto de cero.

Las cantidades K_0, K_1, K_2, ... están relacionadas a lo que se llaman *momentos* de la distribución de carga. Utilizando este lenguaje, a K_0, que es simplemente la carga total, le llamamos *momento monopolar*, o intensidad del *monopolo*. K_1 es una componente del *momento dipolar* de la distribución. El momento dipolar tiene las dimensiones *carga* por *desplazamiento;* es un *vector* y nuestra K_1 es su componente z. La tercera constante K_2 está relacionada con el *momento cuadripolar* de la distribución, la siguiente con el *momento octopolar*, y así sucesivamente. El momento cuadripolar no es un vector, sino un tensor. La distribución de carga mostrada en la Fig. 10.5 tiene un momento cuadripolar no nulo.

La ventaja, para nosotros, de describir una distribución de carga por esta jerarquía de momentos, es que precisamente separa aquellos aspectos de la distribución de carga que determinan el campo a gran distancia. Si nos interesase solamente el campo en las proximidades de la distribución, sería un ejercicio inútil. Para nuestra principal tarea, establecer lo qué ocurre en un dieléctrico, resulta que *solamente* la intensidad monopolar (la carga total) y la intensidad dipolar de las moléculas forman los bloques de materia. Podemos ignorar todos los demás momentos. Y si los bloques formados son neutros, tenemos que considerar solamente sus momentos dipolares.

10.3 Potencial y campo de un dipolo

La contribución de un dipolo al potencial en el punto A, que dista r del origen, venía dada por $(1/r^2)\int r' \cos\theta\rho\,dv'$. Podemos escribir $r' \cos\theta$, que es precisamente la proyección de $\mathbf{r}'$ sobre la dirección

hacia A $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$. Así que podemos escribir el potencial, sin referencia a ningún eje arbitrario, como

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \rho \, dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho \, dv' \tag{9}$$

que servirá para dar el potencial en cualquier punto. La integral del segundo miembro de la Ec. 9 es el *momento dipolar* de la distribución de carga. Evidentemente es un vector, con las dimensiones *carga* por *distancia*. Designaremos el vector momento dipolar por $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho \, dv' \tag{10}$$

Utilizando el momento dipolar $\mathbf{p}$, podemos volver a escribir la Ec. 9 como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \tag{11}$$

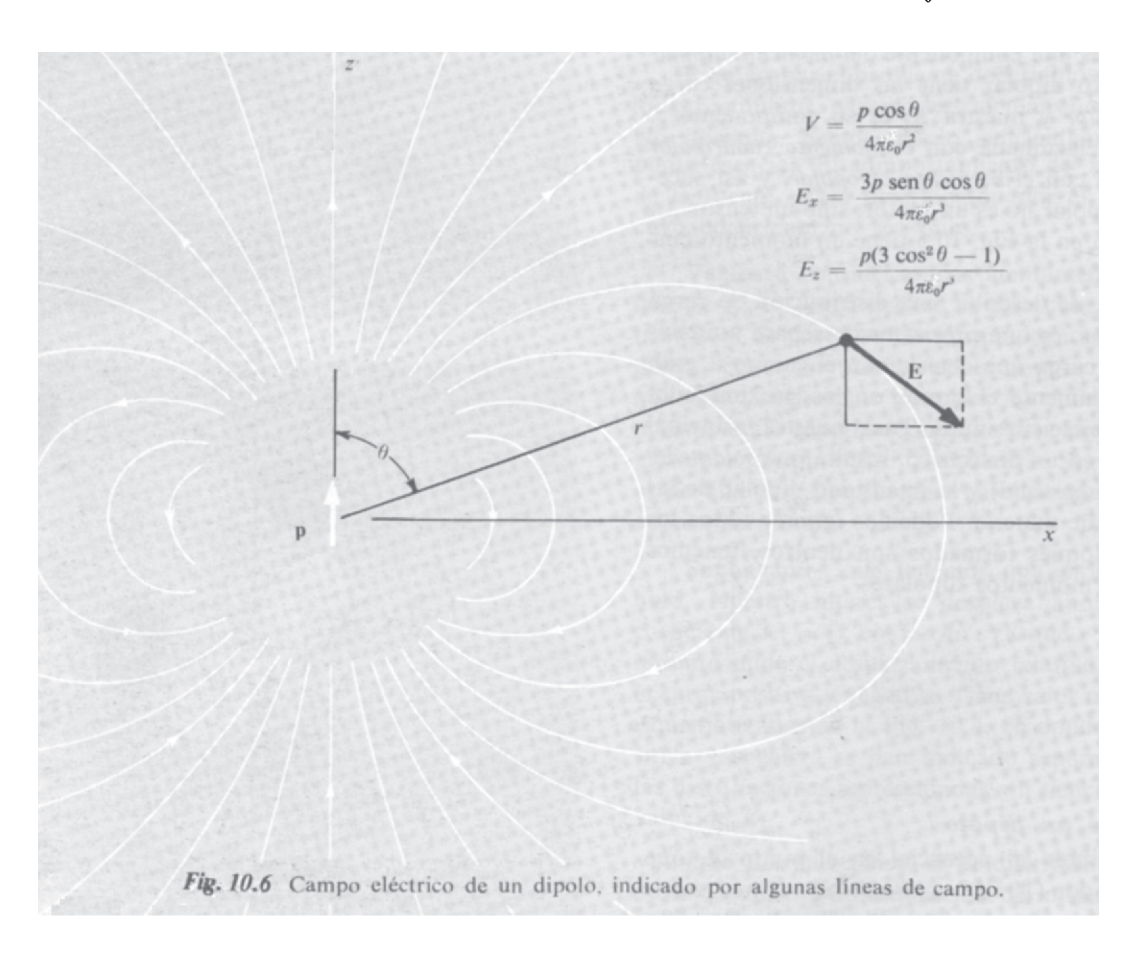


Fig. 10.6 Campo eléctrico de un dipolo, indicado por algunas líneas de campo.

El campo eléctrico es el gradiente negativo de este potencial. Para ver cuál es el campo de un dipolo, situamos al dipolo **p** en el origen, dirigido según el eje z (Fig. 10.6). Con esta disposición,

$$\varphi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{12}$$

Por supuesto que el potencial y el campo son simétricos en torno al eje z. Trabajamos en el plano xz, donde $\cos\theta = z/(x^2 + y^2)^{1/2}$. En este plano, pues

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Las componentes del campo eléctrico se deducen fácilmente:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pxz}{(x^2+z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,p\left[\frac{3z^2}{(x^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

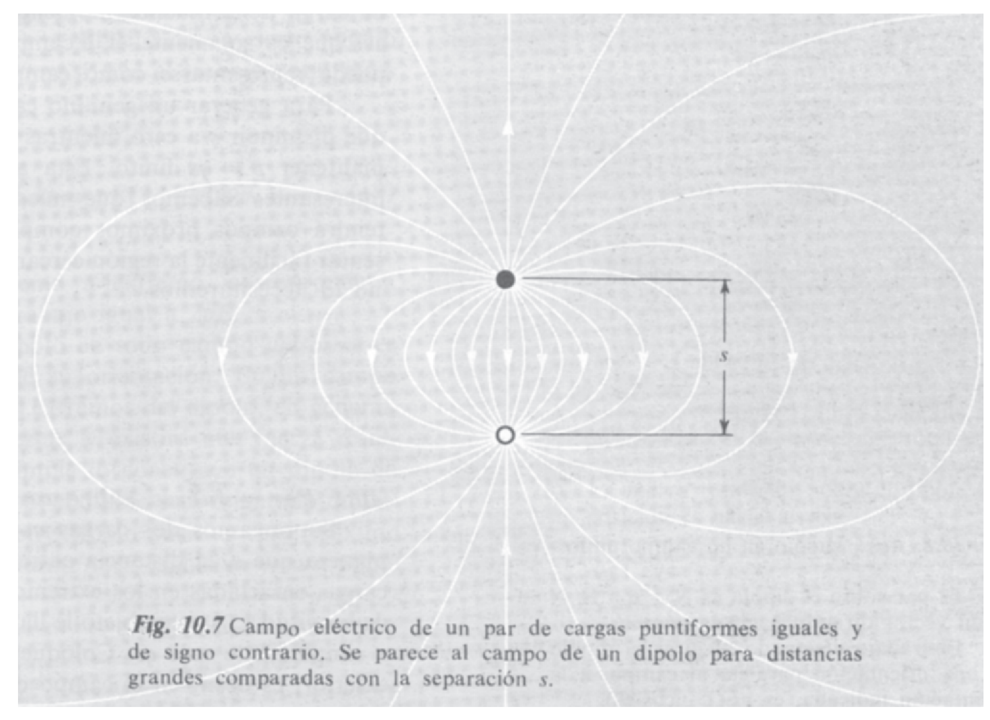
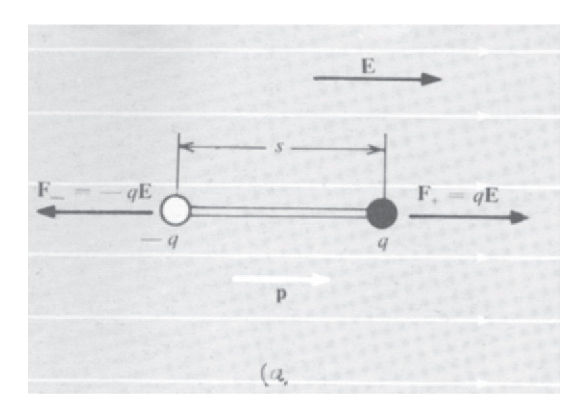


Fig. 10.7 Campo eléctrico de un par de cargas puntiformes iguales y de signo contrario. Se parece al campo de un dipolo para distancias grandes comparadas con la separación s.



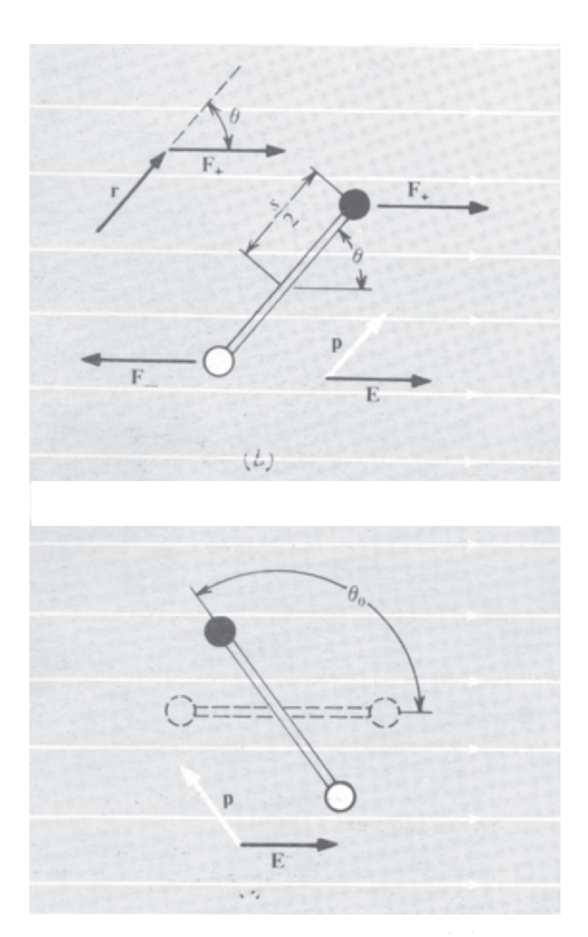


Fig. 10.8 (*a*) Dipolo en un campo uniforme.
(*b*) El par sobre el dipolo es $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$; **N** es un vector dirigido hacia la página.
(*c*) El trabajo efectuado al girar el dipolo de una orientación paralela al campo, a la orientación indicada, es $pE(1 - \cos\theta_0)$.

El campo del dipolo puede describirse de manera más simple en coordenadas polares r y θ. Sea E_r la componente de **E** en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$, y E_θ la componente perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$ en el sentido de aumento de θ. Entonces

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}\cos\theta \qquad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{15}$$

Podemos comprobar esto con la Ec. 14, o, si se conoce el gradiente en coordenadas polares, puede obtenerse directamente como el gradiente negativo del potencial, φ, dado por la Ec. 12.

Procediendo en cualquier dirección desde el dipolo, hallamos que la intensidad del campo eléctrico decrece como $1/r^3$, tal como habíamos anticipado. A lo largo del eje z el campo es paralelo al momento dipolar **p**, con módulo $2p/r^3$. En el plano ecuatorial el campo está dirigido antiparalelamente a **p** y tiene el valor $-\mathbf{p}/r^3$.

Este campo puede recordarnos uno que hemos encontrado anteriormente. Recordemos la carga puntiforme sobre el plano conductor, con su carga « imagen ». Quizá la distribución de carga más simple con momento dipolar es la de dos cargas puntiformes $+q$ y $-q$, separadas por una distancia s. Para un sistema de cargas puntiformes la Ec. 10 toma la forma de una suma. El momento dipolar de nuestro par de cargas puntiformes es precisamente qs, y el vector está dirigido de la carga negativa a la positiva. En la Fig. 10.7 se ha esquematizado el campo de este par de cargas, para subrayar, principalmente, que el campo cerca de las cargas *no* es un campo dipolar. Esta distribución de carga tiene muchos momentos multipolares, en realidad infinitos, así que es solamente el « campo lejano » a distancias $r \gg s$ el que puede representarse como campo de un dipolo.

Para generar un genuino campo dipolar en el origen tendríamos que disminuir s a cero mientras aumentábamos q ilimitadamente para mantener $p = qs$ finito. Esta abstracción muy singular no es muy interesante. Sabemos que nuestra distribución de carga molecular tendrá campos próximos complicados, así que no podremos representar fácilmente la región cercana en cualquier caso. Afortunadamente no lo necesitaremos.

10.4 Par y fuerza sobre un dipolo en un campo exterior

Supongamos dos cargas q y $-q$ conectadas mecánicamente de manera que s, la distancia entre ellas, sea fija. Podemos imaginar las cargas ensartadas en los extremos de una varilla corta no conductora de longitud s. A este objeto le llamaremos dipolo. Su momento dipolar p simplemente vale qs. Coloquemos el dipolo en un campo eléctrico exterior, es decir, en el campo de otra fuente. Ahora no nos interesa

el campo del propio dipolo. Consideremos primero un campo eléctrico uniforme, como el de la Fig. 10.8*a*. El extremo positivo del dipolo es empujado hacia la derecha, el negativo hacia la izquierda, por una fuerza de intensidad Eq. La fuerza resultante sobre el objeto es nula, y en esta posición también lo es el par. Un dipolo que forme cierto ángulo θ con la dirección del campo, como en la Fig. 10.8*b*, evidentemente experimentará un par. En general, el par **N** es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ donde **F** es la fuerza aplicada a una distancia **r** del origen. Tomando el origen en el centro del dipolo, de manera que $r = s/2$, tenemos

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_+ + (-\mathbf{r}) \times \mathbf{F}_- \tag{16}$$

N es un vector perpendicular a la figura, y su módulo es:

$$N = \frac{s}{2} Eq \operatorname{sen} \theta + \frac{s}{2} Eq \operatorname{sen} \theta = sqE \operatorname{sen} \theta = pE \operatorname{sen} \theta \tag{17}$$

Esto puede escribirse simplemente

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{18}$$

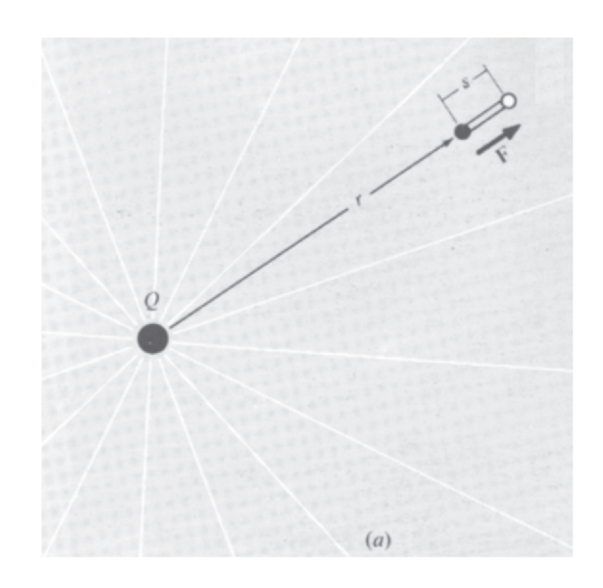
La orientación del dipolo en la Fig. 10.8*a* tiene la energía más baja. Tiene que efectuarse trabajo para girar el dipolo en cualquier otra posición. Calcularemos el trabajo requerido para girar el dipolo desde una posición paralela al campo hasta que forma un cierto ángulo θ_0, como se indica en la Fig. 10.8*c*. El giro de un cierto ángulo elemental $d\theta$ requiere el trabajo $N\,d\theta$. Así que el trabajo total efectuado es

$$\int_0^{\theta_0} N\,d\theta = \int_0^{\theta_0} pE \operatorname{sen} \theta\,d\theta = pE(1 - \cos \theta_0) \tag{19}$$

Invertir el dipolo, girando de extremo a extremo, corresponde a $\theta_0 = \pi$ y requiere una cantidad de trabajo igual a $2pE$.

La fuerza resultante sobre el dipolo en todo campo *uniforme* es evidentemente nula, prescindiendo de su orientación. En un campo no uniforme las fuerzas sobre los dos extremos del dipolo, en general, no serán exactamente iguales y opuestas, y existirá una fuerza resultante sobre el objeto. Un ejemplo simple lo constituye un dipolo en el campo de una carga puntiforme Q. Si el dipolo está orientado radialmente, como en la Fig. 10.9*a*, con el extremo positivo más próximo a la carga positiva Q, la fuerza resultante será repulsiva y su módulo vale

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(q)\frac{Q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-q)\frac{Q}{(r+s)^2} \tag{20}$$



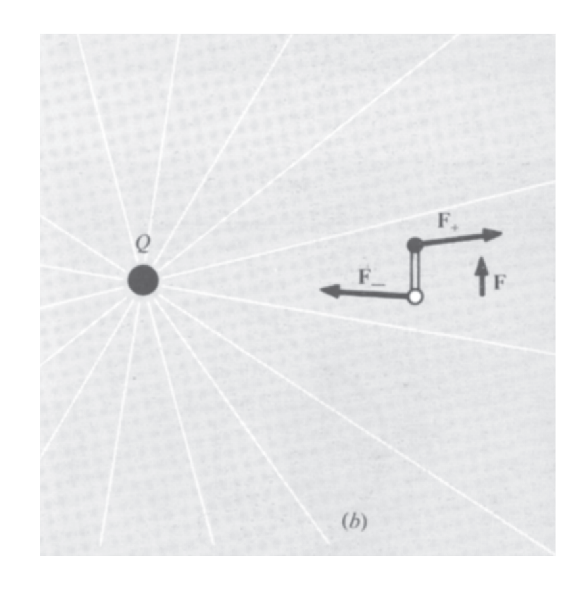


Fig. 10.9 Fuerza sobre un dipolo en un campo no uniforme.
(*a*) La fuerza resultante sobre el dipolo en esta posición está dirigida radialmente hacia fuera.
(*b*) La fuerza resultante sobre el dipolo en esta posición es hacia arriba.

Para $s \ll r$, solamente necesitamos calcularlo para el primer orden en s/r que resulta ser:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{r}\right)^2}\right] \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2s}{r}}\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2sqQ}{r^3} = \frac{sqQ}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{21}$$

En función del momento dipolar p, vale sencillamente

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2pQ}{r^3} \tag{22}$$

Con el dipolo perpendicular al campo, como en la Fig. 10.9*b*, existe también una fuerza. Ahora las fuerzas sobre los extremos, a pesar de ser iguales, no están exactamente opuestas en dirección.

No es difícil deducir una fórmula general para la fuerza sobre un dipolo en un campo eléctrico no uniforme. La fuerza depende esencialmente de los *gradientes* de las distintas componentes del campo. En general, la componente x de la fuerza sobre un dipolo de momento $\mathbf{p}$ es

$$F_x = \mathbf{p} \cdot \text{grad } E_x \tag{23}$$

con fórmulas correspondientes para F_y y F_z.

10.5 *Dipolos atómicos y moleculares; momentos dipolares inducidos*

Consideremos el átomo más simple, el átomo de hidrógeno, que consta del núcleo y un electrón. Si imaginamos el electrón, cargado negativamente, girando en torno del núcleo positivo como un planeta alrededor del sol — como en el modelo atómico original de Niels Bohr — concluiremos que el átomo, en un instante dado, posee un momento dipolar eléctrico. El vector momento dipolar $\mathbf{p}$ se dirige paralelamente al radio vector electrón-protón, y su módulo es e veces la distancia electrón protón. La dirección de este vector varía contínua y rápidamente cuando el electrón recorre su órbita. Sin duda, el *valor medio con el tiempo* de $\mathbf{p}$ será nulo para una órbita circular, pero es de creer que la variación periódica de las componentes del momento dipolar originen campos eléctricos rápidamente oscilantes y radiación electromagnética. La ausencia de tal radiación en el átomo de hidrógeno normal fue una de las más grandes paradojas de la primitiva

física cuántica. La moderna mecánica cuántica nos dice que es mejor imaginar el átomo de hidrógeno en su estado de energía más bajo (la condición usual de la mayoría de los átomos de hidrógeno en el universo) como una estructura con simetría esférica con la carga electrónica distribuida, en promedio temporal, sobre una nube que rodea al núcleo. Nada está girando u oscilando. Si pudiéramos tomar una instantánea con un tiempo de exposición inferior a 10^{-16} segun dos, podríamos descubrir un electrón situado a cierta distancia del núcleo. Pero para procesos en los que intervienen tiempos mucho mayores que éste tenemos, en efecto, una distribución continua de carga negativa que rodea al núcleo y se extiende en todas direcciones con densidad constantemente decreciente. La carga total en esta distribución es precisamente $-e$, la carga de un electrón. Aproximadamente la mitad de ésta está en el interior de una esfera de radio 0,5 angstrom ($0{,}5 \times 10^{-8}$ cm). La densidad decrece exponencialmente hacia el exterior; una esfera de sólo 2,2 angstrom de radio contiene el 99 % de la carga. El campo eléctrico en el átomo es precisamente el que produciría una distribución de carga estacionaria de esta forma, junto con el núcleo positivo.

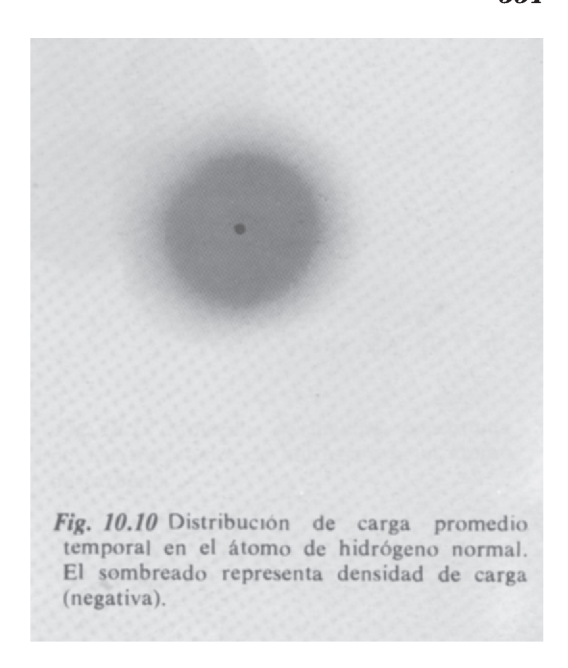


Fig. 10.10 Distribución de carga promedio temporal en el átomo de hidrógeno normal. El sombreado representa densidad de carga (negativa).

Una representación similar es la mejor para adoptar en otros átomos o moléculas. Podemos tratar a los núcleos en las moléculas como cargas puntiformes, para nuestros propósitos presentes su tamaño es demasiado pequeño para tenerlo en cuenta. La estructura electrónica entera de la molécula puede representarse como una sola nube de carga de densidad continuamente variable. La forma de esta nube y la variación de la densidad de carga en ella será distinta para moléculas diferentes. Pero en los bordes de la nube la densidad siempre disminuirá exponencialmente, así que tiene cierto sentido hablar de tamaño y forma de la distribución de carga molecular.

La mecánica cuántica hace una distinción crucial entre estados estacionarios y estados dependientes del tiempo en un átomo. El estado de menor energía es una estructura independiente del tiempo, un caso estacionario. Tiene que ser así. Es este estado de átomo o molécula el que nos interesa ahora. Los átomos pueden radiar energía electromagnética. Esto ocurre con el átomo en un estado no estacionario en el cual hay una carga eléctrica oscilante.

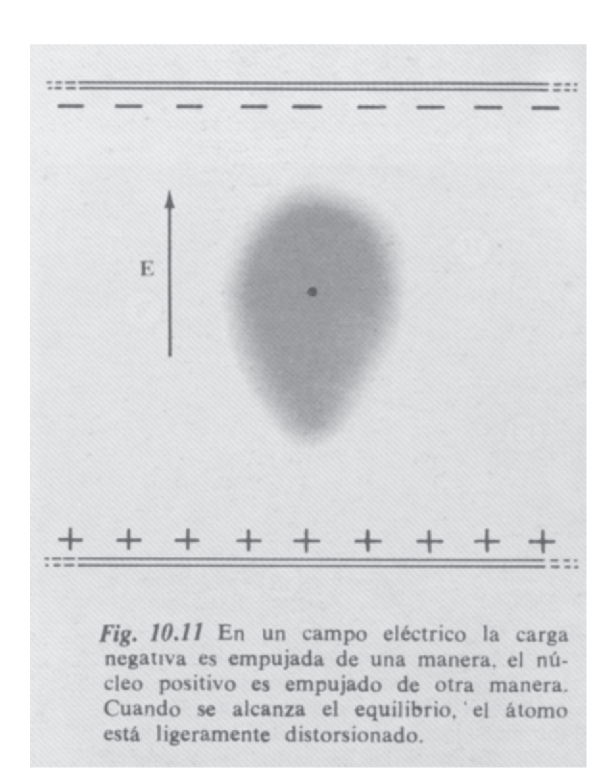


Fig. 10.11 En un campo eléctrico la carga negativa es empujada de una manera, el núcleo positivo es empujado de otra manera. Cuando se alcanza el equilibrio, el átomo está ligeramente distorsionado.

La Fig. 10.10 representa la distribución de carga en el átomo de hidrógeno normal. Es una sección recta a través de la nube esféricamente simétrica, con la densidad sugerida por el sombreado. Evidentemente el momento dipolar de esta distribución es nulo. Lo mismo le ocurre a cualquier átomo en estado de energía más bajo, no importa cuántos electrones contenga, pues en todos estos estados la distribución de electrones tiene simetría esférica. También es cierto para un átomo ionizado, aunque un ion tiene un « momento monopolar », es decir, una carga neta.

Hasta aquí no tenemos nada muy interesante. Pero ahora colocaremos el átomo de hidrógeno en un campo eléctrico debido a cierta fuente exterior, como en la Fig. 10.11. El campo eléctrico distorsiona el átomo, empujando las cargas negativas hacia abajo y al núcleo

positivo hacia arriba. El átomo perturbado tendrá un momento dipolar a causa de que el «centro de gravedad» de la carga negativa no coincidirá con el de la positiva del núcleo, sino que estará separada del núcleo cierta pequeña distancia Δz. El momento del dipolo eléctrico del átomo es ahora $e\Delta z$.

¿Qué distorsión producirá un campo de intensidad dada E? Recordemos que ya existen campos eléctricos en el átomo no perturbado, de intensidad $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}e/a^2$ en orden de magnitud, donde a es una dimensión atómica típica. Deberíamos esperar que la distorsión relativa de la estructura atómica, medida por la relación $\Delta z/a$, tenga el mismo orden de magnitud que la relación de campo perturbante E a los campos internos que mantienen el átomo unido. O sea, predecimos que

$$\frac{\Delta z}{a} \approx \frac{E}{e/4\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad (24)$$

Ahora a es una longitud del orden de 10^{-10} cm y e/a^2 es aproximadamente $3 \cdot 10^{11}$ volts/m, un campo mil veces más intenso que cualquier campo estacionario a gran escala que podamos obtener en el laboratorio. Evidentemente la distorsión del átomo viene a ser muy pequeña en cualquier caso práctico. Si la Ec. 24 es correcta, se deduce que el momento dipolar p del átomo distorsionado, que es precisamente $e\Delta z$, será

$$p = e\Delta z \approx 4\pi\varepsilon_0 a^3 E \qquad (25)$$

Ya que antes de aplicar el campo **E** el átomo tenía simetría esférica, el vector momento dipolar **p** tendrá la dirección de **E**. El factor que relaciona **p** a **E** se llama *polarizabilidad atómica,* y generalmente se denota por α.

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E} \qquad (26)$$

Adviértase que α tiene dimensiones de volumen. Según nuestra estimación es del orden de magnitud de un volumen atómico, algo así como 10^{-30} m^3. Su valor para un átomo particular dependerá de los detalles de la estructura electrónica del átomo. Un cálculo exacto, por mecánica cuántica, de la polarizabilidad del átomo de hidrógeno predice $\alpha = (9/2)a_0^3$, donde a_0 es el « radio de Bohr », $0{,}52 \times 10^{-8}$ cm, la distancia característica en la estructura del átomo H en su estado normal. En la tabla 10.2 se dan las polarizabilidades eléctricas, de varias especies de átomos, determinadas experimentalmente. Los ejemplos dados están ordenados en números de electrones crecientes. Se notan amplias variaciones de α.

Tabla 10.2 Polarizabilidades atómicas, en unidades de $4\pi \cdot 10^{-30}$ m³

Elemento	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	A	K
$\alpha =$	0,66	0,21	12	9,3	1,5	0,4	27	1,6	34

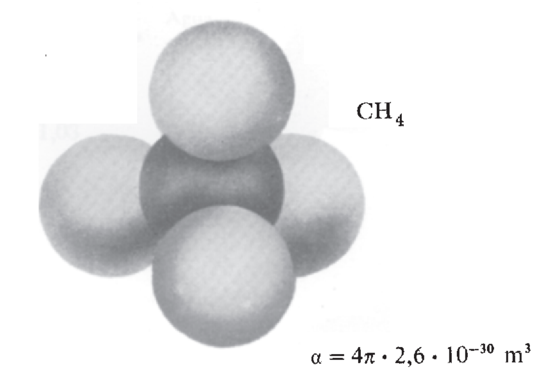


Fig. 10.12 Molécula de metano, constituida por cuatro átomos de hidrógeno y un átomo de carbono.

El que esté familiarizado con la tabla periódica de los elementos distinguirá aquí algo sistemático. El hidrógeno y los metales alcalinos, litio, sodio y potasio, que ocupan la primera columna de la tabla periódica, tienen valores grandes de α y éstos aumentan continuamente al aumentar el número atómico, desde el hidrógeno al potasio. Los gases nobles tienen polarizabilidades atómicas mucho menores, pero éstas también aumentan al pasar del helio al neón y al criptón. Aparentemente los átomos alcalinos, como una clase, se deforman fácilmente por un campo eléctrico, mientras que la estructura electrónica de un átomo de gas noble es mucho más rígida. El responsable de esta polarizabilidad fácil, en la estructura del sistema alcalino, es el electrón suelto de enlace exterior o electrón de « valencia ».

Cuando se aplica un campo eléctrico a una molécula también se produce un momento dipolar inducido. La molécula de metano, representada en la Fig. 10.12, está constituida por cuatro átomos de hidrógeno dispuestos en los vértices de un tetraedro en torno del átomo central de carbono, su polarizabilidad eléctrica, determinada experimentalmente, vale

$$32{,}6 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{m}^3$$

Es interesante compararla con la suma de las polarizabilidades del átomo de carbono y de los cuatro átomos aislados de hidrógeno. Tomando los datos de la tabla 10.2, hallamos $\alpha_C + 4\alpha_H = 52{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$. Evidentemente, el enlace de los átomos en la molécula ha alterado algo la estructura electrónica. Las medidas de las polarizabilidades atómicas y moleculares, se han utilizado mucho por los químicos como guía para la estructura molecular.

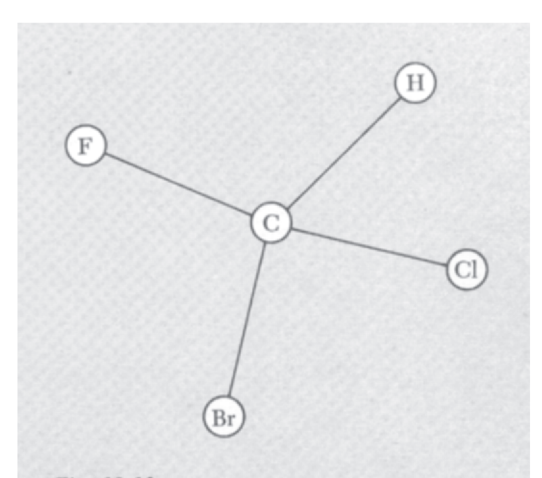


Fig. 10.13 Una molécula sin ninguna simetría, bromoclorofluorometano. Esta es metano con tres halógenos diferentes sustituyendo a tres hidrógenos. La longitud de los enlaces y las aristas del tetraedro son todas ellas algo distintas.

10.6 Momentos dipolares permanentes

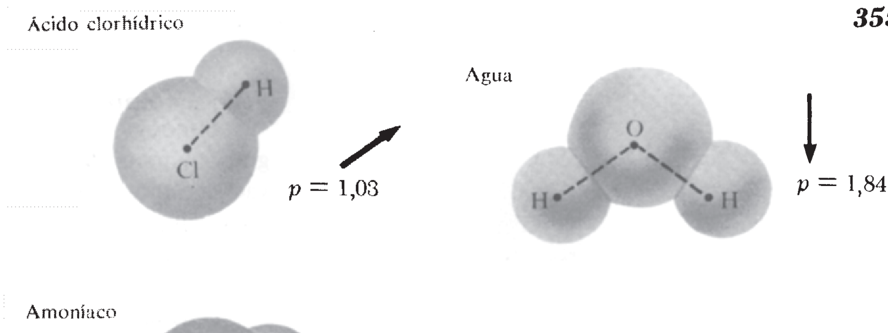
Algunas moléculas están constituidas de tal forma que poseen momento dipolar eléctrico, incluso en ausencia de campo eléctrico. En su estado normal ya no son simétricas. Un ejemplo lo tenemos en la molécula representada en la Fig. 10.13. Un ejemplo más simple lo proporciona una molécula diatómica constituida por átomos distintos, tal como la de ácido clorhídrico ClH. Sobre el eje de esta

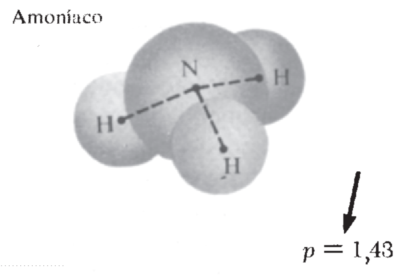
molécula no existe un punto en torno al cual la molécula sea simétrica de izquierda a derecha, los dos extremos de la molécula son distintos físicamente. Sería accidental que el « centro de gravedad » de la carga positiva y el de la negativa coincidiese en un mismo punto del eje. Cuando la molécula de HCl se forma, a partir de los átomos originalmente esféricos de H y de Cl, el electrón del átomo de H se desplaza parcialmente sobre la estructura del Cl, dejando parcialmente desnudo al núcleo de hidrógeno. Así que hay cierto exceso de carga positiva en el hidrógeno del extremo de la molécula y un exceso correspondiente de carga negativa en el extremo del cloro. El valor del momento dipolar resultante, $3{,}43 \cdot 10^{-30}$ C · m, es equivalente a desplazar a un electrón cerca de la quinta parte de un angstrom. Por contraste, el átomo de hidrógeno en un campo de 30 kilovolt/cm, con la polarizabilidad indicada en la tabla 10.2, adquiere un momento dipolar inducido menor que 10^{-33} C · m. Los momentos dipolares permanentes, cuando existen, por regla general son mucho mayores que los que pueden inducirse por los campos eléctricos ordinarios en el laboratorio *. Debido a esto, la distinción entre moléculas *polares*, tal como se llaman las moléculas con momento dipolar « formando parte de su extructura », y las moléculas *no polares*, es muy definida.

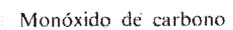
Dijimos al principio de la Sec. 10.5 que el átomo de hidrógeno tenía, en un instante, un momento dipolar. Pero luego lo deshechamos por ser nulo en el promedio temporal, dado el rápido movimiento del electrón. Ahora nos parece que estamos hablando de momentos dipolares moleculares como si una molécula fuese un objeto ordinario estacionario, como un palo de beisbol, cuyos extremos pudiesen examinarse con detenimiento para ver cual era más largo. Las moléculas se mueven más lentamente que los electrones, pero su movimiento es rápido al lado de los patrones corrientes. ¿Por qué podemos considerarlas con momentos dipolares eléctricos « permanentes »? Esta incompatibilidad puede explicarse. La contestación completa no puede darse sin algo de mecánica cuántica, pero la diferencia implica esencialmente la escala de tiempo del movimiento. El tiempo que emplea una molécula en interactuar con lo que le rodea generalmente es *más corto* que el tiempo que emplea la molécula, en su movimiento intrínseco, para promediar uniformemente el momento dipolar. De aquí que la molécula *actúe realmente* como si tuviese el momento del que hemos hablado. Un tiempo muy corto se califica como « permanente » en el mundo de una molécula y sus alrededores.

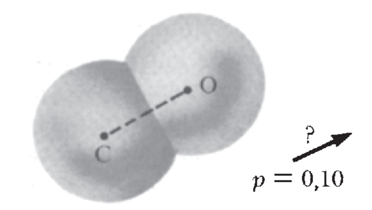
En la Fig. 10.14 se muestran algunas moléculas polares corrientes, indicando el módulo, dirección y sentido del momento dipolar permanente de cada una de ellas. La molécula de agua tiene un momento dipolar eléctrico a causa de que los ejes OH se inclinan en el punto

* Hay una buena razón para esto. Los campos eléctricos internos en los átomos y moléculas son naturalmente del orden de $e/(10^{-8}\ \text{cm})^2$ lo que es unos 10^9 volt/cm. Tal campo no podemos aplicarlo a la materia en un laboratorio por la razón de que rompería la materia a pedazos.









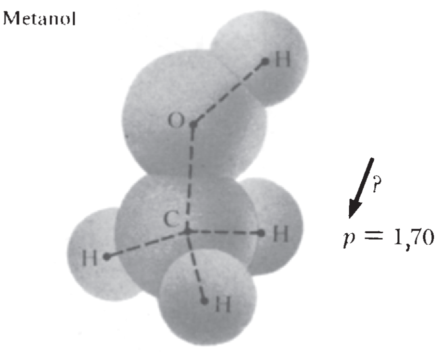
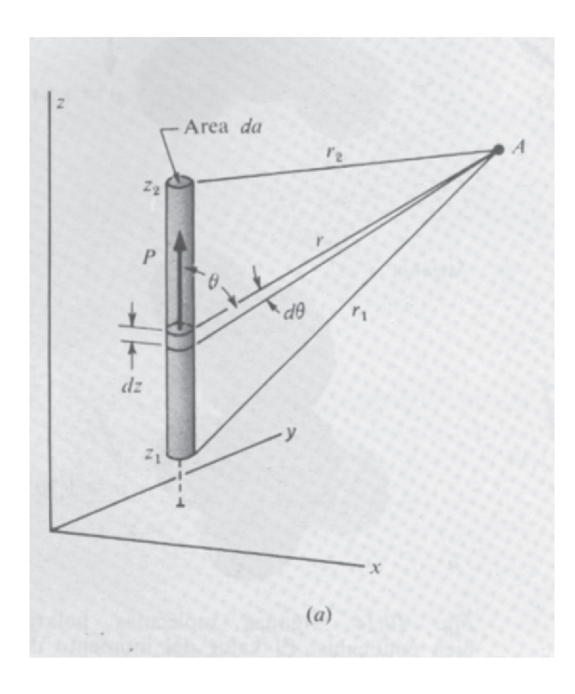


Fig. 10.14 Algunas moléculas polares bien conocidas. El valor del momento dipolar «permanente» *p* se da en unidades $10^{-29}/3$ C · m.

medio formando entre ellos un ángulo de 105°. Esta particularidad estructural tiene consecuencias de gran alcance. El momento dipolar de la molécula es el responsable de las propiedades del agua como disolvente, y juega un papel decisivo en la química de los medios acuosos. Es difícil imaginar lo que sería el mundo si la molécula de H_2O, como la molécula de CO_2, tuviese sus componentes en línea recta; probablemente no podríamos estar para verlo. Nos apresuramos a añadir que la forma de la molécula de H_2O no es una extravagancia caprichosa de la naturaleza. La mecánica cuántica ha revelado claramente por qué una molécula constituida por un átomo de ocho electrones unido a dos átomos de un electrón debe estar inclinada.

El comportamiento de una substancia polar, como dieléctrico, es sorprendentemente distinto del de los materiales compuestos de moléculas no polares. La constante dieléctrica del agua, aproximadamente, es de 80, la del alcohol metílico 33, mientras que un líquido típico no polar puede tener una constante dieléctrica de alrededor de 2. En una substancia no polar la aplicación de un campo eléctrico induce un ligero momento dipolar en cada molécula. En las substancias polares ya están presentes, pero, en ausencia de campo, están orientadas al azar, así que no tienen efecto macroscópico. Un campo eléctrico aplicado las *alinea* en cierto grado. Sin embargo, en ambos procesos, los efectos macroscópicos estarán determinados por la polarización resultante por unidad de volumen.



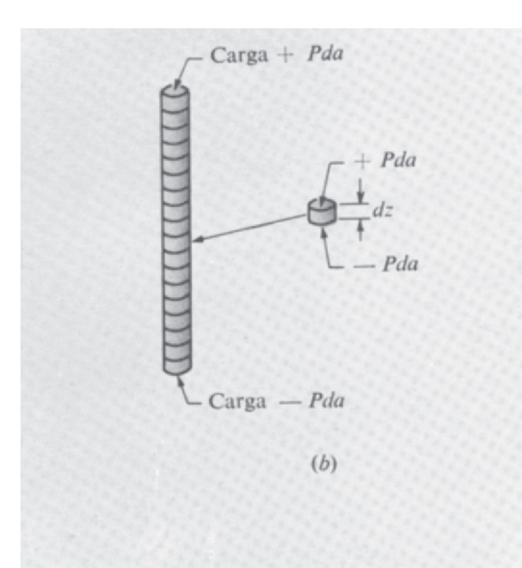


Fig. 10.15 Una columna de material polarizado (*a*) produce el mismo campo, en un punto exterior, que dos cargas, cada una en los extremos de la columna (*b*).

10.7 Campo eléctrico debido a la materia polarizada

Supongamos que construimos un bloque de materia reuniendo un gran número de moléculas, en una región del espacio previamente vacía. Supongamos, además, que cada una de estas moléculas está polarizada en la misma dirección. De momento no necesitamos tener en cuenta la naturaleza de las moléculas ni los medios con los que se mantiene la polarización. Solamente nos interesa el campo eléctrico que *ellas* producen en estas condiciones; después podemos introducir los campos de otras fuentes que puedan existir en los alrededores. Si queremos, podemos imaginar que estas moléculas poseen momento dipolar permanente, que se han alineado perfectamente y se han congelado en esta posición. Todo lo que necesitamos especificar es el número N de dipolos por centímetro cúbico, y el momento $\mathbf{p}$ de cada dipolo. Supongamos que N es tan grande que cualquier pequeño volumen dv macroscópico, contiene un gran número de dipolos. La intensidad total del momento dipolar en tal volumen es $\mathbf{p}N\,dv$. En cualquier punto alejado de este elemento de volumen, en comparación al tamaño del mismo, el campo eléctrico de estos dipolos particulares será prácticamente el mismo que si se reemplazasen por un sólo dipolo de momento $\mathbf{p}N\,dv$. Llamaremos a $\mathbf{p}N$ densidad de polarización, y la designaremos por $\mathbf{P}$, una magnitud vectorial con dimensiones carga-m/m^3, o carga/m^2. Entonces $\mathbf{P}\,dv$ es el momento dipolar asociado a este pequeño elemento de volumen dv, a efectos de cálculo del campo eléctrico a distancia. Dado que nuestra materia ha sido formada solamente por moléculas neutras, no hay carga resultante en el sistema ni en cada una de las moléculas, *solamente* tenemos que considerar los momentos dipolares como fuentes de un campo distante.

En la Fig. 10.15 se representa una columna delgada, o cilindro, de este material polarizado. Su sección recta es da, y se extiende verticalmente de z_1 a z_2. La densidad de polarización $\mathbf{P}$ en el interior de la columna, y a lo largo de ella, es uniforme y está dirigida en el sentido positivo de z. Vamos a calcular el potencial eléctrico, en cierto punto exterior, debido a esta columna de polarización. Un elemento de cilindro, de altura dz, tiene un momento dipolar $\mathbf{P}\,dv = \mathbf{P}\,da\,dz$. Su contribución al potencial en el punto A puede escribirse, teniendo en cuenta la Ec. 12 para el potencial de un dipolo,

$$d\varphi_A = \frac{P\,da\,dz\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{27}$$

El potencial debido a toda la columna es

$$\Phi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P\,da \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz\cos\theta}{r^2} \tag{28}$$

Será más simple si consideramos que $dz\cos\theta$ es precisamente dr, así

que la función a integrar en una diferencial exacta, $-d(1/r)$. El resultado de la integración es entonces

$$\varphi_A = \frac{P\,da}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{29}$$

La Ec. 29 precisamente es la misma que la expresión para el potencial en A debido a dos cargas puntiformes, una positiva de valor $P\,da$, situada en la parte superior de la columna a una distancia r_2 de A, y una negativa del mismo valor en la base de la columna. La fuente consistente en una columna de materia uniformemente polarizada es equivalente, al menos en lo que concierne al campo en todos los puntos *exteriores*, a dos cargas concentradas.

Podemos demostrar esto de otra manera sin matemáticas. Consideremos una pequeña sección de la columna de altura dz, que contiene momentos dipolares de valor $P\,da\,dz$. Hagamos una imitación o sustitución de esto tomando un aislante no polarizado, de la misma forma y tamaño, y colocando una carga $+P\,da$ en su cima y una carga $-P\,da$ en su base. Este pequeño bloque tiene ahora el mismo momento dipolar que la porción de nuestra columna original y por lo tanto producirá una contribución idéntica al campo en cualquier punto alejado A. (El campo en el interior de nuestro sustituto, o muy cerca de él, puede ser distinto del campo debido al original — de lo cual no nos preocupamos.) Ahora agrupamos un conjunto de tales bloques y los apilamos para imitar a la columna polarizada. Ellos deben producir el mismo campo en A que el debido a la columna, pues cada bloque producía la misma contribución que su contrapartida en el original (Fig. 10.15*b*). Ahora vemos lo que tenemos. En cada unión, la carga positiva de la cima de un bloque coincide con la carga negativa de la base del bloque superior a ella, neutralizándose. Las únicas cargas que permanecen sin compensar son la carga negativa $-P\,da$ en la base del bloque inferior, y la carga positiva $+P\,da$ en la cima del bloque superior. Desde un punto distante, como A, estas cargas parecen puntiformes. Igual que antes, deducimos que dos cargas tales producen en A exactamente el mismo campo que toda la columna de material polarizado.

Sin nuevos cálculos, esto puede extenderse a una placa, o cilindro recto, de proporciones cualesquiera, uniformemente polarizada en una dirección perpendicular a sus caras paralelas (Fig. 10.16*a*). La lámina puede subdividirse en un conjunto de columnas y el potencial exterior será la suma de las contribuciones de las columnas, cada una de las cuales puede sustituirse por una carga en cada extremo. Las cargas en la parte superior, $P\,da$ en el extremo de cada columna de área da, constituirán una lámina uniforme de carga superficial de densidad $\sigma = PC$ por unidad de superficie. Concluimos que el potencial en todo punto *exterior* a una placa o cilindro uniformemente polarizado es precisamente el que resultaría de dos láminas con carga superficial situadas en la posición de la parte superior y de la inferior

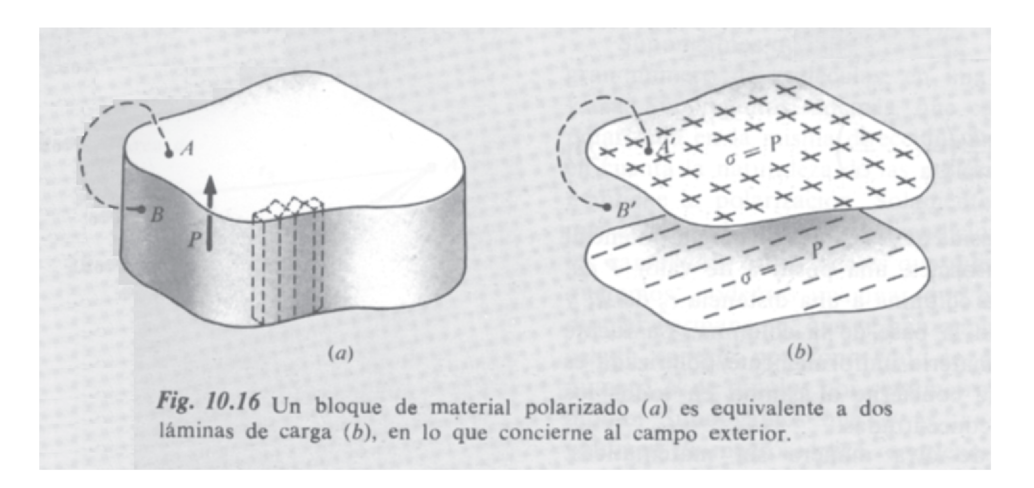


Fig. 10.16 Un bloque de material polarizado (*a*) es equivalente a dos láminas de carga (*b*), en lo que concierne al campo exterior.

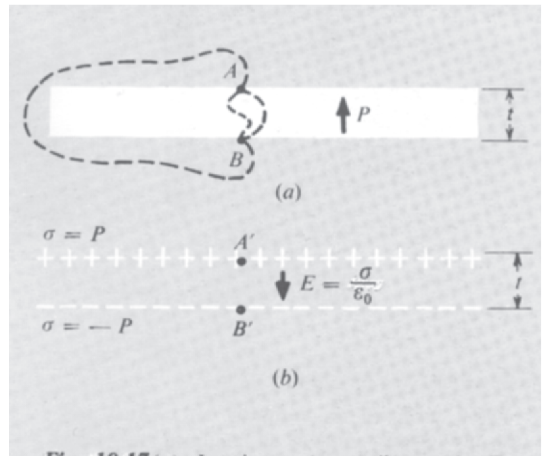


Fig. 10.17 (*a*) La integral curvilínea de **E** de *A* a *B* debe ser la misma a lo largo de todo camino, interno o externo, pues los campos internos «microscópico» o «atómico» son también conservativos (rot $\mathbf{E} = 0$). Las láminas de carga equivalentes (*b*) tienen el mismo campo *exterior*.

de la placa, conteniendo una densidad superficial de carga constante $\sigma = +P$ y $\sigma = -P$, respectivamente (Fig. 10.16*b*).

No estamos preparados completamente para decir algo acerca del campo *interior* a la placa. Sin embargo, conocemos el potencial en todos los puntos de la superficie de la placa, en la parte superior, inferior o lateral. Dos puntos cualesquiera, tales como *A* y *B* pueden unirse por un camino que transcurre enteramente por el campo exterior, de manera que la integral curvilínea $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ quede completamente determinada por el campo exterior. Debe ser la misma que la integral a lo largo del camino *A'B'* en la Fig. 10.16*b*. Un punto literalmente sobre la superficie del dieléctrico podrá estar dentro del margen de campos moleculares intensos, el « campo próximo » de la molécula que hemos excluido. Acordemos definir el contorno del dieléctrico como una superficie suficientemente alejada del núcleo atómico más externo — 10 ó 20 angstrom serían suficientes — para que en todo punto fuera de este contorno, los « campos próximos » de los átomos individuales aporten una contribución despreciable a la integral curvilínea completa de *A* a *B*.

Teniendo esto presente, consideremos una placa ancha más bien delgada de material polarizado, de espesor *t*, representada en sección recta en la Fig. 10.17*a*. La Fig. 10.17*b* muestra, asimismo en sección recta, las láminas de carga equivalentes. Para el sistema de dos láminas de carga, conocemos el campo en el espacio exterior y entre las láminas. La intensidad del campo en el interior, fuera de los bordes, debe ser precisamente $4\pi\sigma$, dirigido hacia abajo, y la diferencia de potencial entre los puntos *A'* y *B'* es por lo tanto $4\pi\sigma t$ statvolt. La *misma diferencia de potencial* debe existir entre los correspondientes puntos *A* y *B*, de nuestra placa polarizada, debido a que el campo *exterior* es el mismo en los dos sistemas.

¿Es asimismo idéntico el campo interior? Ciertamente *no*, a causa de que la placa está llena de núcleos positivos y electrones, con cam-

pos de millones de volt por centímetro dirigidos en una u otra dirección. Pero una cosa *es* la misma: la integral curvilínea del campo, tomada a lo largo de *cualquier* camino interior de A a B, debe ser $\varphi_{B'} - \varphi_{A'}$, que hemos visto que es la misma que $\varphi_B - \varphi_A$, que es igual a $(1/\varepsilon_0)\sigma t$, o $(1/\varepsilon_0)Pt$. Esto debe ser así porque la introducción de cargas atómicas, no importa su distribución, no puede destruir la propiedad conservativa del campo eléctrico, expresada al establecer que $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es independiente del camino, o rot $\mathbf{E} = 0$.

Sabemos que en la Fig. 10.17*b* la diferencia de potencial entre la parte superior y la inferior de la lámina es casi constante, excepto cerca de los bordes, a causa de que en el interior el campo eléctrico es prácticamente uniforme. Por lo tanto en el área central de nuestra placa polarizada, la diferencia de potencial entre la cima y la base debe también ser constante. En esta región, la integral curvilínea $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ desde *cualquier* punto A de la parte superior de la placa a *cualquier* punto B de la parte inferior, a lo largo de *cualquier* camino, debe dar siempre el mismo valor $(1/\varepsilon_0)Pt$. La Fig. 10.18 es una «imagen ampliada » de la región central de la placa, en la cual las moléculas polarizadas se han representado algo parecidas a las moléculas de agua todas orientadas de la misma manera. No hemos intentado describir los campos muy intensos que existen entre las moléculas, y dentro de ellas. (A una distancia de diez angstrom de una molécula de agua, el campo valdría varios centanares de kilovolt/cm, como puede deducirse de la Fig. 10.14 y la Ec. 15.) Debemos imaginar configuraciones de campo algo más complicadas en las proximidades de cada molécula. Ahora bien, el $\mathbf{E}$ que interviene en $\int E \cdot d\mathbf{s}$ significa el *campo eléctrico total* en un punto dado del espacio, en el interior o en el exterior de una molécula; incluye los campos intensos y complicados antes mencionados. Hemos llegado a la notable conclusión de que *todo* camino a través de este conjunto de cargas y campos, tanto si esquiva las moléculas como si penetra en ellas, debe dar el mismo valor para la integral curvilínea a lo largo del mismo, a saber, el valor que hallamos en el sistema de la Fig. 10.17*b*, donde el campo es completamente uniforme y tiene el valor $4\pi P$.

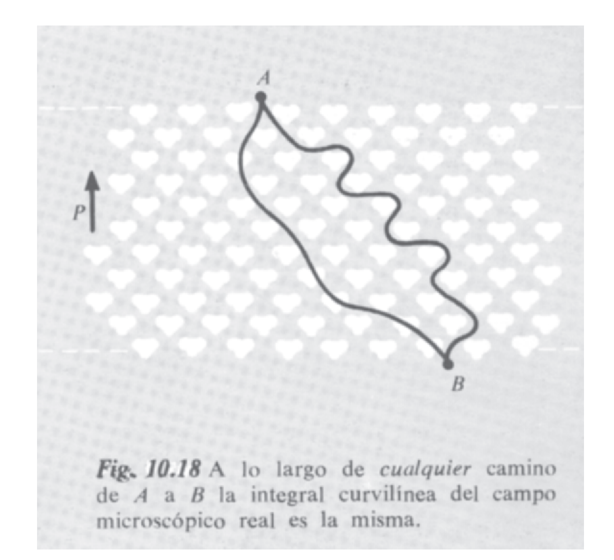


Fig. 10.18 A lo largo de *cualquier* camino de A a B la integral curvilínea del campo microscópico real es la misma.

Esto nos indica que el *promedio espacial* del campo eléctrico dentro de nuestra placa polarizada debe ser $-(1/\varepsilon_0)\mathbf{P}$. Por promedio espacial de un campo $\mathbf{E}$ en cierto columen V, que designamos por $\langle \mathbf{E} \rangle_V$ entendemos precisamente esto:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} \, dv \tag{30}$$

Una manera de repartir imparcialmente el campo en muchas dv pequeñas iguales en las que se puede dividir V, sería medir el campo a lo largo de cada línea en vez de un « haz de fibras » de líneas paralelas muy próximas. Acabamos de ver que la integral curvilínea de $\mathbf{E}$

a lo largo de cualquier camino, o de todos, es el mismo que si estuviésemos en un campo eléctrico de intensidad constante — $4\pi\mathbf{P}$. Esta es la justificación para la conclusión de que

$$\langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P} \tag{31}$$

Este campo *medio* es una cantidad *macroscópica*. El volumen en el que se toma el promedio debe ser suficientemente grande para que contenga muchas moléculas, de otro modo el promedio fluctuaría de un volumen a otro adyacente. El campo medio $\langle \mathbf{E} \rangle$ definido por la Ec. 30 es realmente el único tipo de campo *macroscópico*, en el interior de un dieléctrico, del que podamos hablar. Proporciona la única contestación satisfactoria, en el contexto de una descripción macroscópica de la materia, a la pregunta, « ¿cuál es el campo eléctrico en el interior de un material dieléctrico? ».

Al **E**, en la integral del segundo miembro de la Ec. 30, podemos llamarle campo *microscópico*. Si mandamos a alguien a medir los valores del campo que necesitamos para la integral curvilínea, medirá campos eléctricos en el vacío, en presencia, por supuesto, de carga eléctrica. Necesitaría instrumentos muy finos, pues se le puede requerir que mida el campo en un punto determinado en el interior o en el extremo de cierta molécula. ¿Tenemos derecho a hablar de esta manera acerca de tomar la integral curvilínea de **E** a lo largo de cierto camino que bordee el extremo sudoeste de una molécula particular y luego atraviese su vecina? Sí. La justificación es la sólida evidencia de que las leyes del electromagnetismo se cumplen a una escala de distancias mucho menores que las del tamaño atómico. Podríamos incluso describir un experimento que serviría para medir el promedio del campo eléctrico microscópico a lo largo de un camino bien definido dentro de los límites de las dimensiones atómicas. Todo lo que tenemos que hacer es lanzar una partícula energética cargada, por ejemplo una partícula alfa, a través del material. De la variación resultante de su cantidad de movimiento podría deducirse el campo eléctrico medio que actúa sobre ella, durante su trayecto total.

Revisemos las propiedades del campo promedio, o macroscópico $\langle \mathbf{E} \rangle$ definido por la Ec. 30. Su integral curvilínea $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ entre dos puntos A y B que están razonablemente separados es independiente del camino. Se deduce que rot $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$ y que $\langle \mathbf{E} \rangle$ es el gradiente negativo de un potencial $\langle \varphi \rangle$. Esta función potencial $\langle \varphi \rangle$ es a su vez un promedio, en el sentido de la Ec. 30, del potencial microscópico φ. (Éste se eleva a varios millones de volts en el interior de cada núcleo atómico.) La integral de superficie de $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\int \langle \mathbf{E} \rangle \cdot d\mathbf{a}$, extendida a cualquier superficie que encierre un volumen razonablemente grande, es igual a $1/\varepsilon_0$ veces la carga dentro de este volumen *. Es decir, $\langle \mathbf{E} \rangle$

* Lo aceptamos sin demostración, posponiendo para el próximo capítulo la relación de la integral de superficie de un campo promedio con el promedio de la integral de superficie del campo microscópico, donde la cuestión surge en la Sección 11.8 en conexión con el campo magnético dentro de la materia. (Véase Fig. 11.18.)

obedece a la ley de Gauss, una expresión que también tiene una forma diferencial: div <E> = $(1/\varepsilon_0)\langle\rho\rangle$, entendiendo que $\langle\rho\rangle$ es un promedio local en un adecuado volumen macroscópico. Resumiendo, el promedio espacial de las magnitudes <**E**>, $\langle\varphi\rangle$ y $\langle\rho\rangle$ está relacionado entre éstas de la misma manera que lo está el campo eléctrico, el potencial y la densidad de carga en el vacío.

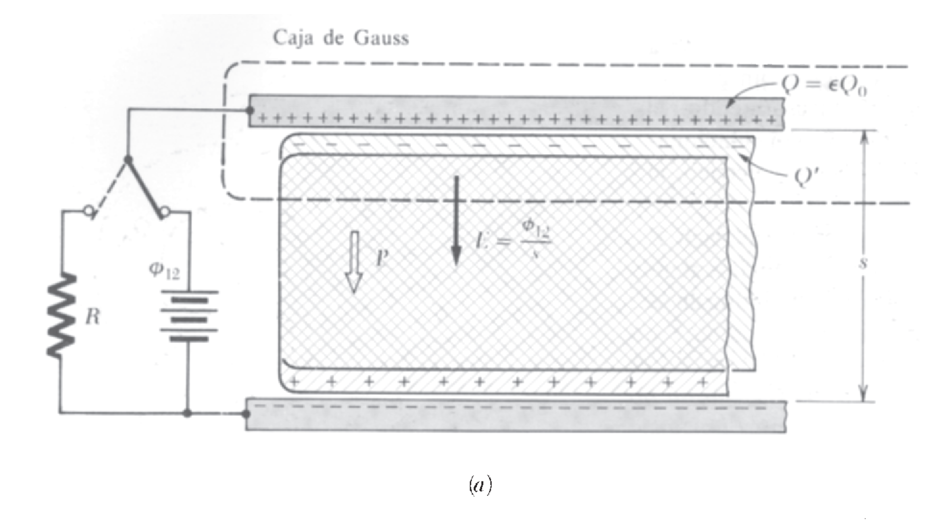
De ahora en adelante, cuando hablemos de campo eléctrico **E** dentro de un trozo de materia mucho mayor que una molécula entenderemos un promedio o campo macroscópico, tal como se define en la Ec. 30, incluso cuando los corchetes < > se omitan.

10.8 Otro aspecto del condensador

Al empezar este capítulo hemos visto de manera cualitativa cómo la presencia de un dieléctrico entre las placas de un condensador aumenta su capacidad. Ahora estamos preparados para analizar cuantitativamente el condensador lleno de dieléctrico. Lo que hemos aprendido acerca del campo eléctrico dentro de la materia es la clave del problema. Identificamos como campo macroscópico **E**, el promedio espacial del campo microscópico. La integral curvilínea de este **E** macroscópico entre dos puntos A y B es independiente del camino e igual a la diferencia de potencial. Volviendo a la Fig. 10.2*a* observamos que el campo **E** en el condensador vacío debía haber tenido el valor φ_{12}/s. Pero la diferencia de potencial entre las placas, φ_{12}, que se estableció con la batería, era exactamente el mismo en el condensador lleno de dieléctrico (Fig. 10.2*b*). De donde el campo **E** en el dieléctrico, entendido ahora como campo macroscópico, debe tener el mismo valor, pues se extiende y es uniforme en la misma distancia s. (Las capas en el diagrama son realmente despreciables en espesor, comparadas con s.) Luego la carga total en y cerca de la placa superior debe ser la misma que en el condensador vacío, o sea, Q_0. Para demostrar esto solamente necesitamos aplicar la ley de Gauss a una caja imaginaria adecuada que encierre las capas de carga, como se indica en la Fig. 10.19. La carga consta de dos partes, la carga sobre la placa Q (que se irá cuando el condensador se descargue) y Q', la carga que pertenece al dieléctrico. Ahora bien, $Q = \varepsilon Q_0$, que constituía nuestra definición de ε. Por tanto, si $Q + Q' = Q_0$ como acabamos de concluir, debemos tener

$$Q' = Q_0 - Q = Q_0\,(1 - \varepsilon) \qquad (32)$$

Podemos pensar de este sistema como la superposición de un condensador vacío y una lámina dieléctrica polarizada, Fig. 10.19*a* y *b*. En el condensador vacío con carga εQ_0 el campo eléctrico E'' sería ε veces el campo E. En la lámina dieléctrica aislada polarizada el cam-



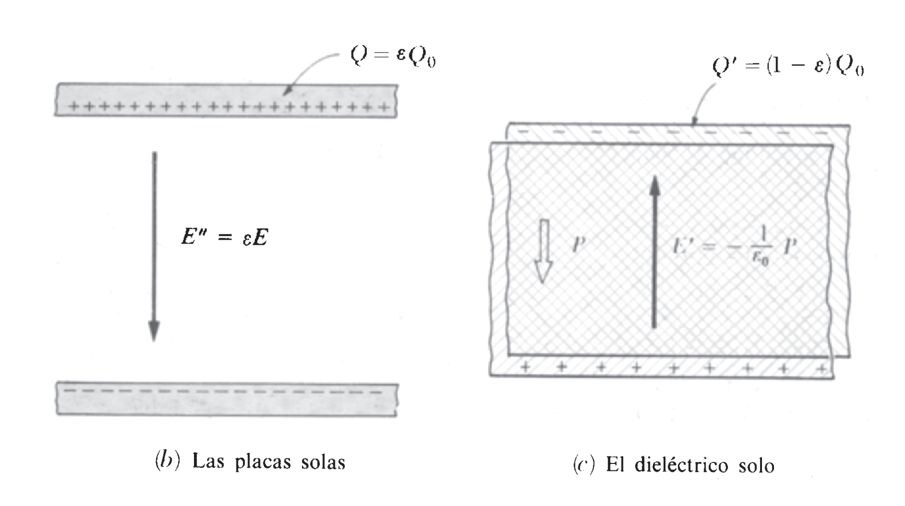


Fig. 10.19 El condensador lleno de dieléctrico de la Fig. 10.2*b*. El campo *E* que es el campo promedio, o macroscópico, en el dieléctrico, es φ_{12}/s que es igual al campo en el condensador vacío de la Fig. 10.2*a*. La carga en el interior de la caja de Gauss debe ser igual a Q_0, la carga en la placa de este condensador vacío. El sistema puede considerarse como la superposición de un condensador vacío (*b*) y un dieléctrico polarizado (*c*).

po E' es $-(1/\varepsilon_0)P$, como se establece en la Ec. 31. La superposición de estos dos crea el campo real *E*.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'' + \mathbf{E}' = \varepsilon\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P} \tag{33}$$

La Ec. 33 puede reordenarse así:

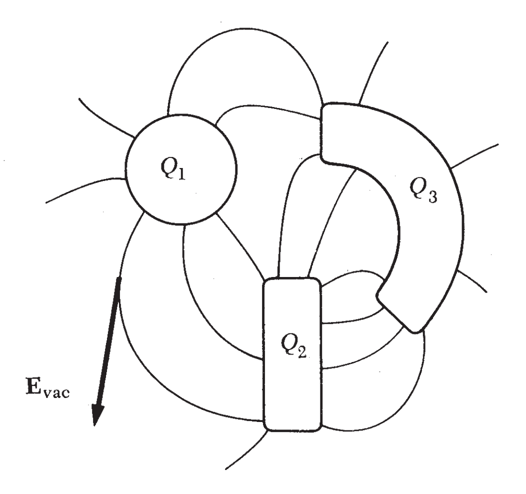
$$\frac{P}{\varepsilon_0 E} = (\varepsilon - 1) \tag{34}$$

La relación $P/\varepsilon_0 E$ se llama susceptividad eléctrica del material dieléctrico denotado por χ_e (letra griega ji).

En la mayoría de materiales bajo circunstancias ordinarias es el campo **E** el que *origina* **P**. La relación es lineal. Podemos decir que la susceptividad eléctrica χ_e es una constante característica del material particular y no depende de la intensidad del campo eléctrico o del tamaño y forma de los electrodos. Sin embargo, se conocen casos, generalmente en los que intervienen materiales compuestos de moléculas polares, en los cuales la polarización puede congelarse literalmente dentro. Un bloque de hielo polarizado por un campo aplicado externamente y luego enfriado en helio líquido mantendrá su polarización indefinidamente, después de retirar el campo externo, proporcionando un ejemplo real de la lámina hipotética polarizada de la Fig. 10.18.

Estrictamente hablando, llenar un condensador vacío con material dieléctrico aumenta su capacidad por el preciso factor ε característico de este material, solamente si llenamos todo el espacio alrededor, o al menos todo el espacio donde haya cualquier campo eléctrico. En el ejemplo discutido se suponía tácitamente que las placas eran tan grandes comparadas con la separación que el «efecto de borde», incluyendo la pequeña cantidad de carga que estaría fuera de las placas cerca del borde (véase Fig. 3.12*b*), sería despreciable. Puede hacerse una exposición completamente general acerca de un sistema de conductores de cualquier forma o distribución que esté enteramente sumergido en un dieléctrico homogéneo, por ejemplo, un gran tanque de aceite. Con cargas cualesquiera, Q_1, Q_2,... etc., en los distintos conductores, el campo eléctrico macroscópico E_{med} en cualquier posición en el medio es precisamente $1/\varepsilon$ veces el campo en el vacío E_{vac} que existiría en aquella posición con las mismas cargas en los mismos conductores en el vacío (Fig. 10.20). Esto tiene importantes consecuencias en los semiconductores. Por ejemplo, cuando al silicio se le añaden impurezas de fósforo para producir un semiconductor tipo *n*, la elevada constante dieléctrica del cristal de silicio (véase Tabla 10.1) reduce grandemente la atracción electrostática entre los electrones más externos del átomo de fósforo y el resto del átomo. Esto facilita al electrón abandonar el ion P^- y pasar a la banda de conducción, como en la Fig. 4.11*a*.

Esto nos aporta un problema más general. ¿Qué ocurre si el espacio en nuestro sistema está parcialmente lleno con dieléctrico y parcialmente vacío, con los campos eléctricos en ambas partes? Empezaremos con un ejemplo algo artificial pero instructivo, una esfera maciza polarizada en un espacio vacío.



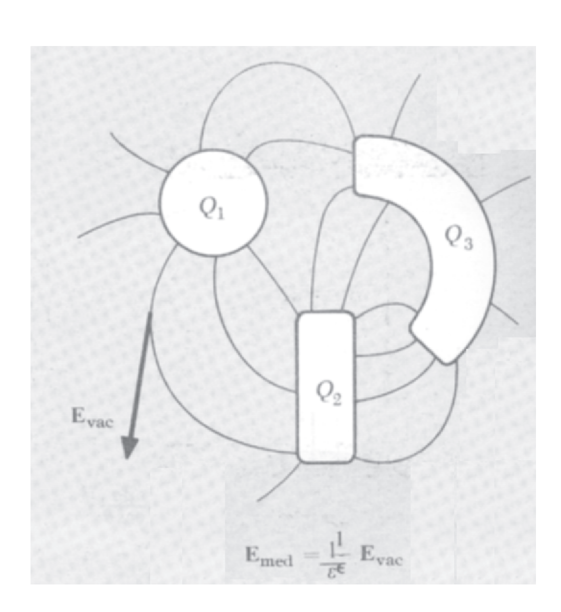


Fig. 10.20 Para las mismas cargas en los conductores, la presencia del medio dieléctrico reduce todas las intensidades del campo eléctrico (y por tanto todas las diferencias de potencial) por el factor $1/\varepsilon$. Las cargas Q_1, Q_2, y Q_3 son las cargas que saldrían de los conductores si se descargase el sistema.

10.9 *Campo de una esfera polarizada*

La esfera maciza de la Fig. 10.21*a* se supone uniformemente polarizada, como si se hubiese formado con la substancia de la placa de la Fig. 10.16*a*. ¿Cuál debe ser el campo eléctrico, dentro y fuera de la esfera? Este problema es instructivo y los resultados son útiles en otros aspectos. Como siempre **P** designará la densidad de polarización, constante en módulo, dirección y sentido, en todo el volumen de la esfera. El material polarizado se dividirá, como la lámina de la Fig. 10.16*a*, en columnas paralelas a **P**, y cada una de ellas sustituida por una carga de valor ($P \times$ *sección recta de la columna*) en la parte superior y en la inferior. Así que el campo que buscamos es el de una distribución superficial de carga repartida sobre una esfera con densidad $\sigma = P \cos \theta$. El factor $\cos \theta$ interviene, como se deduce de la figura, debido a que la columna de sección recta da intercepta sobre la esfera una porción de superficie de área $da/\cos \theta$. La Fig. 10.21*b* es una sección recta de esta capa de carga superficial equivalente, en la cual la densidad de carga se ha indicado por el espesor variable del semicírculo negro en la parte superior (densidad de carga positiva) y del semicírculo blanco inferior (densidad de carga negativa).

Si no se nos hubiese ya ocurrido, esta figura puede sugerirnos que consideremos la polarización **P** originada por el ligero desplazamiento de una bola llena uniformemente de carga positiva con densidad cúbica ρ constante, relativo a una bola de carga negativa de densidad $-\rho$. Esto dejaría sin compensar carga positiva asomando en la parte superior y negativa en la inferior, cuyos valores varían precisamente como $\cos \theta$ en ambos límites. En el interior, donde la densidad de carga positiva y negativa se superponen, se neutralizan mutuamente.

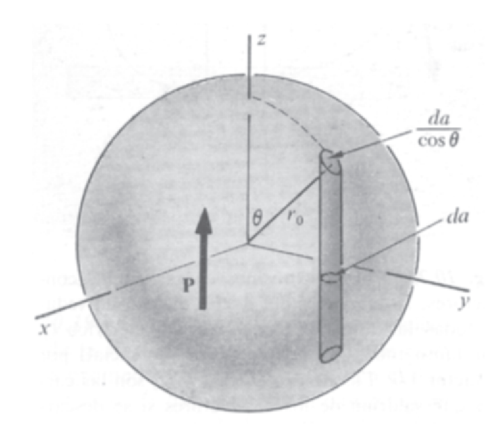
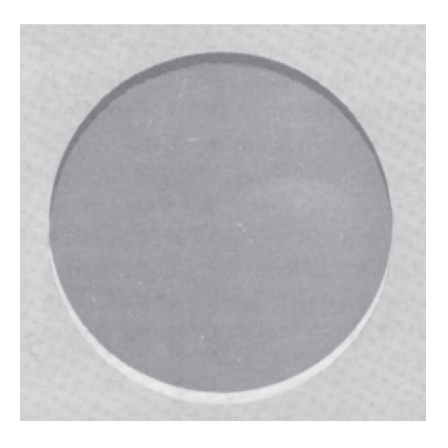


Fig. 10.21 (*a*) Dividamos la esfera polarizada en varillas polarizadas, y sustituyamos cada varilla por porciones de carga en la superficie de la esfera.



(*b*) Una bola con densidad cúbica positiva y una bola con densidad cúbica negativa, ligeramente desplazadas, son equivalentes a una distribución de carga en la superficie esférica.

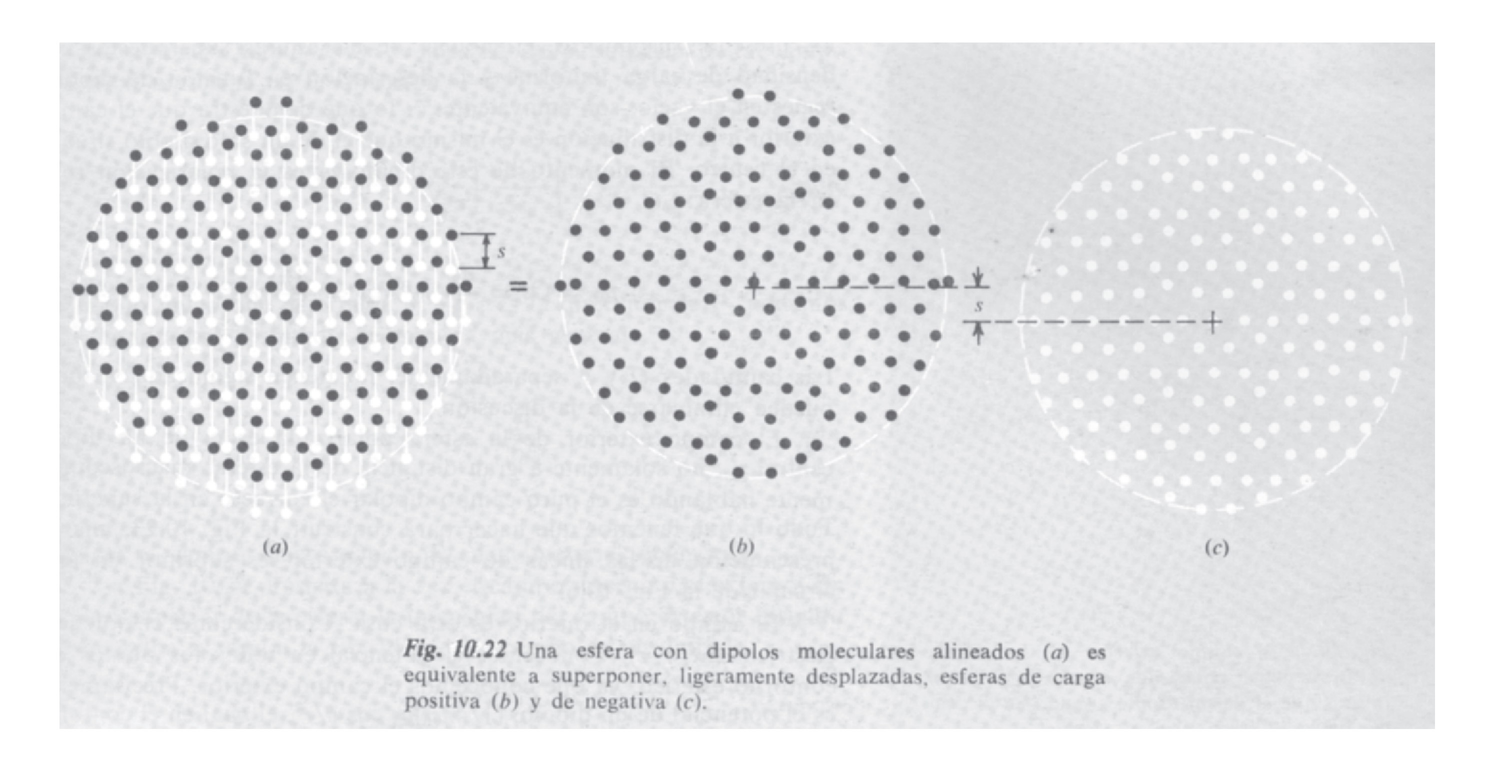


Fig. 10.22 Una esfera con dipolos moleculares alineados (*a*) es equivalente a superponer, ligeramente desplazadas, esferas de carga positiva (*b*) y de negativa (*c*).

Tomando esta representación, vemos una manera muy fácil de calcular el campo *exterior* a la capa superficial de carga. Como sabemos, toda distribución esférica de carga produce un campo exterior igual al que daría lugar su carga total concentrada en el centro. Así que la superposición de las dos esferas con la carga total $+Q$ y $-Q$ respectivamente, con sus centros ligeramente desplazados en s, producirá un campo exterior igual al de dos cargas puntiformes Q y $-Q$ separadas s m. Esto es precisamente un dipolo con momento dipolar $p_0 = Qs$.

Una descripción microscópica de la substancia polarizada nos conduce a la misma conclusión. En la Fig. 10.22*a* los dipolos moleculares realmente responsables de la polarización **P** se han representado toscamente como un par de cargas q y $-q$, separadas s cm, que constituyen un dipolo de momento $p = qs$. Con N de ellos por centímetro cúbico, $P = N_p = Nqs$, y el número total de dipolos en la esfera es $(4\pi/3)r_0^3N$. Las cargas positivas, consideradas separadamente (Fig. 10.22*b*), están distribuidas en una esfera que contiene una carga total $Q = (4\pi/3)r_0^3Nq$, y las cargas negativas ocupan una esfera similar con su centro desplazado (Fig. 10.22*c*). Evidentemente cada una de estas distribuciones de carga puede sustituirse por una carga puntiforme en su centro, en lo que respecta al campo suficientemente exterior a esta distribución. « Suficientemente exterior » significa convenientemente alejado de la superficie para que la distribución real discreta de carga no tenga importancia, y por supuesto que lo ignoramos siempre que hablamos de campos macroscópicos. Así que, para

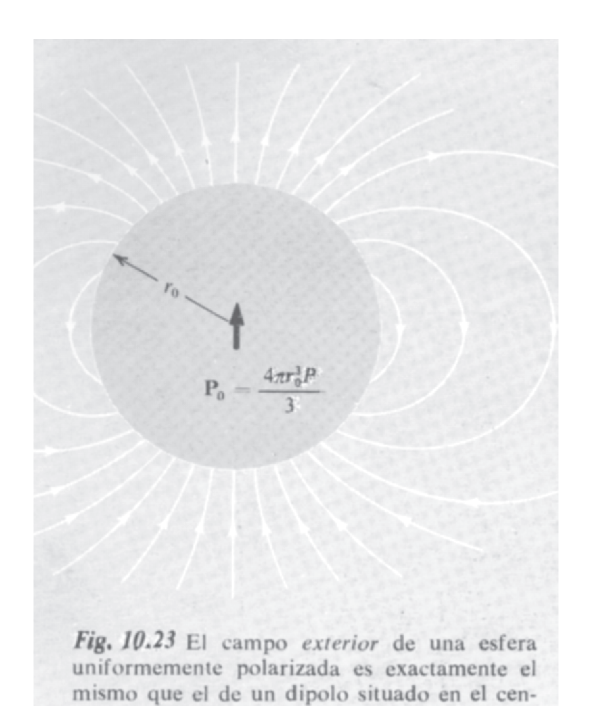


Fig. 10.23 El campo *exterior* de una esfera uniformemente polarizada es exactamente el mismo que el de un dipolo situado en el centro de la esfera.

Fig. 10.24 Campo de la esfera uniformemente polarizada, tanto en el exterior como en el interior.

los presentes propósitos, el modelo de las esferas superpuestas con densidad de carga uniforme y la descripción en función de dipolos reales en el vacío, son equivalentes *, lo que demuestra que el campo exterior a la distribución es el mismo que el de un sólo dipolo situado en el centro. El momento de este dipolo p_0 es la polarización total en la esfera:

$$p_0 = Qs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 Nqs = \frac{4\pi}{3} r_0^3 P \tag{35}$$

Las cantidades Q y s, separadamente, no tienen significado y ahora pueden eliminarse de la discusión.

El campo exterior de la esfera polarizada es el de un dipolo central p_0, no solamente a gran distancia de la esfera; macroscópicamente hablando es el puro campo dipolar el correcto en la superficie. Todo lo que tenemos que hacer para construir la Fig. 10.23, una representación de las líneas de campo exterior, es suprimir un área circular de la Fig. 10.6.

El campo en el interior es otra cosa. Consideremos el potencial eléctrico $\varphi(x, y, z)$. Conocemos el potencial en todos los puntos del contorno esférico, ya que conocemos el campo exterior. Precisamente es el potencial de un dipolo, $(1/4\pi\varepsilon_0)p_0 \cos\theta/r^2$, el cual en el contorno esférico de radio r_0 se convierte en

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p_0 \frac{\cos\theta}{r_0^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} P r_0 \cos\theta \tag{36}$$

Ya que $r_0 \cos\theta = z$, vemos que el potencial en un punto de la esfera depende solamente de su coordenada z:

$$\varphi = \frac{P_z}{3\varepsilon_0} \tag{37}$$

El problema de hallar el campo interior se reduce a éste: La Ec. 37 da el potencial en todo punto del contorno de la región, en el interior de la cual φ debe satisfacer a la ecuación de Laplace. Según el teorema de unicidad, demostrado en el Cap. 3, esto es suficiente para determinar φ en el interior. Si podemos hallar *una* solución, debe ser *la* solución. Ahora bien, la función Cz, donde C es una constante, satisface a la ecuación de Laplace, así que la Ec. 37 nos ha dado realmente la solu-

---

* Esto podía haber sido suficientemente evidente, pero hemos desarrollado los pormenores, en este caso, para suavizar todo recelo de que el modelo de «bola uniformemente cargada», que es distinto de lo que sabemos que es el interior de una substancia real, podía ser desencaminado.

ción al potencial *en el interior* de la esfera. Es el potencial de un campo eléctrico uniforme en la dirección $-z$:

$$E_z = -\frac{\partial \varphi_{\text{in.}}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_z}{3\varepsilon_0}\right] = -\frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{38}$$

Como lo único que determina el eje z es la dirección de **P**, podemos escribir nuestro resultado de manera más general:

$$\mathbf{E}_{\text{in.}} = -\frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{39}$$

Este es el campo macroscópico **E** en el material polarizado.

La Fig. 10.24 presenta a la vez el campo interno y el externo. En el polo superior de la esfera, la intensidad del campo exterior dirigido hacia arriba es, según la Ec. 14 para el campo de un dipolo,

$$E_z = \frac{P_0}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{(4\pi r_0{}^3 P/3)}{2\pi\varepsilon_0 r_0{}^2} = \frac{2P}{3\varepsilon_0} \quad \text{(exterior)} \tag{40}$$

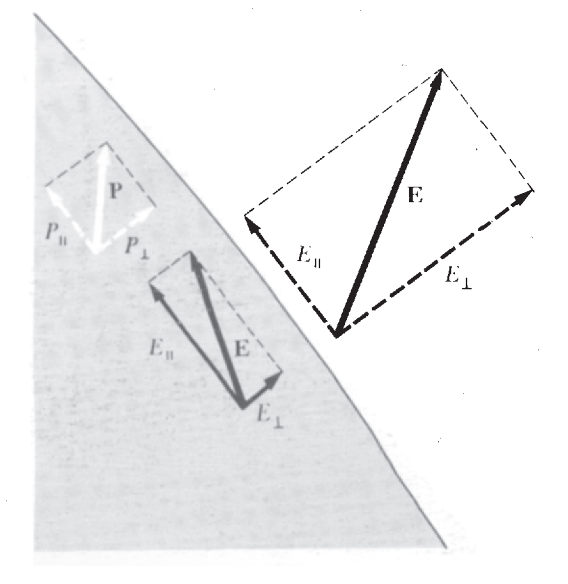
el cual, en módulo, es exactamente el doble del campo interno dirigido hacia abajo. Este ejemplo ilustra las reglas generales para el comportamiento de las componentes del campo en la superficie de un medio polarizado. **E** es discontinuo en el contorno de un medio polarizado exactamente como lo sería en una superficie en el vacío que contuviese una carga superficial $\sigma = P_\perp$. El símbolo $P_\perp$ significa la componente de **P** normal a la superficie, hacia fuera. Se deduce que la componente normal de **E** debe variar bruscamente en la cantidad P/ε_0, mientras que $E_\parallel$ la componente de **E** paralela al contorno es continua, es decir, tiene el mismo valor en ambos lados del contorno (Fig. 10.25). En realidad, en el polo norte o sur de la esfera la variación neta de E_z es

$$\frac{2P}{3\varepsilon_0} - \left(-\frac{P}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

Teniendo en cuenta la Ec. 15 para el campo del dipolo, podemos comprobar que la componente de **E** paralela a la superficie es continua de dentro a fuera, para todo punto de la esfera.

Ninguna de estas conclusiones depende de cómo se ha originado la polarización de la esfera. Suponiendo que cierta esfera *está* uniformemente polarizada, la Fig. 10.24 representa *su* campo. Sobre éste puede superponerse cualquier campo de otras fuentes, representando así muchos sistemas posibles. Esto no afectará la discontinuidad de **E**

Fig. 10.25 Variación de E en el contorno de un dieléctrico polarizado. $E_\parallel$ es la misma en ambos lados del contorno. $E_\perp$ aumenta en $(1/\varepsilon_0)P_\perp$ al pasar del dieléctrico al vacío (E y P no están dibujados a la misma escala).



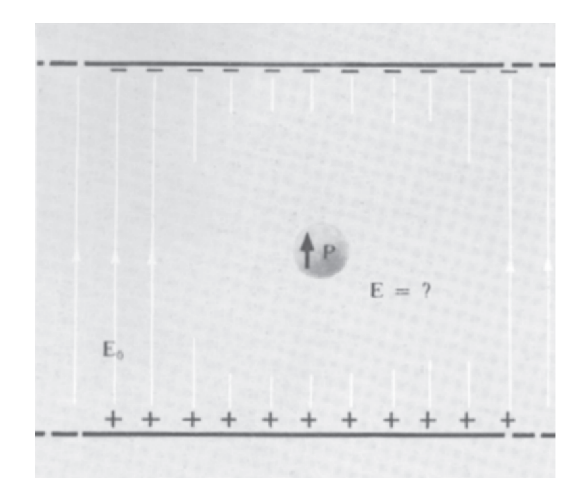


Fig. 10.26 Las fuentes del campo $\mathbf{E}_0$ permanecen fijas. La esfera dieléctrica desarrolla cierta polarización **P**. El campo total **E** es la superposición de $\mathbf{E}_0$ y del campo de esta esfera polarizada.

en el contorno del medio polarizado. Las reglas recién establecidas aquí se aplican, por tanto, a todo sistema, la discontinuidad de **E** está determinada solamente por la polarización existente.

10.10 Esfera dieléctrica en un campo uniforme

Como ejemplo, coloquemos una esfera de material dieléctrico, caracterizado por una constante dieléctrica ϵ, en un campo eléctrico homogéneo $\mathbf{E}_0$, como el campo entre las placas de un condensador plano en el vacío, Fig. 10.26. Las fuentes de este campo, las cargas en las placas, que están alejadas de la esfera para que no haya perturbación al introducir la esfera. Entonces, sea el que fuere el campo en las proximidades de la esfera, será $\mathbf{E}_0$ a gran distancia. Esto es lo que se dio a entender al colocar una esfera en un campo uniforme. El campo total **E** no es uniforme en las proximidades de la esfera. Es la *suma* del campo uniforme $\mathbf{E}_0$ de las fuentes distantes y un campo $\mathbf{E}'$ debido a la propia materia polarizada:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \tag{41}$$

El campo $\mathbf{E}'$ depende de la polarización **P** del dieléctrico, que a su vez depende del campo eléctrico **E** en el interior de la esfera:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E} \tag{42}$$

No conocemos aún cuál es el campo total **E**; solamente sabemos que la Ec. 42 tiene que cumplirse en todo punto interior a la esfera. *Si* la esfera se polariza uniformemente, hipótesis que necesitamos justificar por nuestros resultados, la relación entre la polarización de la esfera y su propio campo $\mathbf{E}'$, en los puntos interiores, viene dada por la Ec. 39. (En la Ec. 39 usamos el símbolo **E** para este campo, pues en aquel caso era el único campo presente).

$$\mathbf{E}'_{\text{in.}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \tag{43}$$

Ahora tenemos suficientes ecuaciones para eliminar **P** y $\mathbf{E}'$, que nos conduce a una relación entre **E** y $\mathbf{E}_0$. Utilizando las ecuaciones de la 41 a la 43 hallamos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\varepsilon - 1}{3}\mathbf{E} \tag{44}$$

Despejando **E**,

$$\mathbf{E} = \left(\frac{3}{2 + \varepsilon}\right)\mathbf{E}_0 \tag{45}$$

Debido a que ε es mayor que la unidad, el factor $3/(2+\varepsilon)$ será menor que la unidad; el campo en el interior del dieléctrico es menos intenso que $\mathbf{E}_0$. La polarización es

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\,\mathbf{E} = 3\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)\mathbf{E}_0 \qquad (46)$$

La hipótesis de polarización uniforme se ve ahora que es firme *. Para calcular el campo total $\mathbf{E}$ fuera de la esfera debemos sumar vectorialmente $\mathbf{E}_0$ con el campo de un dipolo central con momento dipolar igual a $\mathbf{P}$ veces el volumen de la esfera. En la Fig. 10.27 se han representado algunas líneas de $\mathbf{E}$, interiores y exteriores a la esfera dieléctrica.

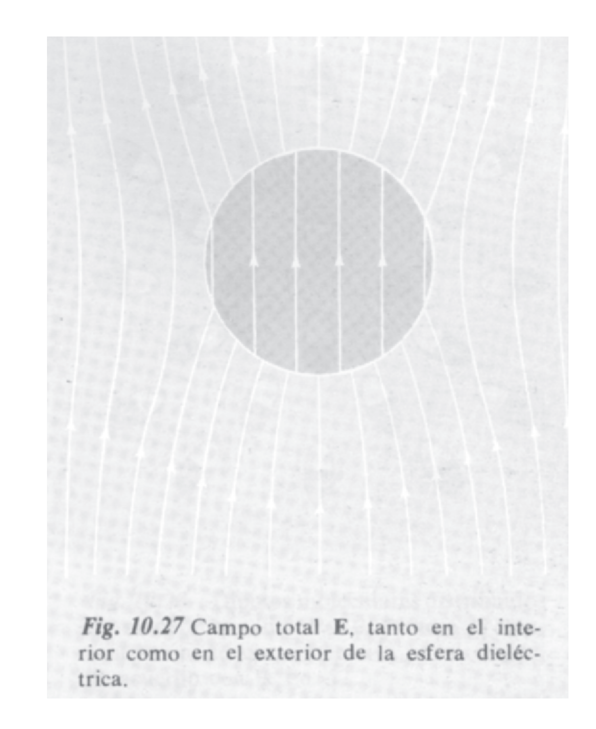


Fig. 10.27 Campo total $\mathbf{E}$, tanto en el interior como en el exterior de la esfera dieléctrica.

10.11 Campo de una carga en un medio dieléctrico y ley de Gauss

Supongamos que un volumen muy grande de dieléctrico homogéneo tiene en alguna parte interior a él una carga concentrada Q, que no forma parte de la estructura molecular regular del dieléctrico. Por ejemplo, imaginemos que una pequeña esfera metálica se ha cargado y luego cae en un tanque de aceite. Como se estableció anteriormente, el campo eléctrico en el aceite es sencillamente $1/\epsilon$ veces el campo que Q produciría en el vacío

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{\varepsilon r^2} \qquad (47)$$

Es interesante ver cómo actúa la ley de Gauss. La integral de superficie de $\mathbf{E}$ (el cual, recordemos, es el campo macroscópico, o valor medio espacial) extendida a una esfera que rodea a Q, da $(1/\varepsilon_0\varepsilon)Q$, si tenemos en cuenta la Ec. 47, y *no* $(1/\varepsilon_0)Q$. ¿Por qué no? La respuesta es que Q no es la única carga interior a la esfera. También existen todas las cargas que componen los átomos o moléculas del dieléctrico.

* Esto es lo que hace fácil el tratar con este sistema. Para un cilindro dieléctrico de longitud finita en un campo uniforme, la hipótesis no surtiría efecto. El campo $\mathbf{E}'$ de un cilindro uniformemente polarizado —por ejemplo uno con una longitud casi igual a su diámetro— *no* es uniforme dentro del cilindro (¿Qué debería parecer?). Por tanto $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ no puede ser uniforme, pues en este caso $\mathbf{P} = \chi_e\,\mathbf{E}$ no puede ser uniforme. Son los dieléctricos de forma elipsoidal, de los cuales la esfera es un caso particular, los que adquieren, en realidad, polarización uniforme en un campo uniforme.

Ordinariamente cualquier volumen de aceite debe ser eléctricamente neutro. Pero ahora el aceite está polarizado radialmente, lo que significa que la carga Q, supuesta positiva, atrae las cargas negativas de las moléculas de aceite y repele a las positivas. Aunque el desplazamiento puede solamente ser muy ligero en cada molécula, sin embargo, en promedio toda esfera que dibujemos alrededor de Q contendrá más carga negativa de la molécula de aceite que carga positiva de la misma. De aquí que la carga neta en la esfera, incluyendo la carga «extraña» Q en el centro, es *menor* que Q. En realidad ésta es Q/ε.

A menudo es útil distinguir entre carga « extraña » Q y las cargas que constituyen el propio dieléctrico. Sobre la primera tenemos cierto control — puede añadirse o quitarse carga de un objeto, tal como la placa de un condensador. A menudo a esta carga se le llama *libre*. Las otras cargas, que son partes integrantes de los átomos o moléculas del dieléctrico, se llaman corrientemente cargas « ligadas ». Un nombre mejor podría ser carga *estructural*. Estas cargas no son móviles sino más o menos enlazadas elásticamente, contribuyendo a la polarización por sus ligeros desplazamientos.

Puede idearse una magnitud vectorial que esté relacionada solamente con las cargas libres por algo parecido a la ley de Gauss. En el sistema que acabamos de examinar, una carga puntiforme Q sumergida en un dieléctrico, esta propiedad la tiene el vector $\varepsilon\mathbf{E}$. Es decir, $\int\varepsilon\mathbf{E}\, d\mathbf{a}$, extendida a una superficie cerrada S, es igual a $(1/\varepsilon_0)Q$ si S encierra a Q, y es nula si no lo hace. Por superposición, esto debe cumplirse para cualquier conjunto de cargas libres definidas por una densidad de carga libre $\rho_{\text{lib}}(x, y, z)$ en un medio dieléctrico indefinido:

$$\int_S \varepsilon\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_{\text{libre}}\, dv \tag{48}$$

en donde V es el volumen limitado por la superficie S. Tal relación integral implica una relación « local » entre la divergencia del vector campo $\varepsilon\mathbf{E}$ y la densidad de carga libre:

$$\text{div}\,(\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\text{libre}} \tag{49}$$

Ya que ε se ha supuesto constante en todo el medio, la Ec. 53 no nos dice nada nuevo. Sin embargo, nos puede ayudar a aislar el papel de la carga ligada. En un sistema cualquiera, la relación fundamental entre el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y la densidad total de carga $\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{ligada}}$ continúa siendo válida

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{ligada}}) \tag{50}$$

De las ecuaciones 49 y 50 se deduce que

$$\text{div}\,(\varepsilon - 1)\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\text{ligada}} \tag{51}$$

Según la Ec. 34, $(\varepsilon - 1)\mathbf{E} = (1/\varepsilon_0)\mathbf{P}$, así que la Ec. 51 implica que

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_{\text{ligada}} \tag{52}$$

La ecuación 52 establece una relación local. No puede depender de las condiciones en otra parte del sistema, ni de cómo se mantiene la distribución particular de las cargas ligadas. Toda distribución de carga ligada que tiene un cierto exceso local, por unidad de volumen, de protones nucleares sobre electrones atómicos debe representar una polarización con cierta divergencia. Así que la Ec. 52 debe cumplirse universalmente, no solamente en el dieléctrico ilimitado. La identidad expresada en la Ec. 52 puede percibirse imaginando unas cuantas moléculas polares distribuidas de modo que den una polarización con divergencia positiva (Fig. 10.28). Los dipolos apuntan hacia fuera, lo cual necesariamente conduce a una pequeña concentración de carga negativa en el centro. Por descontado que la Ec. 52 se refiere a promedios en elementos de volumen lo suficientemente grandes para que $\mathbf{P}$ y ρ_{ligada} puedan considerarse magnitudes que varían de manera continua.



Fig. 10.28 Dipolos moleculares distribuidos de manera que div $\mathbf{P} > 0$. Nótese la concentración de carga negativa en el centro, de acuerdo con la Ec. 52.

De las ecuaciones 50 y 52 obtenemos la relación

$$\text{div } \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{\text{libre}} \tag{53}$$

Esto es completamente independiente de toda relación entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{P}$. No se limita a los materiales, a los que llamamos dieléctricos, en los que $\mathbf{P}$ es proporcional a $\mathbf{E}$.

Se acostumbra a dar un nombre espacial a la combinación $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, el vector *desplazamiento eléctrico,* y se simboliza por $\mathbf{D}$. Es decir, definimos $\mathbf{D}$ por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{54}$$

En un dieléctrico isótropo, $\mathbf{D}$ es simplemente $\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$, pues la relación

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \tag{55}$$

se cumple en cada caso en que puedan definirse las magnitudes macroscópicas $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ y ρ.

El aspecto de la Ec. 55 puede sugerir que podamos considerar a $\mathbf{D}$ como un vector campo cuya fuente es la distribución de carga libre ρ_{libre}, en el mismo sentido que la distribución de carga total ρ es la fuente de $\mathbf{E}$. Esto sería incorrecto. El campo electrostático $\mathbf{E}$ está determinado unívocamente — excepto por la adición de un campo constante — por la distribución de carga ρ debido a que, como suplemento de la ley div $\mathbf{E} = (1/\varepsilon_0)\rho$, existe otra condición universal, rot $\mathbf{E} = 0$. En general, ***no*** es cierto que rot $\mathbf{D} = 0$. Así que la distribución de carga libre no es suficiente para determinar $\mathbf{D}$ por la Ec. 55.

Se necesita otra cosa, tal como las condiciones de contorno en las superficies de distintos dieléctricos. Las condiciones de contorno de **D** son meramente una manera alternativa de expresar las condiciones de contorno en las que intervienen **E** y **P**, ya establecidas casi al final de la Sec. 10.9 y en la Fig. 10.25.

En el camino que hemos seguido para los campos eléctricos en la materia, la introducción de **D** es un artificio que, en general, no es muy útil. Hemos mencionado **D** porque él está consagrado por tradición, empezando con Maxwell*, y el lector sin duda lo encontrará en otros libros, muchos de los cuales lo tratan con más atención de la que merece.

Nuestras conclusiones esenciales acerca de los campos eléctricos en la materia pueden resumirse así:

1 La materia puede polarizarse, esta circunstancia se explica completamente, en lo que respecta al campo macroscópico, por una densidad de polarización **P**, que es el momento dipolar por unidad de volumen. La contribución de la materia citada al campo eléctrico **E** es la misma que la de una distribución de cargas ρ_{ligadas}, que existiese en el vacío con densidad $\rho_{\text{ligadas}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. En particular, en la superficie de una substancia polarizada, donde hay una discontinuidad de **P**, ésta se reduce a una carga superficial de densidad $\sigma = -P_n$. Añadamos una distribución de carga libre que puede estar presente, y el campo eléctrico es el campo que produciría en el vacío esta distribución *total* de carga. Este es el campo macroscópico **E** dentro y fuera de la materia, entendiendo que dentro de la materia es el promedio espacial del campo microscópico verdadero.

2 Si en un material, **P** es proporcional a **E**, llamamos dieléctrico a este material. Definimos la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica característica de este material: $\chi_e = \mathbf{P}/\mathbf{E}$ y $\varepsilon = 1 + \chi_e$. Las cargas libres sumergidas en un dieléctrico dan lugar a un campo eléctrico que es $1/\epsilon$ del que las mismas cargas producirían en el vacío.

* La importancia de **D** en la formulación por Maxwell de la teoría electromagnética y la elección del nombre *desplazamiento* puede estar influido por su inclinación a cierto tipo de modelo mecánico del «eter». Whittaker ha señalado en su clásico, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I, p. 266 (Harper Torchbooks, New York, 1960) que su inclinación puede haber desencaminado al propio Maxwell en un punto de la aplicación de su teoría del problema de la reflexión de la luz por un dieléctrico.

10.12 Punto de vista microscópico del dieléctrico

La polarización **P** en el dieléctrico es una manifestación a gran escala de los momentos dipolares eléctricos de los átomos o moléculas que componen el material. **P** es la densidad del momento dipolar medio, el vector momento dipolar total por unidad de volumen, promediado en una región suficientemente grande para que contenga un enorme número de átomos. Si no hay campo eléctrico para establecer una dirección preferente, **P** será nulo. Esto es cierto para un líquido ordinario o un gas, y aun para sólidos si se ignora la posibilidad de polarización «congelada dentro» mencionada en la Sección 10.8. En presencia de un campo eléctrico en el medio, la polarización puede originarse de dos maneras. (1) Cada átomo o molécula adquiere un momento dipolar inducido proporcional al, y en dirección del, campo eléctrico **E** que actúa sobre el átomo o molécula. (2) Si en el medio hay moléculas con momentos dipolares permanentes, sus orientaciones ya no serán perfectamente al azar; la orientación de sus momentos dipolares en el sentido del campo superará a la orientación en sentido opuesto. Ambos efectos (1) y (2) conducen a la polarización en la dirección y sentido **E**, o sea, a un valor positivo de $\mathbf{P}/\varepsilon_0\mathbf{E}$, la susceptibilidad eléctrica.

Consideremos primero los momentos atómicos inducidos en un medio en el que los átomos o moléculas están más bien separados. Por ejemplo, en un gas a la presión atmosférica normal, en el cual hay unas $3 \cdot 10^{25}$ moléculas por m^3. Supondremos que el campo **E**, que actúa sobre una molécula individual, es el mismo que el campo medio, o macroscópico **E**, en el medio. Al efectuar estas suposiciones estamos despreciando el campo en una molécula debido al momento dipolar inducido de una molécula próxima. Sea a la polarizabilidad de cada molécula y N el número medio de moléculas por m^3. El momento dipolar inducido en cada molécula es $\varepsilon_0 a\mathbf{E}$, y la polarización resultante del medio, **P**, es simplemente

$$\mathbf{P} = N\varepsilon_0 a\mathbf{E} \tag{56}$$

Esto nos da en seguida la susceptividad χ_e:

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = Na \tag{57}$$

y la constante dieléctrica ε:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e = 1 + Na \tag{58}$$

La molécula de metano de la Fig. 10.12 tiene una polarizabilidad de $4\pi\, 2{,}6 \cdot 10^{-30}$ m^3. En condiciones normales de 0° C y la presión atmosférica normal hay aproximadamente $2{,}7 \cdot 10^{25}$ moléculas en 1 m^3. Según la Ec. 58 la constante dieléctrica del metano, para esta densidad, debe tener el valor

$$\varepsilon = 1 + Na = 1 + 2{,}7 \cdot 10^{25} \cdot 4\pi \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-30} = 1{,}00088$$

El cual concuerda con el valor de ε para el metano dado en la Tabla 10.1. La concordancia apenas sorprende, pues el valor de a dado en la Fig. 10.12 se dedujo originalmente aplicando la teoría simple que hemos desarrollado para una constante dieléctrica medida experimentalmente.

Ya hemos notado en la Sección 10.5 que la polarizabilidad atómica a, que tiene las dimensiones de volumen, en orden de magnitud es casi igual al volumen de un átomo. Si esto es así, el producto Na, que es precisamente χ_e según la Ec. 57, es aproximadamente igual a la fracción del volumen del medio que está ocupado por átomos. Ahora bien, la densidad de un gas en condiciones normales es aproximadamente una milésima de la densidad de la misma substancia condensada a líquido o sólido. En el caso del metano la relación está muy cerca de 1/1000, en el caso del aire 1/700. El gas tiene cerca del 99,9 por cien de espacio vacío. En un sólido o líquido, al contrario, las moléculas se están tocando una a otra. La fracción de volumen que ellas ocupan no es mucho menor que la unidad. Esto nos dice que, generalmente, en la materia condensada, la polarización inducida dará por resultado una susceptividad χ_e del orden de magnitud de la unidad. En realidad, como sugiere nuestra breve relación de la Tabla 10.1, y como confirma una tabulación más extensa, la susceptividad de la mayoría de líquidos y sólidos no polares, es decir, el valor $(\varepsilon - 1)/\varepsilon_0$, va de 0,1 a 1. Ahora podremos ver el por qué.

Además podemos ver por qué una teoría exacta de la susceptividad de un sólido o líquido no es fácil de desarrollar. Cuando los átomos se agrupan juntos hasta casi «tocarse», el efecto de un átomo sobre sus vecinos no puede despreciarse. La distancia b entre los vecinos más próximos es aproximadamente $N^{-1/3}$. Sea un campo eléctrico E que induce un momento dipolar $p = Ea$ en cada átomo. Este momento dipolar p en un átomo originará un campo de intensidad $E' \approx p/b^3$ en la posición del próximo átomo. Pero $1/b^3 \approx N$, de donde $E' \approx EaN$. Como antes hemos visto, en la materia condensada aN es necesariamente del orden de la unidad. De donde $\mathbf{E}'$ *no es pequeño,* y por cierto no despreciable, comparado con $\mathbf{E}$. El campo efectivo, que es el que polariza un átomo en esta situación, es una cuestión con respuesta no muy evidente *.

Las moléculas con momento dipolar eléctrico permanente, moléculas ***polares***, responden a un campo eléctrico intentando orientarse paralelamente a él. En cuanto el momento dipolar $\mathbf{p}$ no apunta en la dirección y sentido de $\mathbf{E}$, hay un par $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ que tiende a girar a $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{E}$. (Véase la Ec. 18 y la fig. 10.18*b*.) Evidentemente el par es nulo si $\mathbf{p}$ tiene la dirección de $\mathbf{E}$ pero sentido contrario, pero esta posición es inestable. El par sobre el dipolo eléctrico es un par sobre la propia molécula. Se alcanza un estado de energía mínima si todas las

* Un tratamiento elemental aproximado de este problema conduce a la llamada ecuación de Clausius-Mossotti, relación hallada en la Sec. 9.13 de la primera edición de este libro.

moléculas polares han girado para orientarse en la dirección y sentido de **E**. Mientras no se alcance este estado de orientación perfecta habrá cedido cierta energía, por rozamiento en la rotación, a sus alrededores. La polarización resultante sería enorme. En el agua hay cerca de $3 \cdot 10^{28}$ moléculas por m^3; el momento dipolar de cada una es $0{,}61 \cdot 10^{-29}$ C · m (Fig. 10.14). Con la orientación completa de los dipolos **P** sería $1{,}87 \times 10^{-1}$ C/m². Si la Fig. 10.24 fuese una representación de una gota de agua polarizada así, la intensidad del campo justo fuera de la gota superaría los $3 \cdot 10^9$ volts/m.

Esto *no* ocurre. No puede alcanzarse la orientación completa en un campo aplicado razonable **E**. ¿Por qué no? La razón es esencialmente la misma que la razón del por qué las moléculas de aire en una habitación no se encuentran todas en el suelo —que es, después de todo, la distribución de energía potencial mínima. Debemos pensar acerca de la ***temperatura*** y acerca de la energía de la agitación térmica, que cada molécula presenta a cierta temperatura absoluta T. El valor de esta energía es kT, donde k es una constante universal, llamada ***constante de Boltzmann***. A la temperatura ambiente kT vale $4 \cdot 10^{-11}$ J. En un sistema todo a la temperatura T la energía media de traslación de una molécula —o, para esto, de cualquier objeto pequeño o grande— es $3\,kT/2$. Ahora bien, las moléculas de aire no se acumulan todas cerca del suelo a causa de que la variación de la energía potencial gravitatoria al elevar un par de metros una molécula de masa $5 \cdot 10^{-20}$ kg es solamente, como puede calcularse fácilmente, de unos 10^{-14} J, inferior a 1/1000 de kT. Por otro lado, el aire cerca del suelo es ligeramente más denso que el aire cerca del techo, incluso cuando no hay gradiente de temperatura. Esto es el bien conocido cambio de la presión barométrica con la altura. El aire cerca del suelo es más denso (cuando la diferencia es pequeña) en la proporción mgh/kT, siendo mgh la diferencia de energía potencial gravitatoria entre los dos niveles.

De manera parecida, en nuestro dieléctrico hallaremos un ligero exceso de dipolos moleculares en la orientación de energía potencial más baja, es decir, dirigidos según **E**, o con componentes en esta dirección. La fracción del exceso en las direcciones favorables será, en orden de magnitud, pE/kT. El numerador representa la diferencia de energía potencial. Realmente la energía necesaria para girar un dipolo desde la dirección y sentido de **E** hasta el sentido contrario es $2pE$ (véase la Ec. 19) pero promediando según los ángulos encontraríamos otros factores numéricos que dejamos. Con N dipolos por unidad de volumen la polarización P, que sería Np si se orientasen totalmente, será menor en un factor así como pE/kT. La polarización esperada es, por tanto, en orden de magnitud,

$$P \approx Np\left(\frac{pE}{kT}\right) = \frac{Np^2}{kT}E \qquad (59)$$

y la susceptividad es

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \approx \frac{Np^2}{\varepsilon_0 kT} \tag{60}$$

Para el agua, a la temperatura ambiente, el segundo miembro de la Ec. 60 tiene el valor 3,0, mientras que con $\varepsilon = 80$, el valor de χ_e es 6,3. Evidentemente se necesita un factor de casi 2,1 en el segundo miembro de la Ec. 60, en este caso, para convertir nuestro orden de magnitud estimado en una predicción correcta. La deducción teórica de este factor es difícil, pues las interacciones de las moléculas vecinas es un tema complicado e incluso peor que en el caso de los dieléctricos no polares.

Si se aplica un campo eléctrico de $3 \cdot 10^4$ volt/m al agua, la polarización resultante,

$$P = \varepsilon_0(80 - 1)\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}(80 - 1) \cdot 3 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^{-5}\ C/\text{m}^2$$

es equivalente a la orientación de $3{,}4 \cdot 10^{24}$ dipolos de H_2O por m^3, o alrededor de una molécula por 10 000. Incluso así, éste es un orden de magnitud de polarización más grande que la que produciría el mismo campo en un dieléctrico no polar.

10.13 Polarización en campos variables

Hasta ahora solamente hemos considerado campos electrostáticos en la materia. Necesitamos considerar los efectos de los campos eléctricos variables con el tiempo, como el campo en un condensador utilizado en un circuito de corriente alterna. La cuestión importante es si las variaciones de la polarización seguirán a las variaciones del campo. ¿La relación de **P** a **E**, en un instante, será la misma que en un campo eléctrico estático? Para variaciones muy lentas no esperaríamos diferencias pero, como siempre, el criterio para lentitud depende del proceso físico particular. Resulta que la polarización inducida y la orientación de los dipolos permanentes son dos procesos con tiempo de respuesta completamente diferente.

La polarización inducida de los átomos o moléculas tiene lugar por la distorsión de la estructura electrónica. Interviene poca masa y la estructura es muy rígida; sus frecuencias naturales de vibración son extremadamente elevadas. Considerado de otra manera, los movimientos de los electrones en los átomos y moléculas se caracterizan por períodos del orden de 10^{-16} segundos — algo como el período de una onda luminosa visible. Para un átomo, 10^{-14} segundos es un tiempo *largo*. No hay perturbación reajustando su estructura electrónica en un tiempo como éste. A causa de esto, las substancias estric-

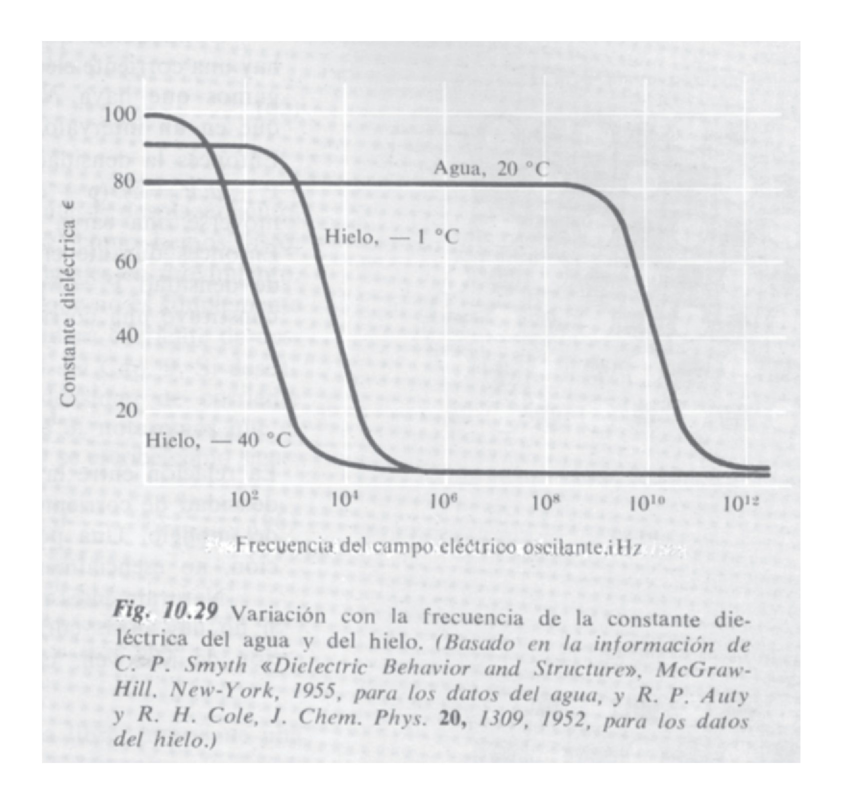


Fig. 10.29 Variación con la frecuencia de la constante dieléctrica del agua y del hielo. *(Basado en la información de C. P. Smyth «Dielectric Behavior and Structure», McGraw-Hill. New-York, 1955, para los datos del agua, y R. P. Auty y R. H. Cole, J. Chem. Phys.* **20,** *1309, 1952, para los datos del hielo.)*

tamente no polares se comportan prácticamente de la misma manera que en « cc » hasta frecuencias próximas a las de la luz visible. La polarización se mantiene con el campo y la susceptibilidad $\chi_e = P/\varepsilon_0 E$ es independiente de la frecuencia.

La orientación de una molécula polar es un proceso completamente distinto de la mera distorsión de la nube electrónica. Todo el armazón molecular puede girar. A escala microscópica es, tal vez, como gira un cacahuete en un saco lleno de ellos. La fuerza de rozamiento tiende a que la rotación se retrase con respecto al par y a reducir la amplitud de la polarización resultante. Donde empieza este efecto, en la escala de tiempo, varía enormemente de una substancia polar a otra. En el agua, el « tiempo de respuesta » para la reorientación de dipolos es de unos 10^{-11} segundos. La constante dieléctrica se mantiene cerca de 80 hasta frecuencias del orden de 10^{10} Hz. Por encima de 10^{11} Hz, ε disminuye hasta un valor modesto, típico de un líquido no polar. Los dipolos no pueden seguir tan rápidamente una alternancia del campo. En otras substancias, especialmente sólidas, el tiempo característico puede ser mucho mayor. En el hielo, justo por debajo del punto de congelación, el tiempo de respuesta para la polarización eléctrica es de cerca de 10^{-5} segundos. En la Fig. 10.29 se representan unas curvas experimentales de la constante dieléctrica en función de la frecuencia para agua y hielo.

10.14 Corriente de la carga ligada

Dondequiera que la polarización en la materia varíe con el tiempo, hay una corriente eléctrica, un auténtico movimiento de cargas. Supongamos que haya N dipolos en un metro cúbico de dieléctrico, y que en un intervalo de tiempo dt su momento pase de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Entonces la densidad de polarización macroscópica $\mathbf{P}$ cambia de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P} + d\,\mathbf{P} = N\,(\mathbf{p} + d\mathbf{p})$. Supongamos que la variación $d\mathbf{p}$ se efectuó al moverse una carga q una distancia $d\mathbf{s}$, en cada átomo: $qd\mathbf{s} = d\mathbf{p}$. Entonces durante el tiempo dt realmente hubo una nube de carga, de densidad $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$, que se movía con velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$. Esto constituye una corriente de conducción de cierta densidad $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} = Nq\,\frac{d\mathbf{s}}{dt} = N\,\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{61}$$

La relación entre la variación de la polarización con el tiempo y la densidad de corriente $\mathbf{J} = d\mathbf{P}/dt$, es independiente de los pormenores del modelo. Una polarización variable *es* una corriente de conducción, no esencialmente distinta de otra.

Naturalmente, tal corriente es una fuente de campo magnético. Si no hay otras corrientes alrededor, escribiremos la segunda ecuación de Maxwell, como

$$\text{rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{62}$$

La única diferencia entre una densidad de corriente de conducción « ordinaria » y la densidad de corriente $\partial\mathbf{P}/\partial t$ es que en una interviene el movimiento de carga *libre*, en la otra el movimiento de la carga *ligada*. Existe una distinción práctica evidente — no podemos tener una corriente de carga ligada *estacionaria*, que prosiga siempre sin variación. Ordinariamente preferimos tener en cuenta separadamente la corriente de carga ligada y la corriente de carga libre, conservando $\mathbf{J}$ como símbolo de la densidad de corriente de la carga libre solamente. Luego para incluir todas las corrientes en la ecuación de Maxwell tendremos que escribirla de esta manera:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{63}$$

Densidad ↑ de corriente de la carga ligada (bajo $\partial\mathbf{P}/\partial t$)

↑ Densidad de corriente de la carga libre (bajo $\mathbf{J}$)

En un medio dieléctrico, $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$, permitiendo una versión simplificada de la Ec. 79:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{64}$$

De manera más general, la Ec. 79 puede abreviarse también introduciendo el vector **D**, *definido* previamente como $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$.

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{65}$$

El término $\partial\mathbf{D}/\partial t$ se llama corrientemente corriente de desplazamiento. Realmente, la parte en la que interviene $\partial\mathbf{P}/\partial t$, como hemos visto, representa una corriente de conducción, cargas reales en movimiento. La única parte de la densidad de corriente total que no es simplemente carga en movimiento es la parte $\partial\mathbf{E}/\partial t$, la verdadera corriente de desplazamiento en el vacío, que discutimos al final del Cap. 9. Si deseamos expresar todas las componentes de la densidad de corriente completa en unidades correspondientes a las de **J**, notaremos que el 4π no aparece en el primer término, y la Ec. 79 se escribe como sigue:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Densidad de} \\ \text{corriente de} \\ \text{desplazamiento} \\ \text{en el vacío}}}{\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Densidad} \\ \text{de corriente} \\ \text{de la carga ligada}}}{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Densidad} \\ \text{de corriente de} \\ \text{la carga libre}}}{\mathbf{J}} \tag{66}$$

En la distinción entre carga ligada y carga libre, interviene una cuestión a la que no nos hemos enfrentado debidamente: ¿Podemos identificar siempre, sin ambigüedad, los « momentos dipolares moleculares » en la materia, especialmente en la materia sólida? La respuesta es que no. Tomemos una imagen microscópica de una lámina delgada del cristal cloruro sódico. La disposición de los iones positivos de sodio y los iones negativos de cloro se presentó en la Fig. 1.7. La Figura 10.30 es una sección recta del cristal que se extiende hacia fuera por la derecha y la izquierda. Si lo deseamos, podemos considerar un par de iones adyacentes como una molécula neutra con momento dipolar. Agrupándolos como en la Fig. 10.30*a*, describimos el medio como si tuviese una densidad de polarización macroscópica **P** uniforme, un vector dirigido hacia abajo. Al mismo tiempo, observamos que hay una capa de carga positiva en la parte superior del cristal, y de carga negativa en la inferior, que no habían sido incluidas en nuestras moléculas, deben considerarse *carga libre*.

Ahora bien, también podemos agrupar los iones como en la Figura 10.30*b*. Según esta descripción, **P** es un vector hacia arriba, pero tenemos una capa de carga libre negativa en la parte superior del cristal y de carga libre positiva en la inferior. *Cada una de las descripciones es correcta.* No hay dificultad en encontrar otra, también correcta, en la cual **P** es nulo y no hay carga libre. Cada descripción predice $\mathbf{E} = 0$. El campo macroscópico **E** es una magnitud física observable. Puede depender solamente de la distribución de carga, no de cómo elegimos la distribución para *describirlo*.

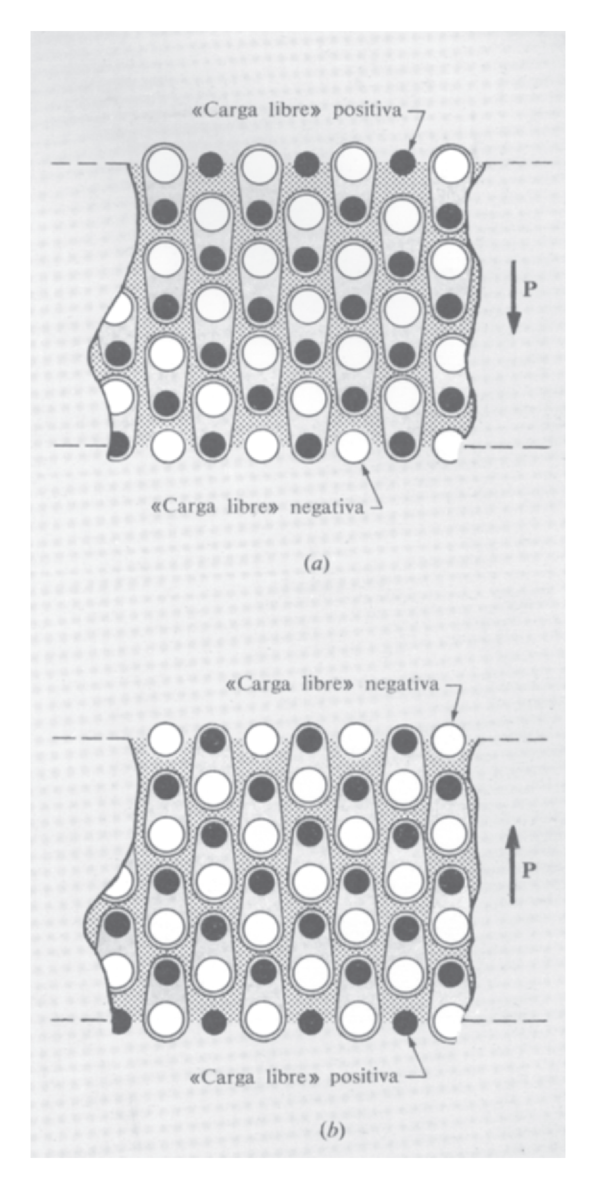


Fig. 10.30 La misma estructura iónica con cargas agrupadas a pares como «moléculas», de dos maneras: vector dirigido hacia abajo (*a*), o hacia arriba (*b*). Los sistemas son físicamente idénticos; la diferencia está solamente en la descripción.

Este ejemplo nos enseña que en el mundo atómico real la distinción entre « carga ligada » o « carga libre » es más o menos arbitraria, y por tanto, le ocurre lo mismo a la densidad de polarización **P**. El dipolo molecular es una noción bien definida solamente cuando las moléculas son identificables como tales — donde haya una razón física para decir, « Estos átomos pertenecen a esta molécula y no a otra ». En algunos cristales tal asignación no tiene sentido. Un átomo o un ion puede interactuar, con aproximadamente la misma intensidad, con todos sus vecinos; se puede solamente hablar de todo el cristal como una sola molécula.

10.15 Una onda electromagnética en un dieléctrico

En las Ecs. 15 del Capítulo 9 escribimos las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético en el vacío, incluidos los términos de las fuentes, densidad de carga ρ y densidad de corriente **J**. Ahora deseamos considerar un campo electromagnético en un medio dieléctrico ilimitado. Supondremos que el dieléctrico es perfecto, así que no hay corriente libre. O sea, el último término del segundo miembro de las ecuaciones 63 a 65, la densidad de corriente de carga libre **J**, será nula. Tampoco hay carga libre, aunque podría haber una densidad de carga ligada si la div **E** no es nula. Acordamos considerar solamente campos con div $\mathbf{E} = 0$. Luego ρ, tanto para carga ligada como libre, será nula en todo el medio. No resulta cambio alguno en la ecuación primera, rot $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. Para la segunda ecuación tomamos la Ec. 64 sin los términos de la corriente libre rot $\mathbf{B} = \varepsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$. La constante dieléctrica ε da cuenta de la corriente de la carga ligada al igual que de la corriente de desplazamiento en el vacío. Nuestro sistema completo de ecuaciones se convierte en

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{div}\, \mathbf{E} = 0$$
$$\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{div}\, \mathbf{B} = 0 \tag{67}$$

Difieren de la Ec. 16 del Capítulo 9 solamente por la presencia del factor constante ε en la segunda ecuación.

Como hicimos en la Sección 9.4 construyamos un campo electromagnético para una onda que pueda obtenerse para satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Ahora ensayaremos una función de onda de forma ligeramente más general:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} E_0 \,\text{sen}\,(ky - \omega t)$$
$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} B_0 \,\text{sen}\,(ky - \omega t) \tag{68}$$

Al ángulo $(ky - \omega t)$ se le llama *fase* de la onda. Para un punto que se mueva en la dirección positiva de y con celeridad ω/k, la fase $ky - \omega t$ permanece constante. O sea, ω/k es la *velocidad de fase* de esta onda. Este término se usa cuando se ha de distinguir entre dos velocidades, velocidad de fase y velocidad de grupo. En el caso considerado no hay diferencia, así que llamaremos a ω/k, simplemente, velocidad de la onda, la misma que la v de nuestra discusión en la Sección 9.4. En un punto fijo cualquiera, tal como $y = y_0$, el campo oscila en el tiempo con una frecuencia angular ω. En cualquier instante, tal como $t = t_0$, las fases difieren en 2π en los planos separados una longitud de onda λ, donde $\lambda = 2\pi/k$.

Las derivadas espacio temporales que necesitamos ahora son las indicadas en la Ec. 9.19 con pequeñas alteraciones:

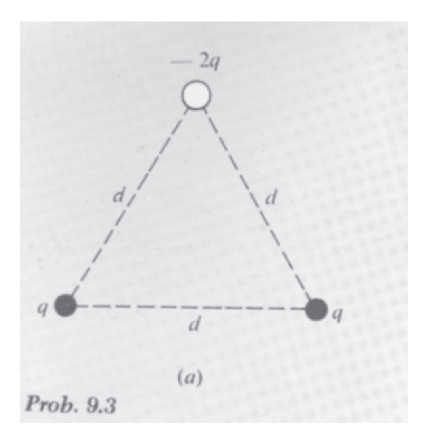
$$\text{rot } \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_0 k \cos(ky - \omega t) \qquad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}} E_0 \omega \cos(ky - \omega t)$$
$$\text{rot } \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}} B_0 k \cos(ky - \omega t) \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{x}} B_0 \omega \cos(ky - \omega t) \tag{69}$$

Sustituyéndolas en la Ec. 67, hallamos que las ecuaciones se satisfacen si

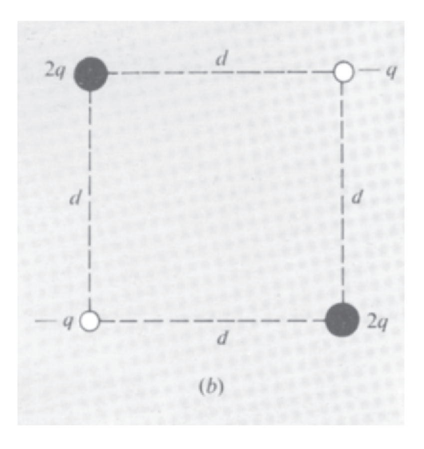
$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \text{y} \qquad B_0 = \sqrt{\varepsilon} E_0 \tag{70}$$

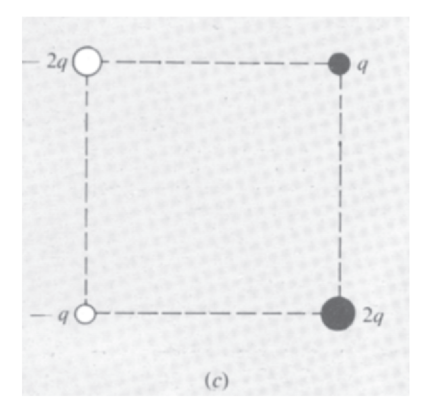
La velocidad de la onda ω/k difiere de la velocidad de la luz en el vacío por el factor $1/\sqrt{\varepsilon}$. Las amplitudes de los campos eléctrico y magnético E_0 y B_0, que son precisamente $E_0 = cB_0$ en la onda en el vacío, aquí son $E_0 = cB_0/\sqrt{\varepsilon}$, siendo la amplitud eléctrica la menor. En otros aspectos la onda se parece a nuestra onda plana en el vacío: **B** es perpendicular a **E**, y la onda se propaga en la dirección de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Por supuesto que si comparamos una onda en un dieléctrico con una onda, de la misma frecuencia, en el vacío, la longitud de onda λ en el dieléctrico será menor que en el vacío por $1/\sqrt{\varepsilon}$, ya que *frecuencia · longitud de onda = velocidad.*

La luz que se propaga a través del vidrio nos proporciona un ejemplo de la onda antes descrita. En óptica se acostumbra a definir n, el *índice de refracción* de un medio, como la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en este medio. Ahora hemos descubierto que n no es más que $\sqrt{\varepsilon}$. En realidad ahora hemos colocado la base de la teoría clásica de la óptica.



Prob. 9.3





Prob. 10.3

Problemas

10.1 Tenemos un surtido de cinta de polietileno, de constante dieléctrica 2,3 de 5,6 cm de anchura y 0,0025 cm de espesor; también disponemos de cinta de aluminio de 5 cm de anchura y 0,00125 cm de espesor. Deseamos construir un condensador de unos 0,05 μF de capacidad, en forma de rollo cilíndrico compacto. Descríbase cómo podemos hacerlo calculando la cantidad de cinta de cada clase necesaria y el diámetro total del condensador una vez construido.

10.2 En 1746 un profesor, Musschenbroek, en Leiden cargó agua en una botella tocando un hilo que salía del cuello de la botella, a su máquina electrostática. Cuando su ayudante, que sostenía la botella con una mano, quiso quitar el hilo con la otra, recibió una violenta sacudida. Así el simple condensador reclamó la atención de los científicos eléctricos. El descubrimiento de la «botella de Leiden» revolucionó la experimentación eléctrica. Ya en 1747 BenjamínFranklin describía este experimento como el de la «Admirable botella del Sr. Musschenbroek». La botella realmente no era más que vidrio con un conductor a cada lado. Para ver por qué causó tal sensación, calcúlese la capacidad de una botella de litro con paredes de 2 mm de espesor; la constante dieléctrica del vidrio vale 4. ¿Cuál sería el diámetro de una esfera, en el aire, que tuviese la misma capacidad?

10.3 Cuál es el valor del momento dipolar de cada una de las distribuciones de carga en las partes (*a*), (*b*) y (*c*) de la figura. ¿Cuál es la dirección del vector momento dipolar?

10.4 En la molécula del ácido clorhídrico la distancia entre los núcleos de cloro y el protón es 1,28 Å. Supongamos que el electrón del átomo del hidrógeno se transfiere completamente al átomo de cloro, que junto con los demás electrones forma una distribución de carga negativa con simetría esférica y centrada en el núcleo de cloro. Compárese el momento eléctrico dipolar de este modelo con el momento dipolar real del HCL dado en la Fig. 9.16. ¿Dónde debe estar situado el «centro de gravedad» de la distribución de cargas negativas en la molécula real? (El núcleo de cloro tiene una carga $17e$, el núcleo de hidrógeno una carga e).

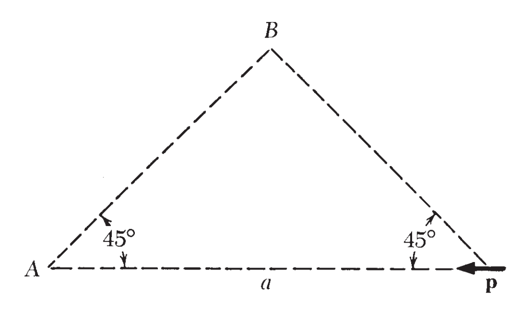
10.5 Una molécula de ácido clorhídrico está situada en el origen con la línea H-Cl a lo largo del eje z con el Cl por encima. ¿Cuál es la dirección, sentido y módulo del campo eléctrico en un punto situado a 10 Å, sobre el origen, en el eje z? ¿Y a 10 Å del origen, sobre el eje y?

10.6 Un condensador plano, tiene una capacidad determinada experimentalmente $C = 22{,}5$ pF, se carga a una diferencia de potencial de 1800 V. Las placas están separadas 1,5 cm. Nos interesa el campo en un punto exterior al condensador, despreciando el efecto de los «bordes», como de costumbre. En particular, queremos conocer el campo a una distancia grande comparada con el tamaño del condensador. Puede hallarse considerando la distribución de carga en el condensador como un dipolo. Calcúlese la intensidad del campo eléctrico.

(*a*) en un punto a 3 m del condensador en el plano de las placas,
(*b*) en un punto situado a la misma distancia en una dirección perpendicular a las placas.

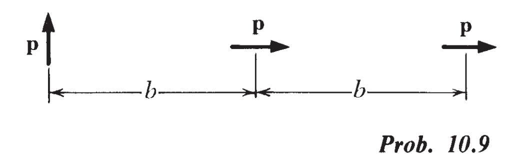
10.7 En la Sec. 4.11 se discutió el tiempo de relajación de un condensador lleno con un material de resistividad ρ. Si recordamos tal discusión notaremos que esquivamos la cuestión de la constante dieléctrica del material. Ahora podemos reparar tal omisión. Vamos a introducir ε adecuadamente en la expresión de la constante de tiempo. Un condensador interesante con fugas es la pared de una célula biológica, un aislador (entre otras importantes funciones) que separa dos fluidos conductores. Sus propiedades eléctricas son de interés particular en las células nerviosas, pues la propagación de un

pulso nervioso va acompañada de una rápida variación de la diferencia de potencial entre el interior y el exterior. La membrana celular tiene un valor de cerca de $1 \mu F/cm^2$ de área de membrana. Se cree que la membrana consta de un material que tiene una constante dieléctrica de alrededor de 3. Puede con esto tenerse una idea de cuál es el espesor. Otras medidas eléctricas han indicado que la resistencia de 1 cm^2 de membrana de una célula, medida en el fluido conductor de uno y otro lado de la membrana, es de unos 1000 ohm. Demuéstrese que la constante de tiempo de tal condensador con fugas es independiente del área del condensador. ¿Cuánto vale en este caso? ¿Dónde caería la resistividad ρ del material de esta membrana, en el gráfico de la Fig. 4.8?



Prob. 10.8

10.8 ¿Qué trabajo se hace al desplazar la unidad positiva de carga de A a B en el campo de un dipolo **p**?



Prob. 10.9

10.9 ¿Cuál es la dirección y sentido de la fuerza sobre el dipolo central debida al campo de los otros dos dipolos? Hallar el módulo de la fuerza.

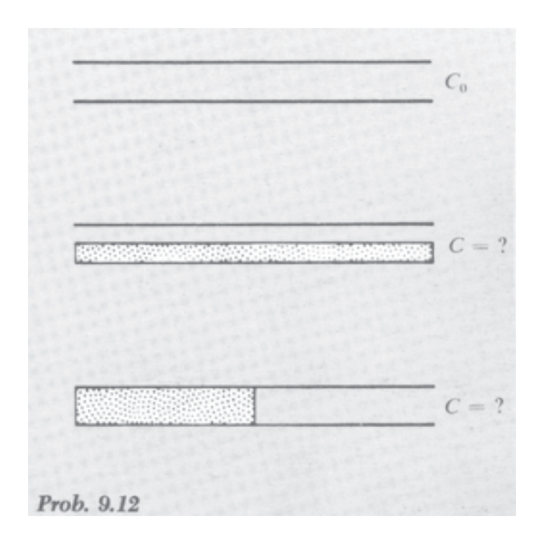
10.10 Un dipolo de módulo $p = (2/3)\ 10^{-9}$ C está situado en el origen, en la dirección $\hat{z}$. A su campo se le añade un campo eléctrico uniforme de intensidad $15 \cdot 10^4$ volts/m en la dirección $\hat{y}$. ¿En dónde será nulo el campo total?

Solución: (0, – 3,134, + 2,216) y (0, + 3,134, – 2,216)

10.11 Una línea de campo del campo de un dipolo se expresa en coordenadas polares por una ecuación muy simple $r = r_0 \operatorname{sen}^2 \theta$, en donde r_0 es el radio para el cual la línea de campo pasa por el plano ecuatorial del dipolo. Probar que esto es cierto demostrando que en cualquier punto de esta curva la tangente tiene la misma dirección que el campo del dipolo.

10.12 Nuestra fórmula para la esfera dieléctrica puede servir para describir una esfera metálica en un campo uniforme. Para demostrarlo, investiguemos el caso límite, $\varepsilon \to \infty$, y demostremos que el campo exterior toma una forma que satisface las condiciones de contorno de un conductor perfecto. ¿Cuál es el campo interior? Esquematícense algunas líneas de campo para este caso límite. ¿Cuál es el momento dipolar inducido en una esfera conductora de radio a, en un campo E_0? ¿Cuál sería el diámetro de una esfera perfectamente conductora que tuviese la misma polarizabilidad que el átomo de hidrógeno, dada en la Tabla 10.2

10.13 Considerando el cambio de energía almacenada en un condensador por la introducción de un dieléctrico, demostrar que la expresión correcta para la densidad de energía en el dieléctrico debe ser $\varepsilon_0 \varepsilon E^2/2$. Comparar luego la energía almacenada en el campo eléctrico con la almacenada en el campo magnético en la onda estudiada en la Sección 10.15.



Prob. 10.14

10.14 La figura representa tres condensadores de la misma área y separación entre placas. Llamemos C_0 a la capacidad del condensador en el vacío. Cada uno de los otros está medio lleno de dieléctrico de la misma constante dieléctrica ε, pero distribuido de manera distinta, como se indica. Hállese la capacidad de cada uno de estos dos condensadores. (Despréciese los efectos de los bordes).

10.15 El momento dipolar eléctrico de la molécula de agua viene dado en la Fig. 10.14. Imaginemos que todos los dipolos moleculares en una copa de agua puedan hacerse orientar hacia abajo. Calcular el valor de la densidad superficial de carga resultante en la superficie superior del agua, y expresarla en electrones por m^2.

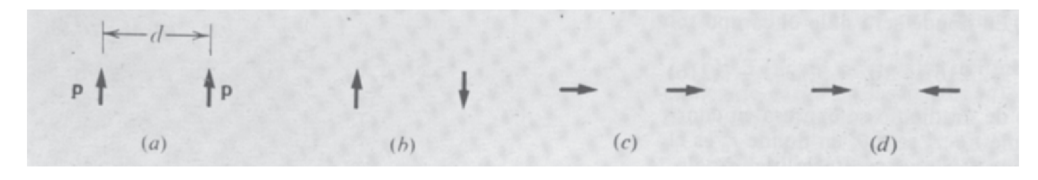
10.16 En la Sección 10.10, el hecho de que el campo eléctrico sea uniforme dentro de una esfera polarizada se dedujo de la forma del potencial en el contorno. Podemos probarlo superponiendo los campos internos de dos bolas de carga cuyos centros estén separados.

(*a*) Demostrar que dentro de una distribución esférica de carga uniforme **E** es proporcional a **r**.

(*b*) Ahora tomemos dos distribuciones esféricas con densidad ρ y $-\rho$, centros C_1 y C_2, y demostrar que el campo resultante es constante y paralelo a la recta que une C_1 y C_2.

(*c*) Analizar de la misma manera el campo de una varilla de forma de cilindro circular largo que está polarizada perpendicularmente a su eje.

10.17 En la figura tenemos cuatro distribuciones diferentes de momentos dipolares eléctricos de dos moléculas polares vecinas. Hallar la energía potencial de cada distribución, estando definida la energía potencial como el trabajo efectuado al acercar dos moléculas a partir de una separación infinita, mientras se mantienen sus momentos en la orientación especificada. Este no es necesariamente el camino más fácil para el cálculo. Pueden trasladarse siempre de la misma manera y luego hacerlas girar.



Prob. 10.17

10.18 El fenómeno de la *hidratación* es importante en la química de las soluciones acuosas. Se refiere al hecho de que un ion en la solución atrae a su entorno a un grupo de moléculas de agua, que se unen bastante bien. La fuerza de atracción entre un dipolo y una carga puntiforme es la responsable de este hecho. Estímese la energía requerida para separar un ion que conduce una sola carga *e*, de una molécula de agua, suponiendo que inicialmente el ion está situado a 1,5 angstrom de la posición efectiva del dipolo de H_2O. (Esta distancia es realmente una cantidad mal definida, ya que la molécula de agua, vista de cerca, es una distribución de carga, no un dipolo infinitésimo.) ¿Qué parte de la molécula de agua se halla más cerca del ion negativo?

10.19 Entre un ion y un átomo neutro existe una fuerza que se origina de la manera siguiente. El campo eléctrico del ion polariza el átomo; el campo de este dipolo inducido reacciona con el ion. Demostrar que esta fuerza siempre es atractiva y varía con el inverso de la quinta potencia de la distancia de separación r. Deducir una expresión para la energía potencial asociada, con energía nula para una separación infinita. ¿Para qué distancia r esta energía potencial tiene el mismo valor que kT a la temperatura ambiente, que vale $4 \cdot 10^{-11}$ J, si el ion está simplemente cargado y el átomo es de sodio? (Véase la Tabla 10.2.)

10.20 Dos átomos polarizables A y B están separados una distancia fija. La polarizabilidad de cada uno de ellos es α. Consideremos la siguiente intrigante posibilidad. El átomo A se polariza por un campo eléctrico, la fuente del cual es el campo eléctrico del dipolo de momento **p** del átomo B. Este momento dipolar lo induce, en el átomo B, un campo eléctrico, la fuente del cual es el momento dipolar del átomo A. ¿Puede ocurrir esto? ¿Si es así, bajo qué condiciones? ¿Si no, por qué?

10.21 Los materiales que han de usarse como aisladores o dieléctricos en condensadores se valoran con respecto a su *rigidez dieléctrica*, definida como el campo eléctrico interno máximo que el material puede soportar sin

peligro de chispa eléctrica. Se acostumbra a expresar la rigidez dieléctrica en kilovolts por *mil*. (Un *mil* es 0,001 pulgadas, o 0,00254 cm). Por ejemplo, el Mylar (un poliester de Dupont) tiene una rigidez dieléctrica de 14 kV/*mil* = 5,51 kV/cm, cuando se usa para láminas delgadas, como las típicas de un condensador. La constante dieléctrica ε del Mylar es de 3,25. Su densidad es 1,40 g/cm^3. Calcular la cantidad máxima de energía que puede almacenarse en un condensador lleno con Mylar, y expresarla en joules/kg de Mylar. Suponiendo que los electrodos y el recipiente representan un 25 por cien del peso del condensador, ¿a qué altura podría elevarse el condensador por la energía almacenada en él? Compárese el condensador como dispositivo para almacenar energía con las baterías de los Problemas 4.28 y 4.29.

10.22 A partir de los valores de ε dados para el agua, amoníaco y metano en la Tabla 10.1, calcular la susceptibilidad eléctrica χ_e para cada líquido. Nuestra predicción teórica de la Ec. 60 puede escribirse $\chi_e = CNp^2/\varepsilon_0 kT$, con el factor C hasta ahora no conocido pero se espera que sea del orden de magnitud de la unidad. Las densidades de los líquidos son 1,00, 0,82 y 1,33 g/cm^3, respectivamente; sus masas moleculares son 18, 17 y 32. Tomando el valor del momento dipolar de la Fig. 10.14, hallar para cada caso el valor de C necesario para que tenga el valor observado de χ_e.

10.23 Consideremos un campo eléctrico oscilante $E_0 \cos wt$, dentro de un medio dieléctrico que no sea aislador perfecto. El medio tiene constante dieléctrica ε y conductividad σ. Esto podría ser el campo eléctrico de cierto condensador con pérdidas que forma parte de un circuito resonante, o podría ser el campo eléctrico en un punto determinado en una onda electromagnética. Demostrar que el factor Q, definido por la Ec. 13 del Capítulo 8, es $\varepsilon_0\varepsilon\omega/\sigma$ para este sistema, y calcularlo para el agua del mar a una frecuencia de 1000 MHz. (La conductividad del agua de mar viene dada en la Tabla 4.1, y la constante dieléctrica puede suponerse que es la misma del agua pura a la misma frecuencia. Véase la Fig. 10.29.) ¿Qué resultado puede sugerirse acerca de la propagación de ondas decimétricas a través del agua de mar?

10.24 Un bloque de vidrio, de índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon}$, llena el espacio $y > 0$, siendo su superficie el plazo xz. Una onda plana en la dirección y, sentido positivo, a través del espacio vacío $y < 0$, incide sobre esta superficie. El campo eléctrico en esta onda es $\hat{\mathbf{z}}\, E_i$ sen $(ky - \omega t)$. Dentro del vidrio hay una onda, descrita exactamente por la Ec. 68. También hay una onda reflejada en el espacio $y < 0$ que se propaga alejándose del vidrio en el sentido negativo de la dirección y. Su campo eléctrico es $\hat{\mathbf{z}}\, E_r$ sen $(ky + \omega t)$. Por supuesto que cada onda tiene su campo magnético de amplitudes respectivas B_i, B_0 y B_r. El campo magnético total debe ser continuo para $y = 0$ y el campo eléctrico total, por ser paralelo a la superficie, también tiene que ser continuo. Demostrar que este requisito, y la relación de B_0 a E_0 dada en la Ec. 70, es suficiente para determinar la relación de E_r a E_i. ¿Cuándo una onda luminosa incide normalmente en la interfase aire-vidrio, qué fracción de energía se refleja si el índice n es 1,6?

11

Campos magnéticos en la materia

11.1 *Cómo responden distintas substancias al campo magnético*

Imaginemos que realizamos varios experimentos con un campo magnético muy intenso. Para concretar, vamos a suponer que hemos construido un solenoide de 10 cm de diámetro interior y de 40 cm de largo, como el que se representa en la Fig. 11.1. Su diámetro exterior es de 40 cm, estando la mayor parte del espacio lleno por los devanados de cobre. Esta bobina produciría un campo estacionario de 3 tesla en su centro, si lo alimentamos con una potencia eléctrica de 400 kilowatt y aproximadamente unos 100 litros de agua por minuto, para refrigerarlo. Mencionamos estos detalles prácticos

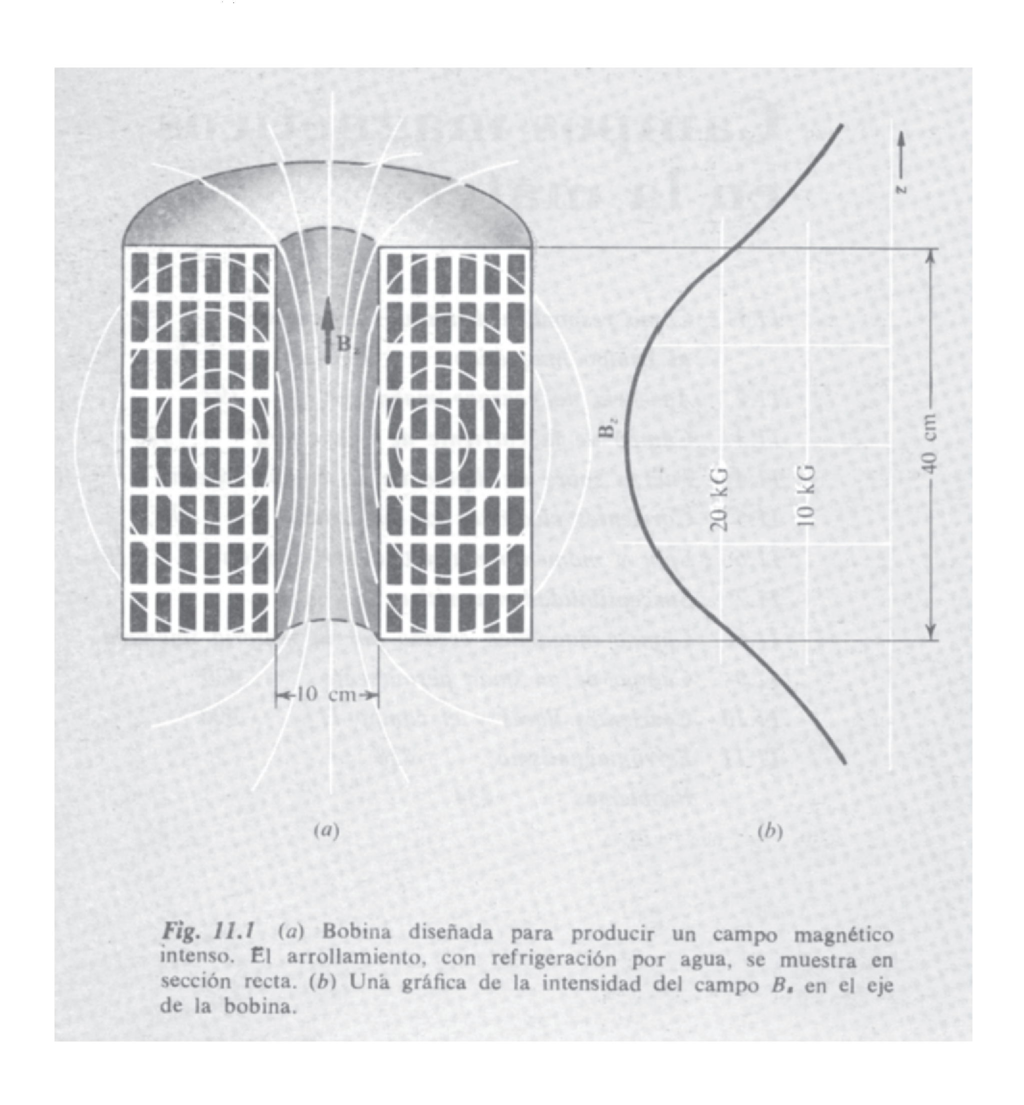


Fig. 11.1 (*a*) Bobina diseñada para producir un campo magnético intenso. El arrollamiento, con refrigeración por agua, se muestra en sección recta. (*b*) Una gráfica de la intensidad del campo B_z en el eje de la bobina.

para que se vea que nuestro dispositivo, aunque nada extraordinario, es un imán de laboratorio bastante respetable. La intensidad del campo en su centro es aproximadamente 10^5 veces la del campo magnético terrestre, y probablemente 5 ó 10 veces mayor que el campo cerca de cualquier barra imanada o imán de herradura, con el que hayamos podido experimentar. El campo será claramente uniforme cerca del centro del solenoide, reduciéndose en el eje en cualquier extremo, a aproximadamente la mitad de su valor central. Será tal vez menos uniforme que el campo del solenoide de la Fig. 6.18, puesto que nuestra bobina es una superposición « estratificada » de solenoides con una relación longitud-diámetro que varía de 4:1 a 1:1. De hecho, si analizamos la bobina de esta manera, y usamos la fórmula (Ec. 44 del capítulo 6) que encontramos para el campo en el eje de un solenoide con un devanado en capa única, no es difícil el cálculo exacto del campo axial. En la Fig. 11.1 se da una gráfica de la intensidad del campo en el eje, tomando el campo central de 3 tesla. La intensidad exactamente al final de la bobina es de 1,8 tesla, y en sus proximidades el campo varía con un gradiente de unos 17 T/m.

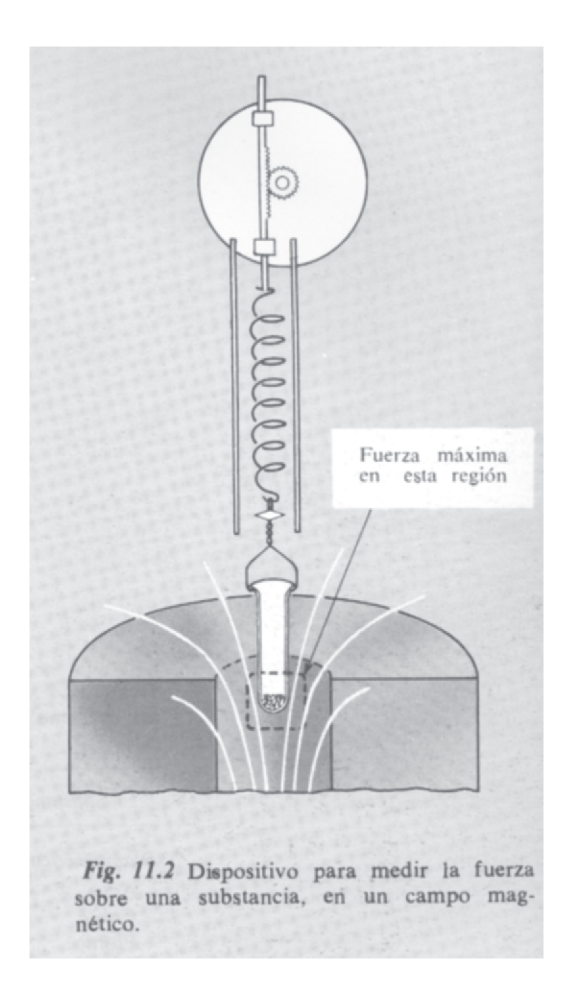


Fig. 11.2 Dispositivo para medir la fuerza sobre una substancia, en un campo magnético.

Vamos a colocar varias substancias dentro de este campo y veamos si actúa alguna fuerza sobre las mismas. Generalmente, hallamos dicha fuerza. Desaparece al cortar la corriente en la bobina. Pronto encontramos que la fuerza no es mayor cuando nuestra muestra está en el centro de la bobina, donde el campo magnético B_z es mayor, sino cuando se coloca cerca del extremo de la bobina, donde el gradiente, dB_z/dz, es mayor. De ahora en adelante vamos a suspender cada muestra exactamente en la parte final superior de la bobina. La Fig. 11.2 representa una de tales muestras contenida en un tubo de ensayo, suspendido de un muelle que puede calibrarse para indicar la fuerza adicional debida al campo magnético. Naturalmente, tenemos que hacer un experimento « en vacío » con el tubo de ensayo y la suspensión solamente, para ver el efecto del campo magnético en todo lo que no sea la muestra.

Encontramos en estos experimentos que la fuerza sobre una substancia determinada — aluminio metálico, por ejemplo — es proporcional a la masa de la muestra e independiente de su forma, siempre y cuando el tamaño no sea muy grande. (Experimentando con una muestra pequeña en esta bobina se encuentra que la fuerza permanece prácticamente constante en una región de unos centímetros de extensión, al final de la bobina; si usamos muestras no mayores de 1 a 2 cm^3 en volumen, puede mantenerse perfectamente dentro de esta región.) Podemos expresar nuestros resultados cuantitativos, para una substancia dada, en tantas dinas por gramo de muestra, bajo las condiciones $B_z = 1{,}8$ tesla, $dB_z/dZ = 17$ T/m.

Pero, al principio, los resultados cualitativos, son algo desconcertantes. Para un gran número de substancias puras ordinarias, la fuerza observada, aunque fácilmente medible, parece ridiculamente pequeña, después de todo nuestro esfuerzo para obtener un campo magnético intenso. Es de diez a veinte dinas por gramo, típicamente no más de un pequeño porcentaje del peso de la muestra. Va hacia

arriba para algunas muestras, hacia abajo para otras. No tiene nada que ver con el *sentido* del campo magnético, como podemos comprobar invirtiendo el sentido de la corriente. Por otro lado, parece que algunas substancias son siempre atraídas hacia donde la intensidad del campo es *creciente*, mientras otras, lo son hacia donde la intensidad del campo es *decreciente*, independientemente del sentido del campo.

Encontramos que algunas susbstancias son atraídas hacia el interior de la bobina con una fuerza considerablemente mayor. Por ejemplo, los cristales de cloruro cúprico son atraídos hacia abajo con una fuerza de $28 \cdot 10^{-4}$N por gramo de muestra. El oxígeno líquido se comporta espectacularmente en este experimento; es atraído hacia el centro de la bobina con una fuerza de cerca de ocho veces su peso. En realidad, si tuviéramos que llevar un frasco destapado, con oxígeno líquido, hasta el fondo de nuestra bobina, el líquido se elevaría en el frasco. (¿Dónde podemos creer que acabaría esto?) Por otra parte, el nitrógeno líquido demuestra casi ser indiferente, un gramo de nitrógeno líquido es rechazado de la bobina con una fuerza débil de 10^{-4} N. En la tabla 11.1 hemos expuesto algunos resultados que pueden obtenerse con este experimento. Las substancias, incluyendo las mencionadas anteriormente, se han elegido para sugerir, lo mejor posible con

Tabla 11.1 Fuerza sobre un gramo de muestra cerca del extremo superior de una bobina con $B_z = 1{,}8$ tesla $dB_z/dz = 17$ T/m

Substancia	*Fórmula*	*Fuerza*, Newton* $\cdot 10^{-5}$
Diamagnéticas		
Agua	H_2O	— 22
Cobre	Cu	— 2,6
Plomo	Pb	— 37
Cloruro sódico	NaCl	— 15
Cuarzo	SiO_2	— 16
Azufre	S	— 16
Diamante	C	— 16
Grafito	C	— 110
Nitrógeno líquido	N_2	— 10 (78 K)
Paramagnéticas		
Sodio	Na	+ 20
Aluminio	Al	+ 17
Cloruro de cobre	$CuCl_2$	+ 280
Sulfato de níquel	$NiSO_4$	+ 830
Oxígeno líquido	O_2	+ 7500 (90 K)
Ferromagnéticas		
Hierro	Fe	+ 400 000
Magnetita	Fe_3O_4	+ 120 000

* Sentido de la fuerza: hacia abajo +, hacia arriba —, Todas las medidas se han efectuado a 20 °C excepto cuando se indica.

un muestreo reducido, el gran intervalo de comportamiento magnético que encontramos en los materiales ordinarios.

Como se sabe, algunas substancias, de las cuales la más corriente es el hierro metálico, parecen mucho más « magnéticas » que cualquier otra. En la tabla damos la fuerza que actuaría sobre una pieza de 1 gramo de hierro colocado en el campo, en la misma posición que las otras muestras. La fuerza es de cerca de 4,4 N. (No habríamos sido tan inocentes como para aproximar al imán varios gramos de hierro en un tubo de ensayo suspendido de un muelle delicado —deberíamos haber usado otro tipo de suspensión.) Nótese que hay un factor mayor de 10^5 entre la fuerza que actúa sobre un gramo de hierro y la fuerza sobre un gramo de cobre, elementos no esencialmente distintos. Esto nos sugiere que las medidas magnéticas fidedignas, en una substancia como el cobre, pueden no ser fáciles. Una contaminación de partículas metálicas de hierro, del uno por un millón, falsearían notablemente el resultado.

Hay otra diferencia esencial entre el comportamiento del hierro y de la magnetita, con referencia a las demás substancias en la tabla. Supongamos que se hace la prueba, variando la intensidad del campo magnético del electroimán, para comprobar si la fuerza sobre la muestra es proporcional al campo. Por ejemplo, podemos reducir la corriente del solenoide a la mitad, con lo que reducimos a la mitad la intensidad del campo B_z y su gradiente dB_z/dz. Encontraríamos en el caso de cualquier substancia encima del hierro en la tabla, que la fuerza se reduce a *un cuarto* de su valor anterior, mientras que la fuerza sobre el hierro o la magnetita se reduciría sólo a la mitad o quizás un poco menos. Evidentemente que la fuerza, bajo estas condiciones al menos, es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo para todas las demás substancias en la tabla, pero casi proporcional a la intensidad del campo, lo mismo para el Fe que para el Fe_3O_4.

Parece que estamos tratando con varios fenómenos diferentes, y algunos de ellos complicados. Daremos un pequeño paso hacia su compresión al introducir cierta clasificación.

Primeramente, aquellas substancias que son ligeramente repelidas por nuestro electroimán, agua, cloruro sódico, cuarzo, etc., se llaman *diamagnéticas*. La mayor parte de los compuestos inorgánicos y prácticamente todos los compuestos orgánicos son diamagnéticos. Resulta que, de hecho, el diamagnetismo es una propiedad de *todo* átomo y molécula. Cuando se observa comportamiento contrario, es debido a que el diamagnetismo es superado por un efecto distinto y más intenso, el cual conduce a la atracción.

Las substancias que son atraídas hacia la región de campo más intenso se llaman *paramagnéticas*. En algunos casos, notablemente en los metales como el Al, Na, y muchos otros, el paramagnetismo no es mucho mayor que el diamagnetismo corriente. En otros materiales tales como el $NiSO_4$ y el $CuCl_2$ de nuestra tabla, el efecto paramagnético es mucho más intenso. En estas substancias también, aquél se *incrementa* cuando la temperatura disminuye, conduciendo a efectos muy intensos a temperaturas próximas al cero absoluto. Este incre-

mento del paramagnetismo al disminuir la temperatura es responsable en parte de la gran fuerza encontrada para el oxígeno líquido. Si se cree que todo esto será fácil de explicar, obsérvese que el cobre es diamagnético, mientras que el cloruro de cobre es paramagnético, pero el sodio es paramagnético mientras el cloruro sódico es diamagnético.

Finalmente, se llaman *ferromagnéticas* las substancias que se comportan como el hierro y la magnetita. Además de los metales de esta clase comunes, hierro, cobalto y níquel, se conocen una gran cantidad de aleaciones ferromagnéticas y compuestos cristalinos. De todas maneras, las investigaciones actuales en ferromagnetismo están alargando constantemente la lista.

En este capítulo tenemos dos tareas. Una es desarrollar un estudio de los fenómenos macroscópicos en los que interviene la materia imanada, en los cuales el propio material se caracteriza por unos pocos parámetros, y las relaciones determinadas experimentalmente entre ellos. Es como el estudio de los dieléctricos basado en las relaciones entre el campo eléctrico y la polarización global. A veces a tal teoría se le llama *fenomenológica*. Nuestra segunda tarea es tratar de entender, al meno de una manera general, el origen atómico de los distintos efectos magnéticos. Los efectos magnéticos, una vez entendidos, revelan algunos hechos básicos de la estructura atómica mejor que los fenómenos dieléctricos.

Un hecho general queda fuera de la tabla. A escala de energías moleculares, interviene muy poca energía en el diamagnetismo y paramagnetismo. Tomemos el ejemplo extremo del oxígeno líquido. Para sacar 1g de oxígeno líquido de nuestro imán necesitaríamos una cantidad de trabajo del orden de 0,075 N en una distancia de unos cuantos centímetros (ya que la intensidad del campo disminuye considerablemente en una distancia de pocos centímetros). Digamos, aproximadamente, $5 \cdot 10^{-3}$ J. Es decir, menor que 10^{-24} J por molécula, de las cuales hay $2 \cdot 10^{22}$ en 1 gr de este líquido. Para vaporizar 1 gramo de oxígeno líquido se necesitan 50 calorías, o bien alrededor de 10^{-20} J por molécula. (La mayor parte de esta energía se utiliza para separar las moléculas unas de otras.) Sea lo que fuere lo que pueda ocurrir en el oxígeno líquido a nivel molecular como resultado del campo magnético, evidentemente es una cuestión secundaria en lo que respecta a la energía.

Sabemos que incluso campos magnéticos muy intensos no tienen influencia práctica en los procesos químicos, y lo mismo ocurre en bioquímica. Podemos colocar la mano y el antebrazo dentro del solenoide de 3 tesla, sin ninguna sensación o consecuencia importante. Es difícil predecir si nuestro brazo será paramagnético o diamagnético, pero la fuerza sobre el mismo, en todo caso, no será mayor de unos cuantos gramos. Inversamente, la presencia de una mano cualquiera cerca de la muestra en la Fig. 11.2 perturbaría el campo y cambiaría la fuerza sobre la muestra por no más de uno por un millón. Imaginando todo el cuerpo con resonancia magnética nuclear, el cuerpo estaría invadido por un campo magnético de unas pocas décimas de

tesla de intensidad sin efecto fisiológico alguno. Parece que el único riesgo asociado con un intenso campo magnético estacionario es el peligro de perder objetos de hierro que serían arrebatados por el campo de los bordes y lanzados dentro del imán.

En su interacción con la materia el campo magnético juega un papel totalmente diferente del de un campo eléctrico. La razón es simple y fundamental. Los átomos y moléculas están constituidas por partículas cargadas eléctricamente que se mueven con velocidades generalmente pequeñas comparadas con la de la luz. Un campo magnético no ejerce fuerza alguna sobre una carga eléctrica estacionaria; sobre una carga móvil la fuerza es proporcional a v. Las fuerzas eléctricas dominan abrumadoramente la escena atómica. Como hemos notado antes, el magnetismo parece ser, en nuestro mundo al menos, un efecto relativista. Sería distinto si la materia estuviese constituida por partículas cargadas magnéticamente. Ahora debemos explicar lo que significa la *carga magnética* y lo que significa su evidente ausencia.

11.2 Ausencia de «carga» magnética

El campo magnético en el exterior de una varilla imanada, como la aguja de una brújula, se parece mucho al campo eléctrico exterior de una varilla polarizada eléctricamente, una varilla con exceso de carga positiva en un extremo, y negativa en el otro (Fig. 11.3). Es imaginable que el campo magnético tiene fuentes que están relacionadas a él de la misma manera que lo están la carga eléctrica y el campo eléctrico. Entonces el polo « norte » de una brújula sería el lugar donde existiría un exceso de una clase de « carga magnética » y el polo sur sería el lugar donde existiría un exceso de clase opuesta. Podemos llamar positiva a la « carga norte » y negativa a la « carga sur », con el campo magnético dirigido de la positiva a la negativa, una regla como la adoptada para el campo y la carga eléctrica. Históricamente así es como fue establecido nuestro convenio acerca del sentido positivo del campo magnético *. Lo que hemos llamado *carga magnética* normalmente se ha llamado *intensidad de polo magnético.*

Esta idea es perfectamente posible mientras explique los hechos.

* Recordemos que en el Cap. 6 establecimos el sentido positivo de **B** referida a un sentido de la corriente (la del movimiento de una carga positiva) y la regla de la mano derecha. Ahora «polo norte» significa «polo que busca el norte» de la brújula. Aún no comprendemos por qué la polaridad del campo magnético terrestre es en un sentido y no en el otro. La denominación, debida a Franklin, de electricidad «positiva» no tenía nada que ver con esto. Por lo tanto, el hecho de emplear la regla de la mano derecha y no la de la mano izquierda, es sólo un accidente.

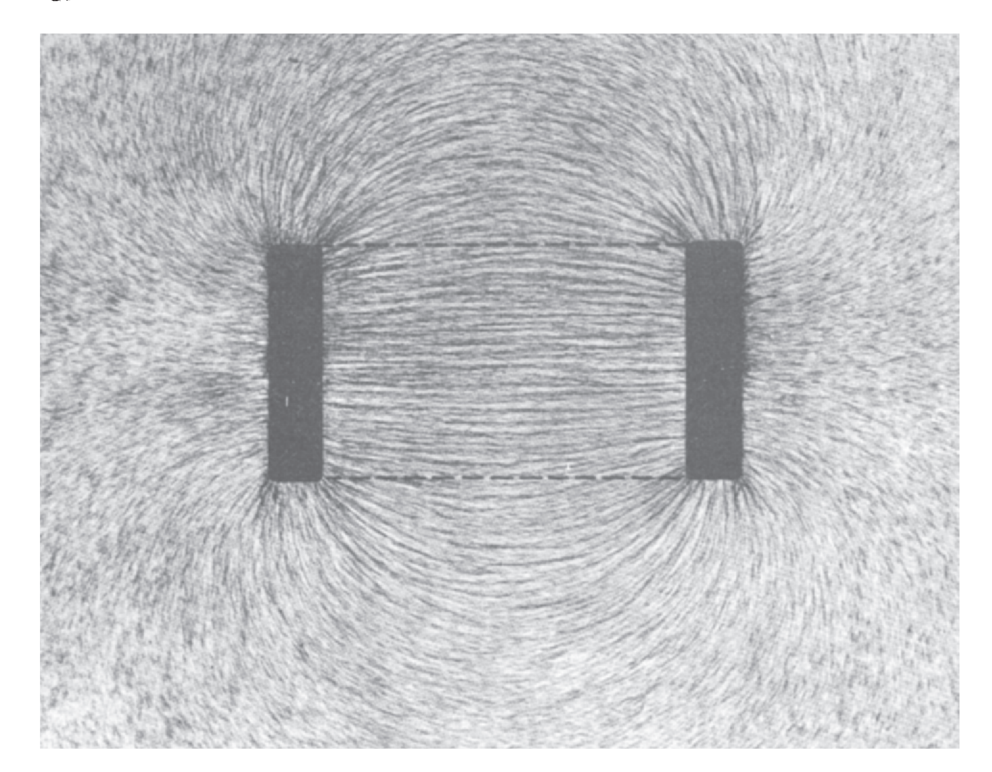
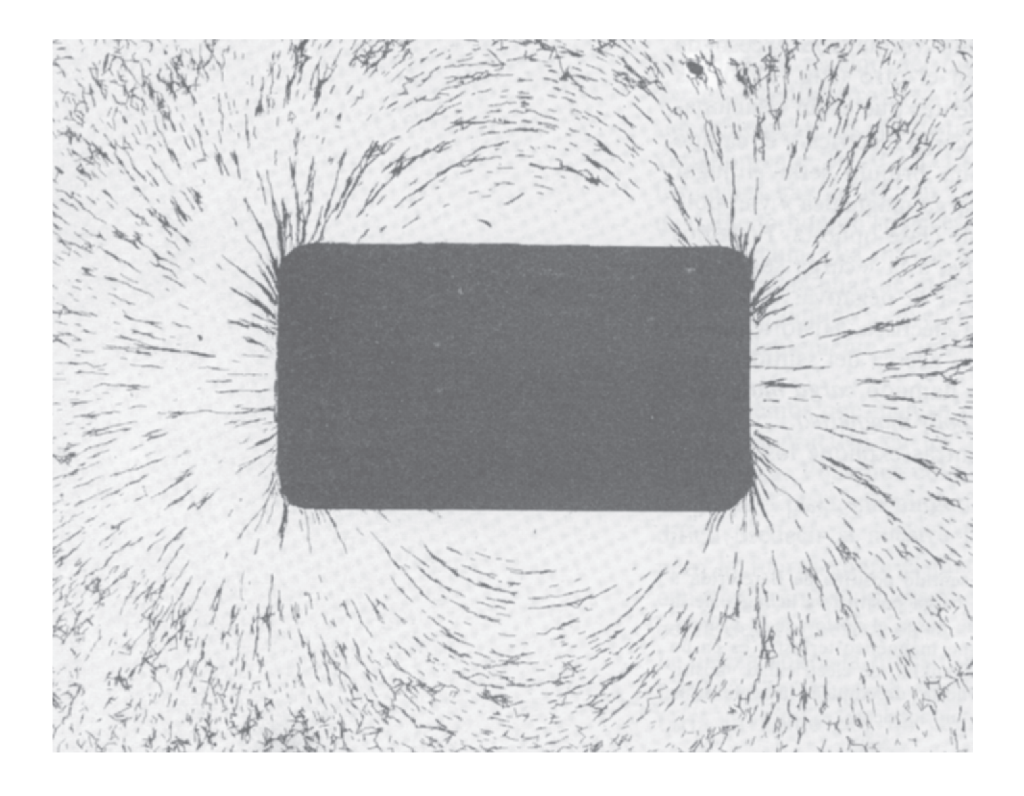


Fig. 11.3 (*a*) Dos discos con cargas opuestas. (Los electrodos representados en sección recta como barras sólidas negras producen un campo eléctrico que es el mismo que el de una barra polarizada. Es decir, si imaginamos tal barra ocupando la región dentro del contorno sombreado, su campo exterior sería como el dibujado. El campo eléctrico se ha hecho visible por gran número de pequeñas fibras negras, en suspensión en aceite, que se orientan en la dirección del campo. Este método elegante de demostración de la configuración del campo eléctrico * se debe a Mr. Harold M. Waage, Palmer Physical Laboratory, Princeton University, quien ha preparado cuidadosamente la fotografía original para esta ilustración.



(*b*) Campo magnético en los alrededores de un cilindro imanado, mostrado por la orientación de pequeños trozos de hilo de níquel, sumergido en glicerina. (Este intento de mejorar la demostración tradicional por «limaduras de hierro» adaptando la técnica de Waage no tuvo demasiado éxito; los trozos de hilo de níquel tienden a reunirse en largas ristras que luego se precipitan sobre el imán.)
En la fig. 11.21 posterior, se muestran diagramas, construidos teóricamente, en los dos sistemas.

* H. M. Waage, *Am. J. Phys.* **32,** 388 (1964).

Se hace aún más plausible cuando recordamos que las ecuaciones fundamentales son simétricas en **E** y **B**. Entonces, ¿por qué no debemos esperar encontrar simetría en las fuentes del campo? Con carga magnética como fuente posible de un campo magnético estático **B**, tendríamos div $\mathbf{B} = \mu_0 \eta$, donde η significa la densidad de carga magnética, en completa analogía con la densidad de carga eléctrica ρ. Dos cargas magnéticas positivas (o polos norte) de intensidad unidad, separados 1 m se repelerían mutuamente con la fuerza de 10^{-5} N y así sucesivamente.

El inconveniente es que los hechos no ocurren de este modo. La naturaleza, por alguna razón, no ha hecho uso de esta oportunidad. El mundo a nuestro alrededor aparece totalmente asimétrico en el sentido de que no encontramos *cargas magnéticas en modo alguno*. Nadie ha observado nunca un exceso de una clase aislada de carga magnética —por ejemplo, un polo norte aislado. Si existiera tal ***monopolo magnético*** se reconocería de varias maneras. Distinto al dipolo magnético, experimentaría una fuerza al colocarlo en un campo magnético uniforme. Así pues, una partícula elemental que poseyese una carga magnética se aceleraría uniformemente en un campo magnético estacionario como un protón o un electrón se aceleran invariablemente en un campo eléctrico. Alcanzando alta energía podría detectarse por su interacción con la materia. Un monopolo magnético al moverse constituye una corriente magnética; debe estar rodeada por un campo eléctrico, como una corriente eléctrica está rodeada por un campo magnético. Con estrategias basadas en estas únicas propiedades, los físicos buscaron monopolos magnéticos en muchos experimentos. La investigación fue reanudada recientemente cuando un desarrollo de la teoría de las partículas elementales sugirió que el universo debía contener al menor unos pocos monopolos magnéticos, abandonados desde el «big bang» en que presumiblemente empieza. Pero, hasta ahora, ningún monopolo se ha detectado, y ahora es evidente que si existiesen nunca serían excesivamente extraordinarios. Por supuesto que la evidente existencia de incluso una partícula cargada magnéticamente tendría profundas implicaciones, pero no alteraría el hecho de que en la materia, como sabemos, las fuentes de campo magnético son las corrientes eléctricas. En lo que conocemos,

$$\boxed{\text{div } \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(en todas partes)}} \tag{1}$$

Esto nos reconduce a la hipótesis de Ampère, la de la idea de que el magnetismo en la materia se explica por una multitud de pequeñas espiras de corriente eléctrica distribuidas en toda la substancia. Empezaremos estudiando el campo magnético creado por una sola corriente en una espira en puntos relativamente distantes de la misma.

11.3 Campo de la corriente de una espira

Una espira conductora cerrada está situada en el plano xy envolviendo el origen como en la Fig. 11.4*a*. Una corriente estacionaria I circula a lo largo de la espira. Nos interesa el campo magnético que crea esta corriente, no cerca de la espira sino en puntos distantes, como el P_1 de la figura. Supondremos que r_1, la distancia a P_1, es mucho mayor que cualquier dimensión de la espira. Para simplificar el diagrama hemos situado a P_1 en el plano yz; resultará que esto no es una restricción. Ésta es una buena ocasión para utilizar el potencial vector. Primero calcularemos el potencial vector **A** en la posición P_1, es decir, $\mathbf{A}(0, y_1, z_1)$. De aquí resultará evidente lo que vale el potencial vector en cualquier otro punto (x, y, z) alejado de la espira. Tomando entonces el rotacional de **A** hallaremos el campo magnético **B**.

Para una corriente confinada a un hilo, según la Ec. 35 del Capítulo 6, tenemos:

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Espira}} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}} \tag{2}$$

Entonces nos interesaba únicamente la contribución de un pequeño trozo del circuito; ahora tenemos que integrar a lo largo de toda la espira. Consideremos la variación del denominador r_{12} cuando recorremos la espira. Si P_1 está lejos, la variación de primer orden de r_{12} depende solamente de la coordenada y_2 del segmento $d\mathbf{l}_2$, y no de x_2. Esto se aclara con la proyección lateral esquematizada en la Fig. 11.4*b*. Así, despreciando cantidades proporcionales a $(x_2/r_{12})^2$, podemos considerar a r_{12} y r'_{12} iguales, las cuales están una encima de otra en la proyección lateral. Y en general, para primer orden en la relación (dimensión de la espira/distancia a P_1) tenemos

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \operatorname{sen} \theta \tag{3}$$

Consideremos ahora los dos elementos de camino $d\mathbf{l}_2$ y $d\mathbf{l}'_2$, representados en la Fig. 11.4*a*. Para ellos los dy_2 tienen el mismo valor pero signo contrario, y como ya hemos señalado, los r'_{12} son iguales en primera aproximación. Con esta aproximación, sus contribuciones a la integral curvilínea total se anulan, y esto se cumplirá para toda la espira. De aquí que **A** en P_1 no tendrá componente y. Evidentemente no tendrá componente z, pues la trayectoria de la corriente no tiene de por sí ninguna componente z. La componente x del potencial vector procede de la parte correspondiente a dx en la integral curvilínea. Así

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dx_2}{r_{12}} \tag{4}$$

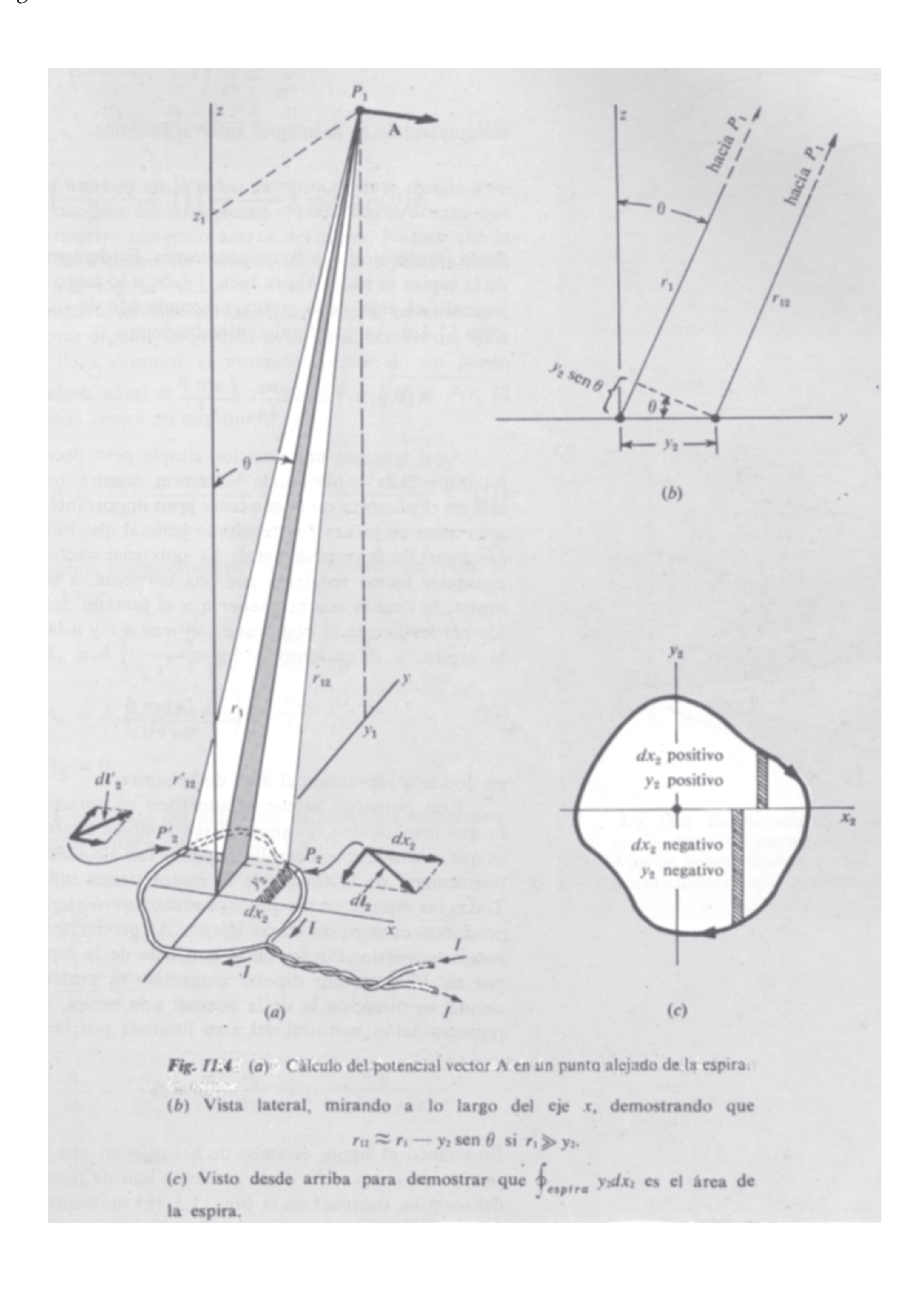


Fig. 11.4 (*a*) Cálculo del potencial vector **A** en un punto alejado de la espira.

(*b*) Vista lateral, mirando a lo largo del eje x, demostrando que

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \operatorname{sen} \theta \quad \text{si} \quad r_1 \gg y_2.$$

(*c*) Visto desde arriba para demostrar que $\oint_{espira} y_2 dx_2$ es el área de la espira.

Continuando con la primera aproximación, la Ec. 3 puede escribirse

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1}\left(1 + \frac{y_2 \operatorname{sen}\theta}{r_1}\right) \tag{5}$$

sustituyéndolo en la integral anterior tenemos

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{r_1}\int\left(1 + \frac{y_2 \operatorname{sen}\theta}{r_1}\right) dx_2 \tag{6}$$

En la integración r_1 y θ son constantes. Evidentemente $\int dx_2$ a lo largo de la espira es nula. Ahora bien, $\int y_2 dx_2$ a lo largo de la espira es precisamente el área de la espira, prescindiendo de su forma (véase la Figura 11.4*c*). Así que finalmente obtenemos

$$\mathbf{A}(0,y_1,z_1) = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I \operatorname{sen}\theta}{r_1^2} \times (\text{área de la espira}) \tag{7}$$

Aquí tenemos una cuestión simple pero decisiva: puesto que no ha importado la *forma* de la espira, nuestra restricción de que P_1 esté en el plano yz no puede tener gran importancia. Por lo tanto debemos tener en la Ec. 7 el resultado general que buscábamos, si lo *establecemos* de manera general: El potencial vector de una espira de cualquier forma recorrida por una corriente, a una distancia r de la espira, la cual es mucho mayor que el tamaño de la espira, es un vector perpendicular al plano que contiene a r y a la normal al plano de la espira, y de módulo

$$A = \frac{\mu_0\, Ia \operatorname{sen}\theta}{4\pi\, r^2} \tag{8}$$

en donde a representa el área de la espira.

Este potencial vector es simétrico en torno al eje de la espira, lo que implica que el campo **B** sea también simétrico. La explicación es que estamos considerando regiones tan alejadas de la espira que los pormenores de la forma de la espira tienen influencia despreciable. Todas las espiras, en las que el producto *corriente* × *área* sea el mismo, producen el mismo campo lejano. Al producto *Ia* le llamamos *momento magnético dipolar* de la corriente de la espira, y lo denotamos por **m**. El momento dipolar magnético es evidentemente un vector, siendo su dirección la de la normal a la espira, o la del vector **a**, la representación vectorial del área limitada por la espira,

$$\mathbf{m} = I\mathbf{a} \tag{9}$$

En cuanto al signo, estamos de acuerdo en que el sentido de **m** y el sentido de circulación de la corriente han de relacionarse por la regla del tornillo, ilustrada en la Fig. 11.5. (El momento dipolar de la espira

de la Fig. 11.4*a*, según esta regla, se dirige hacia abajo.) El potencial vector del campo de un dipolo magnético **m** puede escribirse ahora vectorialmente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{10}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en la dirección espira punto donde queremos calcular **A** y sentido hacia el punto. Puede comprobarse que esto concuerda con nuestro convenio acerca del signo. Nótese que la dirección y sentido de **A** deben ser siempre los de la corriente en la parte más próxima a la espira.

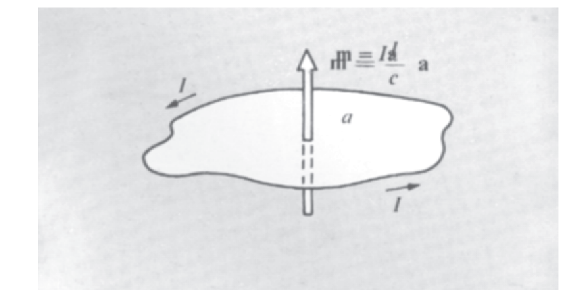


Fig. 11.5 Por definición el vector momento magnético está relacionado a la corriente por la regla del tornillo como se indica aquí.

La Fig. 11.6 muestra un dipolo magnético situado en el origen, con el vector momento dipolar magnético **m** en la dirección del eje z y sentido positivo. Para expresar el potencial vector de un punto $(x, y, z,)$ observemos que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, y $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2+y^2}/r$. El módulo A del potencial vector en este punto es

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{r^3} \tag{11}$$

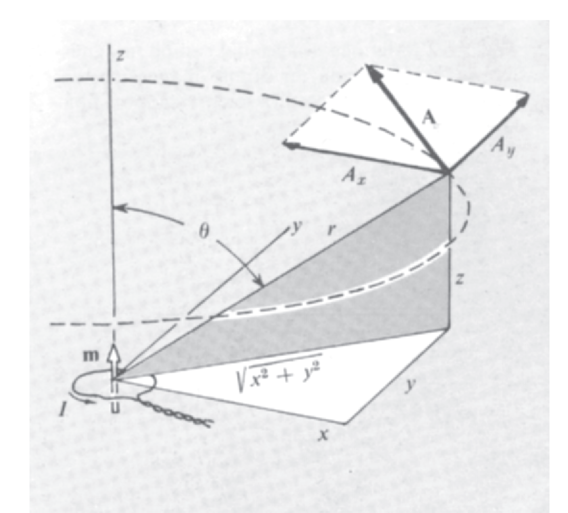


Fig. 11.6 Dipolo magnético situado en el origen. En todo punto alejado de la espira. **A** es un vector paralelo al plano xy, tangente a una circunferencia en torno al eje z.

Puesto que **A** es tangente a una circunferencia horizontal en torno al eje z, sus componentes son:

$$\begin{aligned} A_x &= A\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{-my}{r^3} \\ A_y &= A\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{mx}{r^3} \\ A_z &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

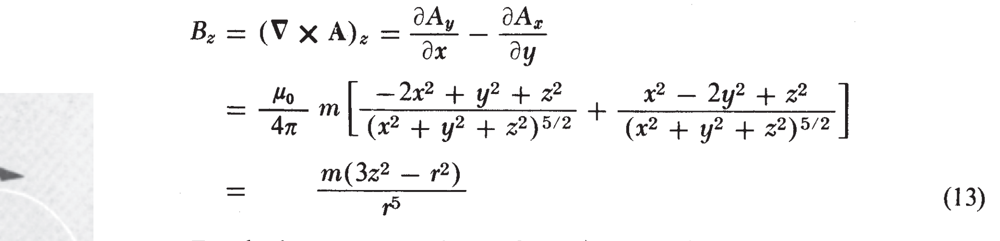
Calculemos **B** en un punto del plano xz, hallando las componentes de rot **A** y entonces (nunca antes) hacer $y = 0$.

$$B_x = (\nabla\times\mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3mxz}{r^5}$$

$$B_y = (\nabla\times\mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{o}{\partial z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{-my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3myz}{r^5}$$



$$B_z = (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} m \left[\frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right]$$

$$= \frac{m(3z^2 - r^2)}{r^5} \qquad (13)$$

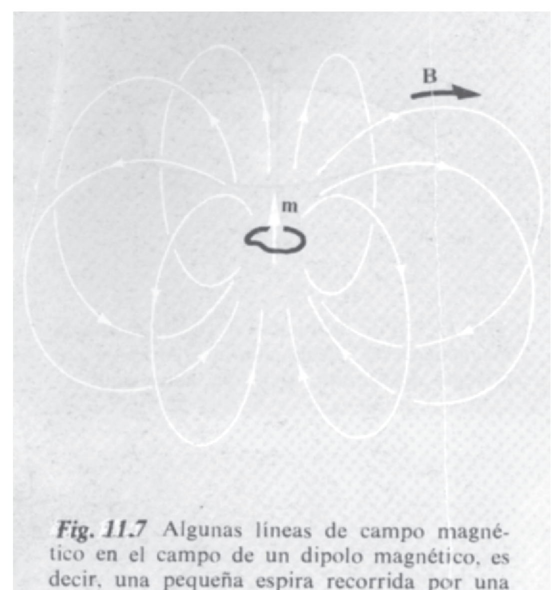


Fig. 11.7 Algunas líneas de campo magnético en el campo de un dipolo magnético, es decir, una pequeña espira recorrida por una corriente.

En el plano xz, $y = 0$, $\operatorname{sen}\theta = x/r$, y $\cos\theta = z/r$. Las componentes del campo en cualquier punto de este plano vienen dadas por:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$B_y = 0 \qquad (14)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

Volvamos ahora a la Sec. 10.3, donde, en la Ec. 10.14, habíamos expresado las componentes del campo **E** de un dipolo eléctrico, **p**, en el plano xz, que estaba situado exactamente igual que nuestro dipolo magnético **m**. Las expresiones son idénticas. Hemos encontrado, pues, que el campo magnético de una pequeña espira por la que circula corriente, en puntos alejados, tiene la misma forma que el campo eléctrico de dos cargas separadas. Ya conocemos el aspecto de este campo, el del dipolo eléctrico. En la Fig. 11.7 se intenta sugerir la forma tridimensional del campo magnético **B** creado por nuestra espira con momento dipolar **m**. Como en el caso del dipolo eléctrico, el campo se describe más simplemente en coordenadas polares esféricas:

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \cos\theta; \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \operatorname{sen}\theta; \quad B_\varphi = 0 \qquad (15)$$

El campo magnético *cercano* a una espira recorrida por una corriente es completamente diferente del campo eléctrico cercano a un par de cargas separadas, positiva y negativa, como se comprueba al comparar los esquemas de la Fig. 11.8. Nótese que, entre las cargas, el campo eléctrico va hacia abajo, mientras que en el interior del anillo de corriente el campo magnético va hacia arriba, aunque los campos distantes sean parecidos. Esto refleja el hecho de que nuestro campo magnético satisface a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en cualquier parte, *incluso en el interior de la fuente*. Las líneas de campo magnético se cierran sobre sí mismas. Por cerca y lejos entendemos, por supuesto, relativo al tamaño de la espira o la separación de las cargas. Si imaginamos que la espira disminuye de tamaño mientras la corriente aumenta, de manera que el momento dipolar $m = Ia$ permanezca constante, nos acercamos al dipolo magnético infinitesimal, la contrapartida del dipolo eléctrico infinitesimal, descrito en el Cap. 10.

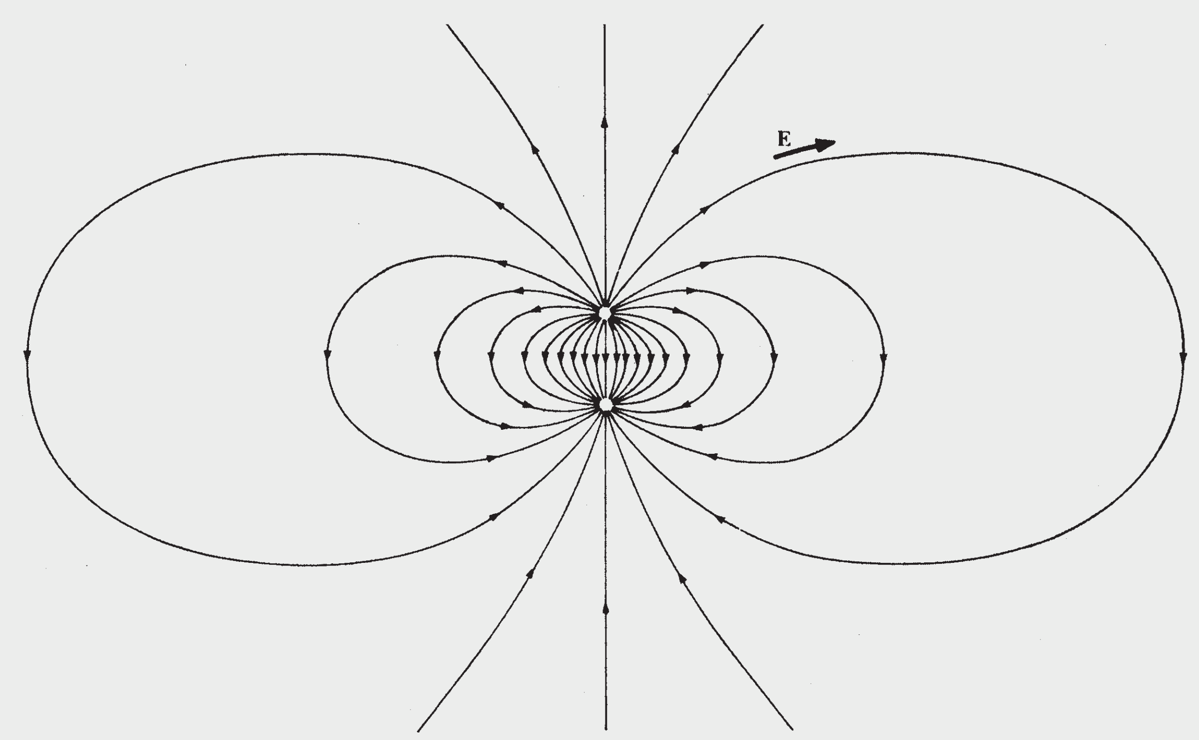
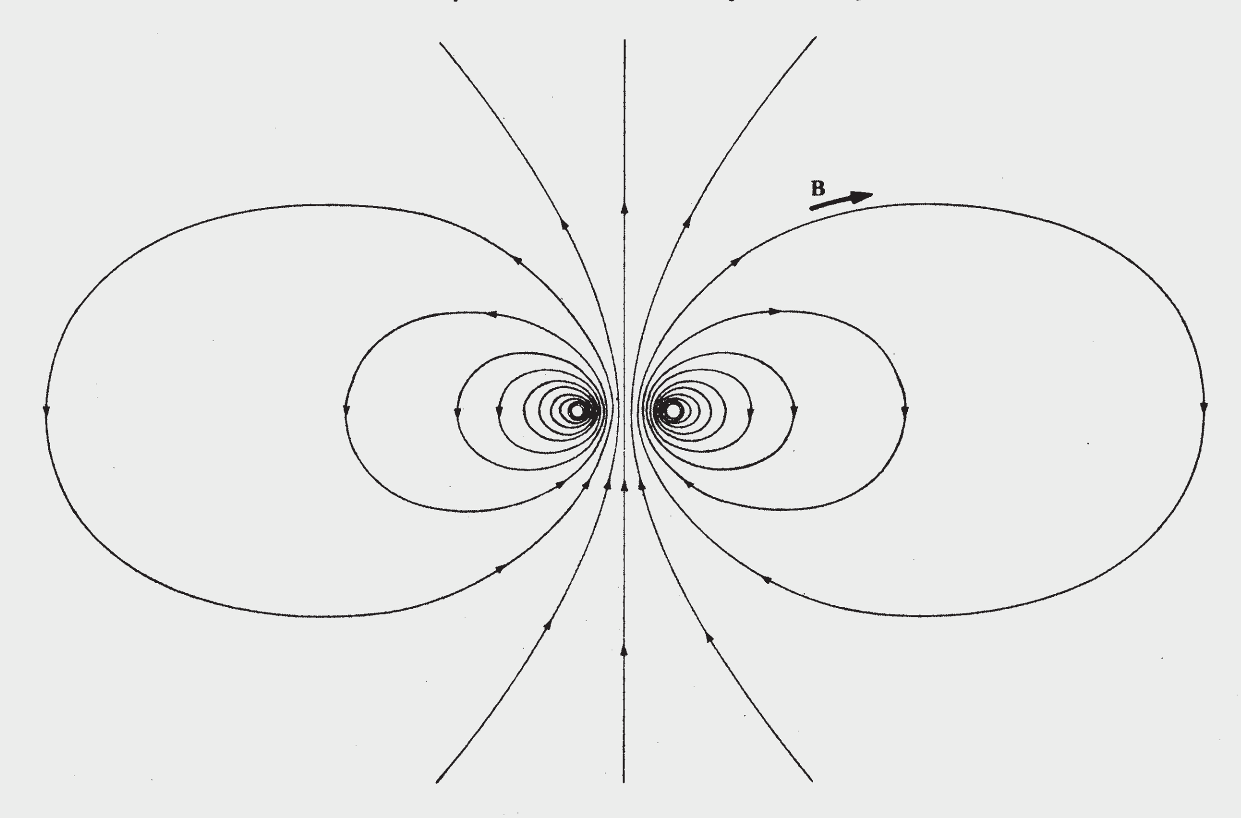


Fig. 11.8 (*a*) Campo eléctrico de un par de cargas iguales y de signo contrario. A lo lejos se convierte en el campo de un dipolo eléctrico



(*b*) Campo magnético de un anillo recorrido por una corriente. A lo lejos se convierte en el campo de un dipolo magnético.

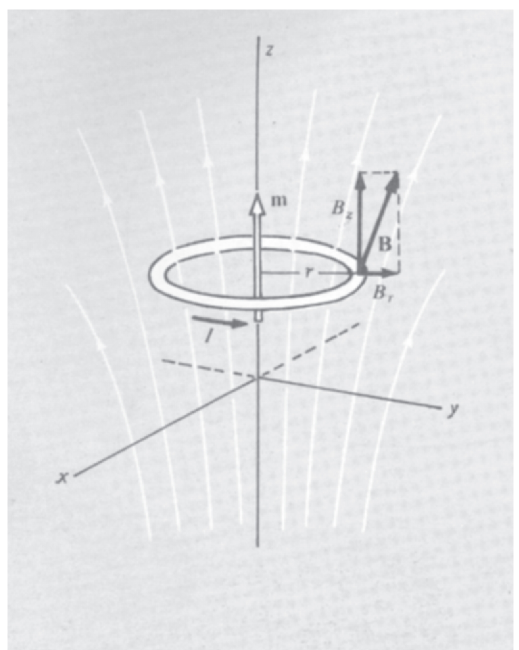


Fig. 11.9 Anillo recorrido por una corriente en un campo magnético no homogéneo. (El campo propio del anillo no se indica.) Debido a la componente radial del campo, B_r, hay una fuerza resultante sobre el anillo.

11.4 Fuerza sobre un dipolo en un campo externo

Consideremos una pequeña espira circular de radio r, recorrida por una corriente, colocada en el campo magnético de cualquier otro sistema de corrientes, tal como un solenoide. En la Fig. 11.9, se ha dibujado un campo **B** dirigido de manera general en la dirección z, pero no es un campo uniforme. Por el contrario decrece al avanzar en la dirección z; se pone de manifiesto por la separación de las líneas de campo. Para simplificar, supongamos que el campo es simétrico en torno al eje z. Esto se parece al campo próximo a la sùperficie superior del solenoide de la Fig. 11.1. El campo representado en la Fig. 11.9 *no* incluye el campo magnético de la propia espira. Queremos hallar la fuerza debida a otro campo, que llamaremos *campo externo*, sobre la espira. La fuerza total es la espira debida a su propio campo magnético es indudablemente nula, por lo que podemos ignorar dicho campo propio en la discusión.

Al estudiar lo qué ocurre en la Fig. 11.9, pronto se ve que hay una fuerza resultante sobre la espira. Se debe a que el campo externo **B** tiene una componente *radial* B_r en todo punto del aro. Por tanto si la corriente circula en el sentido indicado, cada elemento dl de la espira debe experimentar una fuerza hacia abajo de valor $IB_r dl$. Si B_r tiene el mismo valor en todos los puntos del aro, como debe ocurrir en el campo simétrico y dispersivo que se ha supuesto, la fuerza total hacia abajo tendrá por módulo,

$$F = 2\pi r I B_r \tag{16}$$

Podemos ahora relacionar directamente B_r con el gradiente de B_z. Puesto que div $\mathbf{B} = 0$ en todos los puntos, el flujo total del campo magnético que sale de cualquier volumen es nulo. Consideremos el pequeño cilindro de radio r y altura Δz (Fig.11.10). El flujo total saliente lateral es $2\pi r(\Delta z)B_r$ y el flujo total a través de las bases es

$$\pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)]$$

el cual, en aproximación de primer orden en la pequeña distancia Δz, es $\pi r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z$. Igualando a cero el flujo total: $0 = \pi r^2(\partial B_z/\partial z)\Delta z + 2\pi r B_r \Delta z$, lo que nos da la relación,

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{17}$$

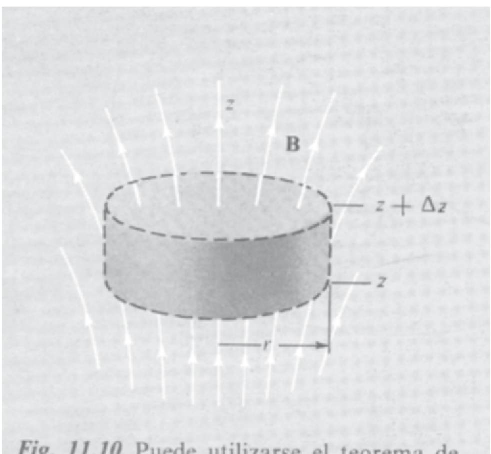


Fig. 11.10 Puede utilizarse el teorema de Gauss para relacionar B_r y $\partial B_z/\partial z$, llegándose a la Ec. 17.

Como comprobación del signo, notemos que según la Ec. 17, B_r es positivo cuando B_z decrece hacia arriba; una ojeada a la figura nos indica que esto es correcto.

La fuerza sobre el dipolo puede ahora expresarse en función del gradiente de la componente B_z del campo externo:

$$F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{18}$$

En el factor $\pi r^2 I$ reconocemos al módulo m del momento dipolar magnético de nuestra espira. Así pues la fuerza sobre la espira puede expresarse muy simplemente en función del momento dipolar:

$$F = m \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{19}$$

No lo hemos demostrado, pero no nos sorprenderá oír que para pequeñas espiras de cualquier otra forma la fuerza solamente depende del producto *corriente · área*, es decir, del momento dipolar. No importa la forma. Por supuesto, sólo estamos hablando de espiras lo suficientemente pequeñas para que únicamente sean importantes las variaciones de primer orden del campo externo, en el área abarcada por la espira.

Nuestro aro de la Fig. 11.9 tiene un momento magnético **m** dirigido hacia arriba y la fuerza es hacia abajo. Evidentemente, si pudiésemos invertir la corriente en el aro, por tanto invertir **m**, la fuerza invertiría su sentido. Esto puede resumirse de la siguiente manera:

Momento dipolar *paralelo* al campo externo: La fuerza actúa en el sentido de la intensidad del campo *creciente*.

Momento dipolar *antiparalelo* al campo externo: La fuerza actúa en el sentido de la intensidad del campo *decreciente*.

Campo externo *uniforme*: Fuerza *nula*.

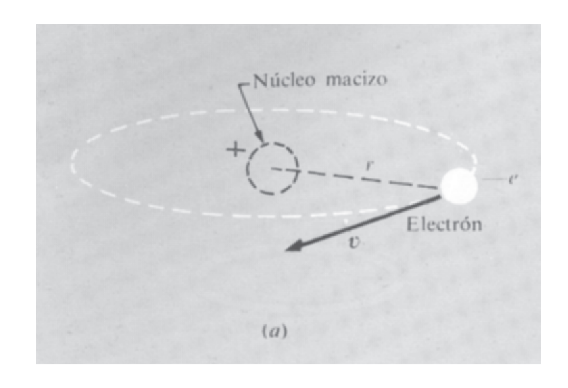
Es evidente que éste no es el caso más general. El momento **m** puede estar dirigido formando cierto ángulo con el campo **B**, y las diferentes componentes de **B** podrían variar, en el espacio, de distintas maneras. No es difícil desarrollar una fórmula para la fuerza **F** que se experimenta en el caso general. Sería exactamente igual a la fórmula general que se dio, como Ec. 10.23, para la fuerza sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico no uniforme. Es decir, la componente x de la fuerza sobre un dipolo magnético **m** viene dada por

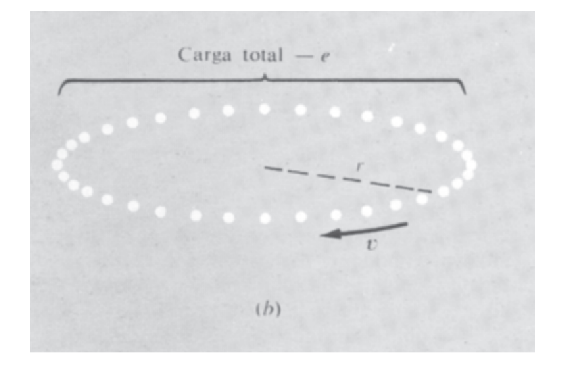
$$F_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad } B_x \tag{20}$$

con las correspondientes fórmulas para F_y y F_z.

En las ecuaciones 19 y 20 la fuerza está en N, con el gradiente del campo en T/m y el momento dipolar magnético m dado por la Ec. 9, $m = Ia$ donde I está en A, a en metros cuadrados y c en m/s. Existen varias formas equivalentes para expresar las unidades de m. Adoptaremos $\text{J/T} = \text{A} \cdot \text{m}^2$. Como puede verse de la Ec. 19,

$$m = \frac{\text{N}}{\text{T/m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{T}} = \frac{\text{J}}{\text{T}} = \text{A} \cdot \text{m}^2$$





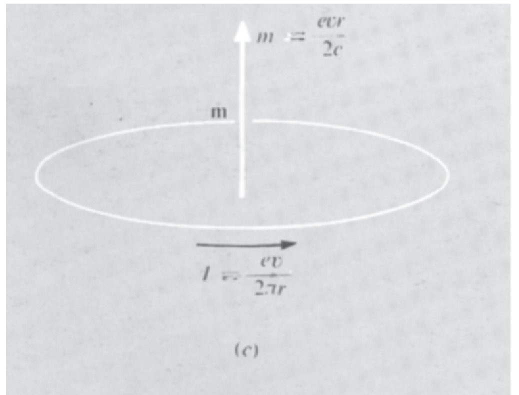


Fig. 11.11 (*a*) Modelo de átomo en el que el electrón se mueve a celeridad v en una órbita circular.
(*b*) Procesión de carga equivalente. La corriente eléctrica media es la misma que si la carga $-e$ estuviese dividida en pequeños trozos, formando un anillo de carga giratorio.
(*c*) El momento magnético es el producto de la corriente por el área.

Ahora podemos empezar a ver lo que debe ocurrir en los experimentos descritos al principio del capítulo. Una substancia situada en la posición de la muestra en la Fig. 11.2 será atraída hacia el *interior* del solenoide si contiene dipolos magnéticos *paralelos* al campo **B** de la bobina. Sería rechazada al *exterior* del solenoide si contuviese dipolos orientados en sentido contrario, antiparalelos al campo. La fuerza dependería del gradiente de la intensidad del campo axial, y sería nula en el punto medio del solenoide. Además, si la intensidad total del momento dipolar en la muestra fuese proporcional a la intensidad del campo **B**, entonces, en un punto dado, la fuerza sería proporcional a B veces $\partial B/\partial z$, y de aquí que lo sea al cuadrado de la corriente del solenoide. Este es el comportamiento observado en las substancias diamagnéticas y paramagnéticas. Parece como si las muestras ferromagnéticas tuvieran que poseer un momento magnético casi independiente de la intensidad del campo, pero de todas maneras, las dejaremos aparte para un estudio particular.

¿Cómo evoca la aplicación de un campo magnético a una substancia, momentos dipolares magnéticos con una intensidad proporcional al campo aplicado? ¿Y por qué deben ser paralelos al campo en algunas substancias y de sentido contrario en otras? Si podemos contestar a estas preguntas, estaremos en camino de entender la física del diamagnetismo y del paramagnetismo.

11.5 *Corrientes eléctricas en los átomos*

Sabemos que un átomo está constituido por un núcleo positivo rodeado por electrones negativos. Para describir esto completamente, necesitaríamos los conceptos de física cuántica que se estudiarán más adelante en este curso. Afortunadamente un modelo simple y fácil nos puede explicar muy bien el diamagnetismo. Es un modelo planetario, con los electrones en órbitas alrededor de los núcleos, como en el modelo de la primitiva teoría cuántica de Bohr para el átomo de hidrógeno.

Empezamos con un electrón moviéndose con celeridad constante en una trayectoria circular. Puesto que no vamos a explicar aquí estructuras atómicas, no vamos a preguntarnos las razones por las cuales el electrón tiene esta órbita, no otra. Nos preguntaremos solamente qué efectos magnéticos debemos esperar, si se mueve en tal órbita. En la Fig. 11.11 vemos el electrón representado como una partícula que transporta una carga eléctrica concentrada $-e$, moviéndose con celeridad v en una trayectoria circular de radio r. En el centro, está la carga nuclear positiva, haciendo que el sistema sea eléctricamente neutro, pero el núcleo debido a su masa relativamente grande, se mueve tan despacio que sus efectos magnéticos pueden despreciarse.

En cualquier instante, el electrón y la carga positiva podrían parecer un dipolo eléctrico, pero el valor medio con el tiempo del momento dipolar eléctrico es nulo, no produce campo eléctrico estacionario distante. Discutimos este hecho en la Sec. 10.5. El campo *magnético* lejano del sistema tendrá un valor medio, con el tiempo, que *no* será nulo. Por el contrario, es el campo de una corriente anular. En lo que respecta al promedio con el tiempo, no hay ninguna diferencia, en tener toda la carga negativa integrante, en un punto que se mueve alrededor del átomo, o distribuida en pequeñas porciones, como en la Fig. 11.11*b*, para formar una procesión uniforme y continua. La corriente es la cantidad de carga que pasa por un punto del anillo, por segundo. Puesto que el electrón efectúa $v/2\pi r$ revoluciones por segundo, la corriente es

$$I = \frac{ev}{2\pi r} \tag{21}$$

El electrón que recorre la órbita es equivalente a un anillo de corriente de este valor con el sentido positivo de circulación opuesto a v, como se indica en la Fig. 11.11*c*. Su campo lejano es por tanto el de un dipolo magnético de intensidad

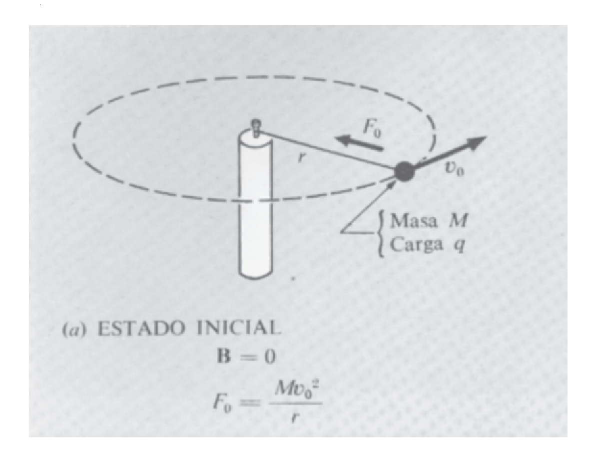
$$m = \pi r^2 I = \frac{evr}{2} \tag{22}$$

Observemos una relación simple entre el momento magnético **m** asociado con la órbita electrónica y el momento cinético orbital **L**. El momento cinético es un vector de módulo $L = m_e vr$, donde m_e denota la masa del electrón *, y está dirigido hacia abajo si el electrón gira en el sentido indicado en la Fig. 11.11*a*. Adviértase que el producto vr aparece tanto en m como en L. Teniendo en cuenta el sentido, podemos escribir:

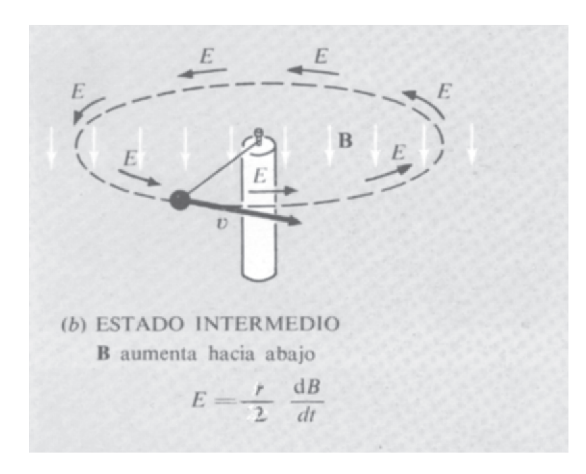
$$\mathbf{m} = \frac{-e}{2m_e}\mathbf{L} \tag{23}$$

Esta relación sólo incluye constantes fundamentales, lo que nos hace sospechar que se cumple de manera general. Realmente esto es cierto, aunque no lo vamos a demostrar aquí. Se cumple en órbitas elípticas, e incluso en las de forma de roseta que tienen lugar en un campo central que no cumple la ley de la proporcionalidad inversa del cuadrado.

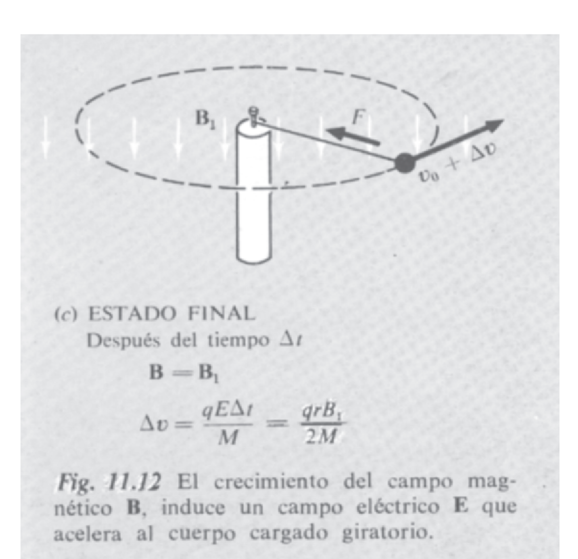
* Trataremos con celeridades v mucho menores que c, así que m_e representa la masa en reposo, $9{,}0 \cdot 10^{-31}$ kg. El haber elegido el símbolo m para el momento magnético, nos obliga a usar en este capítulo un símbolo diferente para la masa del electrón. Para el momento cinético elegimos **L** que es el que se utiliza normalmente en la física atómica para el momento cinético orbital, que es el que consideramos aquí.



(*a*) ESTADO INICIAL
$\mathbf{B} = 0$
$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r}$



(*b*) ESTADO INTERMEDIO
$\mathbf{B}$ aumenta hacia abajo
$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$



(*c*) ESTADO FINAL
Después del tiempo Δt
$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$
$\Delta v = \frac{qE\Delta t}{M} = \frac{qrB_1}{2M}$

Fig. 11.12 El crecimiento del campo magnético **B**, induce un campo eléctrico **E** que acelera al cuerpo cargado giratorio.

Recordemos la importante propiedad de cualquier órbita en un campo central: El momento cinético es una constante del movimiento. Se sigue entonces, de la relación expresada por la Ec. 23 (que hemos deducido solamente para un caso particular), que siempre que se conserva el momento cinético, también permanece constante el momento magnético en módulo, dirección y sentido. El factor

$$\frac{-e}{2m_e} \quad \text{o} \quad \frac{\text{momento magnético}}{\text{momento cinético}}$$

se llama ***relación magnetomecánica orbital*** para el electrón*. La íntima relación que existe entre el momento magnético y el momento cinético, es la base de cualquier explicación del magnetismo atómico.

¿Por qué no se observan los campos magnéticos de todos los electrones de todos los átomos de cualquier substancia? La respuesta debe ser que hay una anulación mutua. En un trozo de materia corriente tiene que haber tantos electrones girando en un sentido como en el otro. Esto es previsible, porque no hay nada que haga que un sentido de rotación sea intrínsecamente más fácil que otro, o de otra manera, que distinga una dirección axial única. Debería haber algo en la estructura del material, para señalarnos, no sólo un eje, sino un *sentido de rotación en torno dicho eje.*

Podemos representar una porción de materia, en ausencia de campo magnético exterior, considerando que contiene electrones giratorios con sus distintos vectores momento cinético y sus momentos magnéticos orbitales asociados, distribuidos de manera continua en todas las direcciones del espacio. Consideremos las órbitas cuyos planos sean aproximadamente paralelos al plano xy, de las cuales habrá aproximadamente el mismo número con **m** hacia arriba que con **m** hacia abajo. Vamos a ver lo que sucede a una de estas órbitas, cuando aplicamos un campo magnético externo en la dirección del eje z.

Primero analicemos un sistema electromecánico que no se parece mucho al átomo. En la Fig. 11.12 tenemos un objeto de masa M y carga eléctrica q, atada a un punto fijo mediante una cuerda de longitud constante r. Esta cuerda nos proporciona la fuerza centrípeta que nos mantiene al objeto en su órbita circular. El módulo de esta fuerza F_0 viene dado, como sabemos, por

$$F_0 = \frac{Mv_0^2}{r} \tag{24}$$

En el estado inicial, Fig. 11.12*a*, no existe ningún campo magnético externo. Luego, por medio de un gran solenoide adecuado, empezamos a crear un campo **B** en la dirección z, sentido negativo, uniforme en

* Para esta cantidad se usa mucho el término, relación *giromagnética*. Preferimos llamar relación *magnetogiratoria*. Sea cual fuere el nombre, esto establece que el momento magnético está en el numerador.

toda la región en un instante dado. Mientras el campo magnético va creciendo a razón de dB/dt, habrá un campo eléctrico inducido **E** a lo largo de la trayectoria, como se indica en la Fig. 11.12*b*. Para hallar el módulo de este campo **E** notemos que la variación con el tiempo del flujo a través de la trayectoria circular es

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \tag{25}$$

Esto nos determina la integral curvilínea del campo eléctrico, que es realmente lo que nos interesa (por simetría y simplicidad suponemos que vale lo mismo a lo largo de toda la trayectoria).

$$\int \mathbf{E} \cdot dl = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi r E \tag{26}$$

De aquí hallamos que

$$E = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB}{dt} \tag{27}$$

Hasta aquí no hemos tenido en cuenta los signos, pero si aplicamos a la Fig. 11.12 nuestra regla preferida para hallar el sentido de una fuerza electromotriz inducida, se verá que **E** tiene el sentido correcto para acelerar el cuerpo si q es una carga positiva. La aceleración dv/dt a lo largo del camino viene determinada por la fuerza qE:

$$M\frac{dv}{dt} = qE = \frac{qr}{2}\frac{dB}{dt} \tag{28}$$

de manera que tenemos una relación entre la variación de v y de la de B:

$$dv = \frac{qr}{2M}\, dB \tag{29}$$

Siendo el radio r constante, por ser la longitud de la cuerda, el factor $(qr/2M)$ es una constante. Sea Δv la variación total de v en el proceso completo de conducir el campo a su valor final B_1. Entonces:

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \frac{qr}{2M}\int_0^{B_1} dB = \frac{qrB_1}{2M} \tag{30}$$

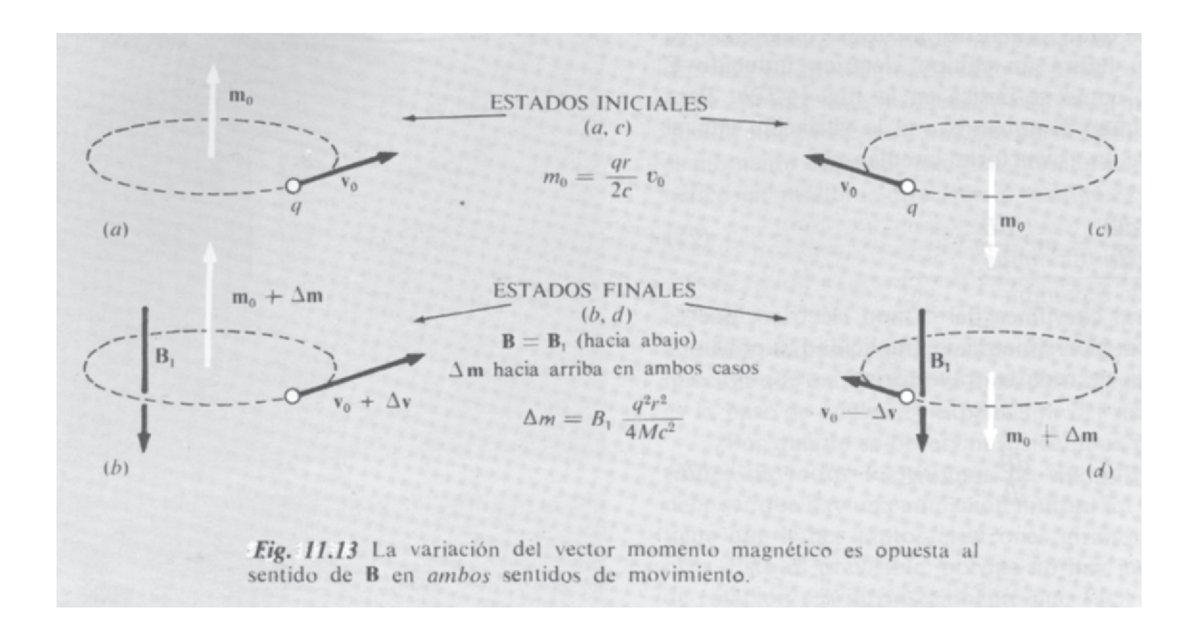


Fig. 11.13 La variación del vector momento magnético es opuesta al sentido de **B** en *ambos* sentidos de movimiento.

Nótese que el tiempo ha desaparecido, la velocidad final es la misma tanto si la variación ha sido rápida como si ha sido lenta.

El incremento de celeridad de la carga en el estado final, significa un aumento del momento magnético, dirigido hacia arriba, **m**. Un cuerpo cargado *negativamente* habría sido *de*celerado en circunstancias similares, lo que habría *disminuido* su momento *hacia abajo*. En los dos casos, pues, la aplicación de un campo $\mathbf{B}_1$ ha producido una variación del momento magnético opuesta al campo. El módulo de la variación Δm del momento magnético es

$$\Delta m = \frac{qr}{2}\Delta v = \frac{q^2r^2}{4M} B_1 \tag{31}$$

Asimismo para cargas, positivas o negativas, girando en sentido contrario, la variación inducida del momento magnético es opuesta a la variación del campo magnético aplicado. La Fig. 11.13 nos muestra esto para una carga positiva. Resulta que la relación siguiente se cumple para cualquier signo de la carga y cualquier sentido de giro:

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{q^2r^2}{4M}\mathbf{B}_1 \tag{32}$$

En este ejemplo obligábamos a que r fuese constante utilizando una cuerda de longitud fija. Veamos cómo ha variado la tensión de la cuerda. Supongamos que B_1 es lo suficientemente pequeño para que

$\Delta v \ll v_0$. En el estado final se requiere una fuerza centrípeta de valor:

$$F_1 = \frac{M(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx \frac{M v_0{}^2}{r} + \frac{2 M v_0 \, \Delta v}{r} \tag{33}$$

despreciando el término proporcional a $(\Delta v)^2$. Pero ahora el propio campo magnético nos proporciona una fuerza hacia el interior, sobre la carga móvil, dada por $q\,(v_0 + \Delta v) B_1$. Utilizando la Ec. 30 para expresar B_1 en función de Δv, hallamos que esta fuerza suplementaria hacia el interior tiene el valor $q(v_0 + \Delta v)/2M\Delta v/r$ la cual en primera aproximación es $2Mv_0\,\Delta v/r$. Esto es exactamente lo que necesitamos, según la Ec. 33, para evitar cualquier tensión suplementaria de nuestra cuerda. De aquí que la tensión de la cuerda *permanece invariable, en su valor* F_0.

Esto conduce a una sorprendente conclusión: nuestro resultado, Ec. 32, debe ser válido para cualquier tipo de fuerza de ligadura que varíe con el radio. Nuestra cuerda puede sustituirse por un muelle elástico sin afectar el resultado — el radio no habría variado en el estado final. Para ir al sistema que nos interesa, podría sustituirse por la atracción de Coulomb de un núcleo a un electrón. O podría ser la fuerza efectiva que actúa sobre un electrón de un átomo que contiene muchos electrones, que no obstante, tiene distinta dependencia del radio.

Apliquemos esto a un electrón en un átomo, sustituyendo m_e en vez de M, y e^2 en vez de q^2. Ahora Δm es el momento magnético inducido por la aplicación de un campo B_1 al átomo. O sea, $(\mu_0/4\pi)\,\Delta m/B_1$ es una polarizabilidad magnética, definida de la misma manera que la polarizabilidad eléctrica α introducida en la Sección 10.5. Recordemos que tenía dimensiones de volumen y resultó ser, en orden de magnitud, de 10^{-30} m^3, aproximadamente el volumen de un átomo. Según la Ec. 32, la polarizabilidad magnética debida a un electrón en una órbita de radio r es

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta m}{B_1} = -\frac{\mu_0 e^2 r^2}{4\pi \cdot 4 m_e} = -\frac{\mu_0 e^2 r^2}{16 \pi m_e} \tag{34}$$

Esto tiene también dimensiones de volumen, pues $(\mu_0/4\pi)\,(e^2/m_e)$ es una longitud, a saber, el ***radio clásico del electrón*** r_0, una constante que vale $2{,}8 \cdot 10^{-15}$ m. Para el radio de la órbita r tomemos el radio de Bohr $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m. Entonces la Ec. 34 da $(\mu_0/4\pi)\,(\Delta m/B_1) = 2 \cdot 10^{-36}$ m^3. Adviértase que esto es cinco o seis órdenes de magnitud menor que las polarizabilidades ***eléctricas*** típicas, indicadas en la Tabla 10.2. Es menor, de manera aproximada, por la relación del radio clásico del electrón r_0 al radio atómico.

Veamos si esto da cuenta de la fuerza de nuestras muestras diamagnéticas indicadas en la Tabla 11.1. El número total de electrones es casi el mismo en un gramo de casi cualquier cosa. Es aproximadamente de un electrón por cada dos nucleones, o $3 \cdot 10^{23}$ electrones por gramo de materia. (Recordemos que el peso atómico es unas dos ve-

ces el número atómico para la mayoría de los elementos.) Por supuesto, r^2 ahora debe reemplazarse por el valor cuadrático medio de los radios de las órbitas $\langle r^2 \rangle$, donde el promedio se toma para todos los electrones en el átomo, algunos de los cuales tienen órbitas mayores que otros. En realidad, $\langle r^2 \rangle$ varía notablemente poco de un átomo a otro en todo el sistema periódico, y a_0^2, el cuadrado del radio de Bohr que antes hemos usado, permanece con muy buena estimación. Adoptándolo, predeciríamos que en un campo de 1,8 T induce en 1 kg de substancia un momento magnético de valor

$$\Delta m = (3 \cdot 10^{26}) \frac{\Delta m}{B} \cdot B$$

pero de (14)

$$\Delta m / B = \frac{4\pi}{\mu_0} \cdot 2 \cdot 10^{-36} \text{ m}^3 = 2 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

con lo que

$$\Delta m = 3 \cdot 10^{26} \cdot 2 \cdot 10^{-29} \cdot 1{,}8 = 10{,}8 \text{ m}^2 \cdot \text{A} \tag{35}$$

que en un gradiente de 17 T/m daría lugar a una fuerza de módulo $F = \Delta m \frac{\partial B}{\partial z} = 10{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 17 = 18{,}3 \cdot 10^{-2}$ N sobre 1 kg y por tanto

$$F = 18{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ N sobre un gramo} \tag{36}$$

Esto concuerda muy bien con los valores dados en la Tabla 11.1 para varias substancias diamagnéticas puras.

Podemos ver ahora por qué el diamagnetismo es un fenómeno universal y bastante débil. Vale lo mismo en moléculas que en átomos. El hecho de que una molécula pueda tener una estructura mucho mayor que la de un átomo — pueden estar constituidas por cientos o miles de átomos — no incrementa, generalmente, el valor cuadrático medio efectivo del radio orbital. La razón se debe a que, en una molécula, cualquier electrón dado está muy bien localizado en un átomo. Existen ciertas excepciones interesantes e incluimos una, el grafito, en la tabla. El diamagnetismo anómalo del grafito se debe a una estructura no usual, que permite que algunos electrones circulen, bastante libremente, dentro de una distribución plana de átomos en la estructura cristalina.

11.6 Spin y momento magnético del electrón

El electrón posee un momento cinético que no tiene nada que ver con su movimiento orbital. Se comporta en cierta manera como si

girase continuamente en torno un eje propio. Esta propiedad se llama *spin*. Cuando se mide el valor del momento cinético de spin, obtenemos siempre el mismo valor: $h/4\pi$, en donde h es la constante de Planck, $6{,}624 \cdot 10^{-34}$ J · s. El spin del electrón es un fenómeno cuántico. Ahora, su importancia para nosotros, reside en el hecho de que tiene asociado a este momento cinético intrínseco, o « formando parte de su estructura », un *momento magnético*, asimismo de módulo invariable. Este momento magnético está dirigido en el sentido previsto, al imaginar al electrón como una bola de carga negativa, girando en torno a su eje. Es decir, el vector momento magnético es antiparalelo al vector momento cinético de spin, como se indica en la Fig. 11.14. Sin embargo, la relación del momento magnético al momento cinético vale el doble que en el caso del movimiento orbital.

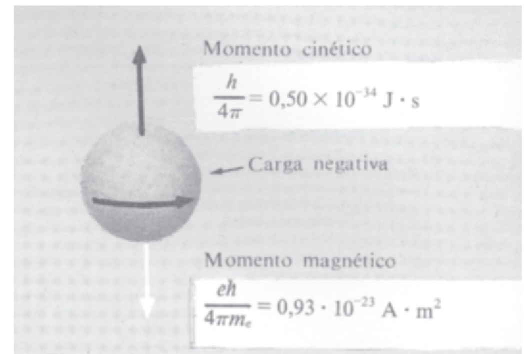


Fig. 11.14 Momento cinético intrínseco, o *spin*, y momento magnético asociado, del electrón. Nótese que la relación del momento magnético al momento cinético es e/m_e y no $e/2m_e$ como en el movimiento orbital (Ec. 23). Esto no tiene explicación clásica.

No hay manera de hallar un modelo clásico de esto; sus propiedades son esencialmente mecánico cuanticas. No necesitamos ir tan lejos, como para decir que *es* una corriente en una espira. Lo que importa es que se comporta como tal en los siguientes aspectos: (i) produce un campo magnético que, a lo lejos, es el de un dipolo magnético; (ii) en un campo externo **B** experimenta un par igual al que actuaría sobre una espira recorrida por una corriente de momento dipolar equivalente; (iii) dentro del espacio ocupado por el electrón, div $\mathbf{B} = 0$ en todo punto, como en las fuentes ordinarias de campo magnético con las que ya estamos familiarizados.

Puesto que el módulo del momento magnético del spin es siempre el mismo, sobre lo único que puede influir un campo externo es en su dirección. Un dipolo magnético en un campo externo experimenta un par. Si se resuelve el problema 6.22 se prueba que el par **N** sobre una espira de cualquier forma, con momento dipolar **m**, en un campo **B**, viene dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (37)$$

Para los que no han efectuado esta demostración, vamos a calcular el par en un caso particular sencillo. En la Fig. 11.15 vemos una espira rectangular de hilo que conduce una corriente I. La espira posee un momento magnético **m**, de módulo $m = Iab$. El par sobre la espira se debe a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre los hilos horizontales. Cada una de estas fuerzas tiene el módulo $F = IbB$, y el brazo del par es la distancia $(a/2)$ sen θ. Vemos que el módulo del momento del par sobre la espira es

$$N = 2\, IbB \cdot \frac{a}{2} \operatorname{sen}\theta = \left(Iab\right) B \operatorname{sen}\theta = mB \operatorname{sen}\theta \qquad (38)$$

El par actúa de manera que **m** sea paralelo a **B**; se representa por un vector **N**, que en el caso indicado, tiene dirección x y sentido positivo. Todo esto está de acuerdo con la fórmula general, Ec. 37. Adviértase

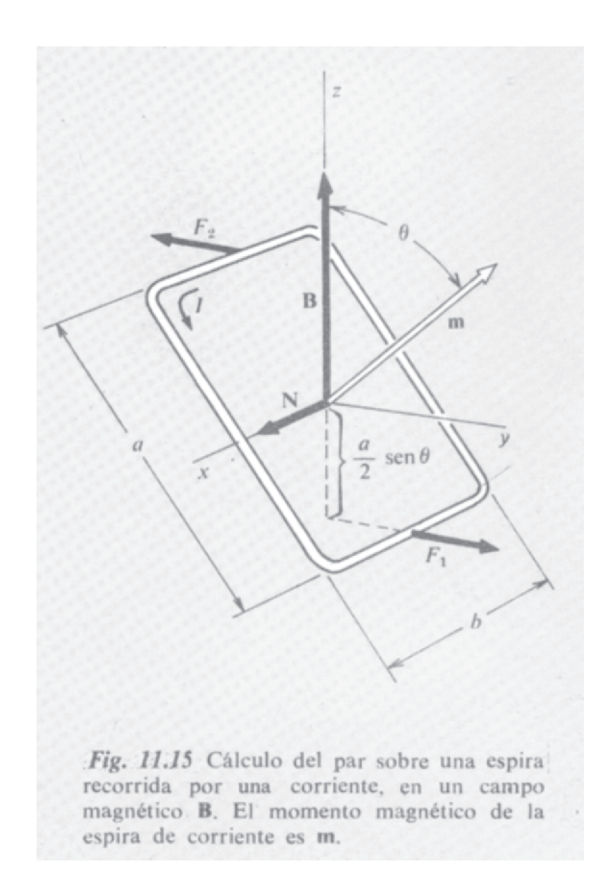


Fig. 11.15 Cálculo del par sobre una espira recorrida por una corriente, en un campo magnético **B**. El momento magnético de la espira de corriente es **m**.

que la Ec. 37 corresponde exactamente a la fórmula hallada en el Cap. 10 para el par sobre un dipolo eléctrico **p**, en un campo exterior **E**, es decir, $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. La orientación de **m** en la dirección de **B**, como la de un dipolo eléctrico paralelo a **E**, es la posición de menor energía. De manera similar, el trabajo requerido para girar un dipolo **m** desde la posición paralela a la antiparalela es $2mB$. (Véase la Ec. 9 del Capítulo 10; podemos simplemente tomar este resultado para el caso magnético.)

Si los momentos del spin de los electrones en una substancia pueden orientarse libremente, puede suponerse que lo harán en la dirección de todo campo aplicado **B**, la orientación de menor energía. Supongamos que cada electrón en un gramo de materia toma esta orientación. Ya hemos calculado que hay aproximadamente 3×10^{23} electrones en un gramo de cualquier substancia. El momento magnético del spin de un electrón, m_s, viene dado en la Fig. 11.14 y vale $0{,}93 \times 10^{-23}$ A · m². El momento magnético total de nuestros spins alineados será $(3 \times 10^{23}) \times (0{,}9 \times 10^{-23})$ o bien 2,7 J/T. La fuerza que sobre tal muestra ejercería nuestra bobina, donde el gradiente del campo era de 17 T/m, sería de 46 N, o sea, cerca de 5 kp.

Evidentemente es mucho mayor que la fuerza experimentada por cualquiera de las muestras paramagnéticas. Nuestras hipótesis eran erróneas desde dos puntos de vista. Primero, los momentos de spin del electrón no pueden orientarse libremente. Segundo, la agitación térmica evita la orientación perfecta de cualquier momento de spin que sea libre. En la mayoría de los átomos y moléculas, los electrones están agrupados a pares, con los spin de cada par en sentidos contrarios, a pesar del campo aplicado. Resulta que los momentos magnéticos de un par electrónico se anulan mutuamente. Todo lo que queda es el diamagnetismo del movimiento orbital que ya hemos explicado. La mayoría de moléculas son puramente diamagnéticas. Unas cuantas moléculas (realmente *muy* pocas) contienen un número impar de electrones, y en ellas la anulación total por parejas es evidentemente imposible. El óxido nítrico NO, con 15 electrones en la molécula, es un ejemplo; es paramagnético. La molécula de oxígeno O_2 contiene un número par de electrones, pero su estructura electrónica no favorece a la anulación de los spin de dos electrones. En un átomo solo los electrones más internos generalmente están apareados, y si un electrón externo no lo está, su spin a menudo se aparea con el de un vecino cuando el átomo forma parte de un compuesto o un cristal. Sin embargo, ciertos átomos contienen electrones con spins no apareados que permanecen relativamente libres para orientarse en un campo, incluso cuando el átomo está agrupado con otros. Son ejemplos importantes los elementos situados desde el cromo al cobre en la tabla periódica, una secuencia que incluye el hierro, cobalto y níquel. Otro grupo de elementos con esta propiedad es el de la secuencia de las tierras raras en torno al gadolinio. Los compuestos o aleaciones de estos elementos son generalmente paramagnéticos, y en algunos casos ferromagnéticos. El número de spins de electrones libres que intervienen en el paramagnetismo es típicamente de uno o dos por átomo. Podemos

pensar que cada átomo paramagnético está equipado con un momento magnético **m** que puede girar libremente, el cual en un campo magnético **B** se encontraría orientado, como una pequeña brújula, en la dirección del campo si no fuese por las perturbaciones térmicas.

La agitación térmica tiende siempre a crear una distribución al azar de las direcciones de los ejes de los spins. El grado de alineación que prevalece eventualmente representa un compromiso entre la preferencia por una dirección de energía más baja y la influencia desordenante de la agitación térmica. Antes hemos encontrado este problema. En la Sección 10.12 consideramos la orientación en un campo eléctrico **E** de los momentos dipolares de las moléculas polares. Resultaba depender de la relación de dos energías: pE, la preponderancia energética de la orientación de un momento dipolar **p** paralelo a **E** en comparación con la orientación completamente al azar, y kT, el valor medio de la energía térmica asociada con una forma de movimiento molecular a la temperatura absoluta T. Solamente si pE es mucho mayor que kT puede alcanzarse una orientación casi completa. Si pE es mucho menor que kT, la polarización de equilibrio es equivalente a una orientación perfecta de una pequeña fracción, aproximadamente pE/kT, de dipolos. Podemos tomar este resultado directamente para el paramagnetismo. Solamente necesitamos sustituir pE por mB, la energía implicada en la orientación de un momento magnético **m** en un campo magnético **B**. Con tal que mB/kT sea pequeño, se sigue que el momento magnético total resultante de aplicar el campo **B** a N dipolos será aproximadamente $(mB/kT)Nm$, o $(Nm^2/kT)B$. El momento magnético inducido es proporcional a B e inversamente proporcional a la temperatura.

Para el momento de spin de un electrón en nuestro campo de 1,8 T, mB es $1{,}6 \cdot 10^{-23}$ J. Para la temperatura ambiente, kT es $4 \cdot 10^{-21}$ J; en este caso mB/kT es pequeño. Pero si pudiésemos disminuir la temperatura a 1 K en el mismo campo, mB/kT sería casi la unidad. Con nueva disminución de la temperatura podríamos esperar una orientación casi completa, con un momento total tendiendo a Nm. Estas condiciones se logran frecuentemente en experimentos a baja temperatura. En realidad el paramagnetismo es más notable e interesante a muy bajas temperaturas, en contraste con la polarización dieléctrica. Los dipolos eléctricos moleculares se congelarían totalmente en posición, incapaces de cualquier orientación. Los momentos de spin electrónico están aún notablemente libres.

11.7 Susceptibilidad magnética

Hemos visto que, tanto las substancias paramagnéticas, como las diamagnéticas, desarrollan un momento magnético proporcional al campo aplicado. Al menos, esto es cierto en muchos casos. A muy

bajas temperaturas, en campos muy intensos, el momento paramagnético inducido puede observarse que se aproxima a un valor límite, al ir aumentando la intensidad del campo. Dejando aparte este efecto de « saturación », la relación entre el momento y el campo aplicado es bastante lineal, de manera que podemos caracterizar las propiedades magnéticas de una substancia por la razón del momento inducido al campo aplicado. Según que tomemos el momento de 1 gramo, de 1 cm^3 o de 1 mol, definimos la susceptibilidad *específica*, la susceptibilidad de *volumen*, o la susceptibilidad *molar*. Nuestra discusión en la Sec. 11.5 sugiere que para las substancias diamagnéticas la susceptibilidad específica, basada en el momento inducido por gramo, debería ser aproximadamente la misma para una substancia que para otra. Sin embargo, la susceptibilidad de volumen, basada en el momento magnético inducido por centímetro cúbico, es más apropiada para lo que nos interesa ahora.

Al momento magnético por unidad de volumen lo llamaremos polarización magnética, o *imanación*, que designaremos por el símbolo **M.** La imanación **M** y el producto de $1/\mu_0$ por el campo **B** tienen las mismas dimensiones, pues **B** tiene las dimensiones N/Am y μ_0 las de N/A^2, luego $1/\mu_0\ B$ tiene las dimensiones $N/Am : N/A^2 = A/m$.

Las dimensiones de **M** son $Am^2/m^3 = A/m$, así que tienen las mismas dimensiones. Si definimos ahora la susceptividad magnética de volumen, designada por χ_m por la relación

$$M = \chi_m \frac{B}{\mu_0} \tag{39}$$

la susceptibilidad será un número adimensional, negativo para las substancias diamagnéticas, positivo para las paramagnéticas. Esto es exactamente análogo al procedimiento, expresado en la Ec. 10.34, por el que definíamos la susceptibilidad eléctrica χ_e como la relación entre la polarización eléctrica P y el campo eléctrico E. Para la contribución paramagnética, si la hay, a la susceptibilidad, que denotaremos por χ_{pm} tendremos una fórmula análoga a la Ec. 60 del último capítulo:

$$\chi_{pm} \simeq \mu_0 \frac{Nm}{kT} \tag{40}$$

Por supuesto que tal susceptibilidad χ_m incluye la contribución diamagnética, siempre presente, la cual es negativa, y deducible de la Ec. 34.

Desgraciadamente, la Ec. 39 *no* es la definición que se acostumbra a dar de la susceptibilidad de volumen. En la definición corriente, en lugar de **B** aparece otro campo **H**, que encontraremos en la Sección 11.10. Aunque ilógica, la definición en función de **H** tiene cierta justificación práctica, y la tradición está tan bien establecida que tendremos que aceptarla. Pero en este capítulo seguiremos, en lo posible, un camino paralelo a la descripción de los campos eléctricos en la materia. Un paralelo representativo es:

El campo **B** macroscópico dentro de la materia resultará ser el promedio del **B** microscópico, tal como el **E** macroscópico resultaba ser el promedio del **E** microscópico.

La diferencia en la definición, no tiene consecuencias prácticas puesto que χ_m es un número muy pequeño comparado con la unidad. Los valores de χ_m para susbstancias diamagnéticas puras, sólidas o líquidas, normalmente están entre $-0{,}5 \times 10^{-6}$ y $-1{,}0 \times 10^{-6}$. Incluso para el oxígeno, bajo las condiciones expresadas en la tabla 11.1, la susceptibilidad paramagnética es menor de 10^{-3}. Esto significa que el campo magnético originado por los momentos dipolares de la substancia, al menos en una media a gran escala, es mucho más débil que el campo aplicado **B**. Esto nos da cierta indicación de que, en tales sistemas, podemos suponer que el campo que actúa sobre los dipolos atómicos, para orientarlos, es el mismo que el campo que existiría allí en ausencia de la muestra. Sin embargo, nos interesan otros sistemas en los que el campo de los dipolos magnéticos *no* es pequeño. Por lo tanto, deberemos estudiar, igual que hicimos en el caso de la polarización eléctrica, los campos magnéticos que la materia imanada produce, tanto en el interior como en el exterior del material.

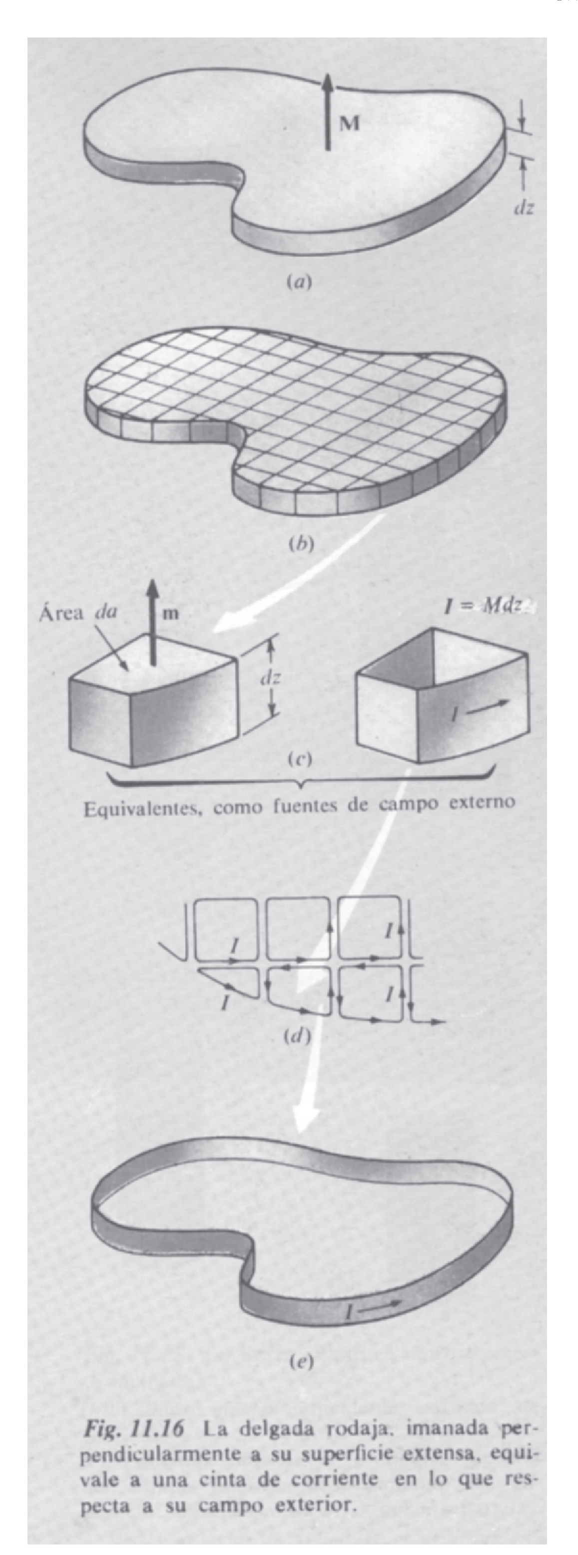


Fig. 11.16 La delgada rodaja, imanada perpendicularmente a su superficie extensa, equivale a una cinta de corriente en lo que respecta a su campo exterior.

11.8 Campo magnético creado por la materia imanada

Un bloque material que contiene, uniformemente distribuidos en todo su volumen, un gran número de dipolos magnéticos atómicos, orientados todos en la misma dirección, se dice que está *uniformemente imanado*. El vector imanación **M** sencillamente vale el producto del número de dipolos orientados por unidad de volumen por el momento magnético **m** de cada dipolo. No nos preocupamos de cómo se mantiene la orientación de estos dipolos. Puede ser debido a un campo aplicado producido por otra fuente, pero esto no nos importa. Lo que queremos estudiar es, solamente, el campo creado por los propios dipolos.

Consideremos primero una rodaja de material, de espesor dz, cortada perpendicularmente a la dirección de imanación, como se indica en la Fig. 11.16*a*. Esta rodaja se puede subdividir en pequeñas porciones. Cada una de estas pequeñas porciones o celdillas, que tiene una superficie superior de área da, posee un momento dipolar total que vale $M\,da\,dz$, puesto que M es el momento dipolar por unidad de volumen (Fig. 11.16*b*). El campo magnético que produce esta celdilla en puntos *distantes* — o sea, distantes respecto al tamaño de la celdilla — es exactamente el mismo que el de cualquier dipolo del mismo momento. Podríamos construir un dipolo, de esta intensidad, doblando una cinta conductora, de ancho dz, en la forma de la celdilla, y mandando a lo largo de la espira una corriente $I = M\,dz$

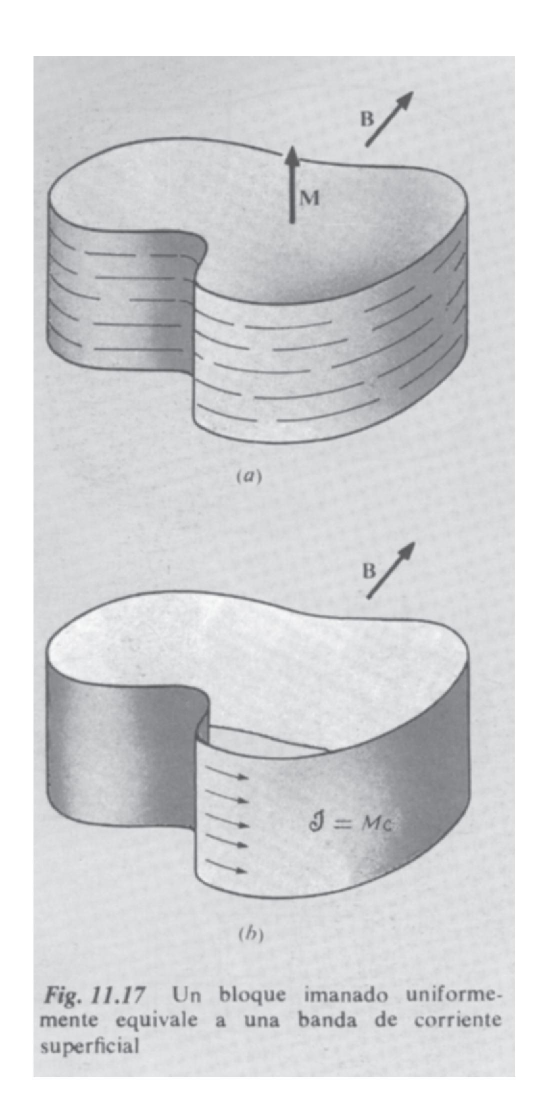


Fig. 11.17 Un bloque imanado uniformemente equivale a una banda de corriente superficial

(Fig. 11.16*c*). Esto dará a la espira un momento dipolar:

$$m = I \times \text{área} = M\ dz\ da = M\ da\ dz \tag{41}$$

que es el mismo que el de la celdilla.

Sustituyamos cada celdilla de la rodaja, por una espira recorrida por aquella corriente, como se indica en la Fig. 11.16*d*. La corriente es la misma en todos ellos, y por lo tanto, en cualquier entorno interior, encontraremos corrientes iguales y de sentido contrario, equivalente a corriente nula. Nuestro conjunto de espiras, por lo tanto, equivale a una cinta única en el contorno, con una corriente $M\ dz$ (Fig. 11.16*e*). Ahora bien, estas espiras se pueden hacer muy pequeñas, en tanto la subdivisión no alcance el tamaño molecular. Debe ser lo suficiente grande para que la imanación no varíe apreciablemente de una celdilla a otra. Dentro de esta limitación, podemos afirmar que el campo en cualquier punto *exterior*, incluso próximo a la rodaja, es el mismo que el de la cinta recorrida por la citada corriente.

Solamente nos queda reconstruir un bloque a partir de tales láminas, o rodajas, como en la Fig. 11.17*a*. El bloque entero es equivalente a la cinta ancha de la Fig. 11.17*b* a lo largo de la cual circula una corriente $M\ dz$ en cada franja dz, o dicho más simplemente, una corriente superficial de densidad $\mathcal{J}$, en A/m, dada por

$$\mathcal{J} = M \tag{42}$$

El campo magnético **B**, en cualquier punto fuera del bloque imanado de la Fig. 11.17*a*, e incluso próximo al bloque, mientras no nos acerquemos a distancias moleculares, es el mismo que el campo **B**′ en el punto correspondiente en las proximidades de la cinta ancha de la Figura 11.17*b*.

¿Pero, y el campo en el interior del bloque imanado? Aquí nos enfrentaremos con una cuestión parecida a la que ya encontramos en el Cap. 10. En el interior de la materia, el campo magnético no es uniforme si lo observamos a escala atómica, a la que hemos llamado « microscópica ». Varía bruscamente, tanto en módulo como en dirección, entre puntos separados solamente por unos angstrom. Este campo *microscópico* **B** es un campo magnético en el vacío, pues desde el punto de vista microscópico, como ya se subrayó en el Cap. 10, la materia es una agrupación de partículas y cargas eléctricas en un espacio vacío. El único campo a gran escala que puede definirse dentro de la materia, es el promedio espacial del campo microscópico.

Debido a la ausencia de efectos atribuibles a la carga magnética, creemos que el campo magnético microscópico satisface en sí a div **B** = = 0. Si esto es cierto, puede hallarse directamente que, el promedio espacial del campo microscópico interno, en nuestro bloque, es el mismo que el campo **B**′ en el interior de la cinta de corriente equivalente.

Para demostrarlo, consideremos la barra larga uniformemente imanada, paralelamente a su longitud, como se indica en la Fig. 11.18*a*. Ya hemos dicho que el campo en el exterior sería el mismo que el del cilindro recorrido por una corriente (prácticamente equivalente a un solenoide de una sola capa) representado en la Fig. 10.18*b*. S en la Fig. 11.18*a*. indica una superficie cerrada que incluye una porción de S_1 al pasar por el interior de la varilla. Puesto que div $\mathbf{B} = 0$ para el campo interno microscópico, así como para el exterior, div $\mathbf{B}$ es nula en todas partes del volumen limitado por S. Se sigue luego que, por el teorema de Gauss, la integral de superficie de $\mathbf{B}$ extendida sobre S debe ser nula. La integral de superficie de $\mathbf{B}'$ extendida sobre la superficie cerrada S' debe ser también nula. Sobre las porciones de S y S' *exteriores* a los cilindros, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$ son idénticos. Por lo tanto la integral de superficie de $\mathbf{B}$ extendida al disco interno S_1 debe ser igual a la integral de $\mathbf{B}'$ extendida al disco interno S'_1. Esto debe cumplirse, asimismo, para cualquier par de discos paralelos próximos tales como S_2, S_3, etc., indicados en la Fig. 11-18*c*, a causa de que el campo en el exterior del cilindro en sus proximidades puede despreciarse por pequeño, así que las partes exteriores no cambian nada. Tomando ahora la integral de superficie sobre una serie de planos igualmente distanciados, que es una manera correcta de medir el promedio de $\mathbf{B}$ en el volumen en esta región, pues toma imparcialmente las muestras de todos los elementos de volumen. Se deduce que la media espacial del campo microscópico $\mathbf{B}$ dentro de la varilla imanada es igual al campo $\mathbf{B}'$ en el interior de la corriente superficial cilíndrica de la Fig. 11.18*b*.

Es instructivo comparar los razonamientos que hemos desarrollado en nuestro análisis de las correspondientes cuestiones en el Capítulo 10. La Fig. 11.19 nos lo muestra por separado. Veremos que discurren lógicamente paralelos, pero que en cada punto hay una diferencia que refleja la asimetría esencial encontrada en la observación de que las *cargas eléctricas* son las fuentes de *campos eléctricos*, mientras que las *cargas eléctricas en movimiento* son las fuentes de los *campos magnéticos*. Por ejemplo, en los razonamientos acerca del valor medio del campo microscópico, la clave del problema en el caso eléctrico es el supuesto que rot $\mathbf{E} = 0$, para el campo eléctrico microscópico. En el caso magnético, la clave es el suponer que div $\mathbf{B} = 0$ para el campo magnético microscópico.

Si la imanación $\mathbf{M}$, en el interior del volumen de cierto material, no es uniforme, sino que varía con la posición tal que $\mathbf{M}(x, y, z)$, la distribución de corriente equivalente viene dada por

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M} \tag{43}$$

Veamos cómo llegamos a esto en un caso determinado. Supongamos que hay una imanación en la dirección z, que se hace más intensa a medida que nos desplazamos a lo largo del eje y. Esto está representado en la Fig. 11.20*a*, que nos muestra una pequeña región del material subdividida en pequeños bloques. Se supone que los bloques

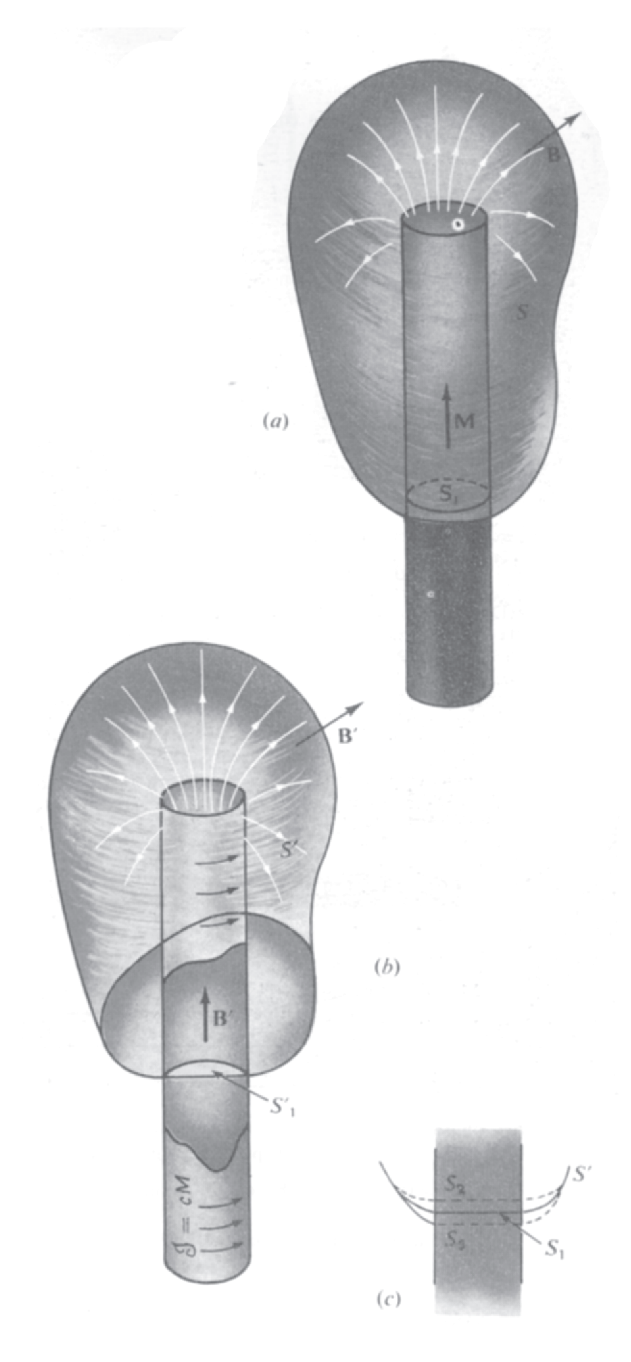
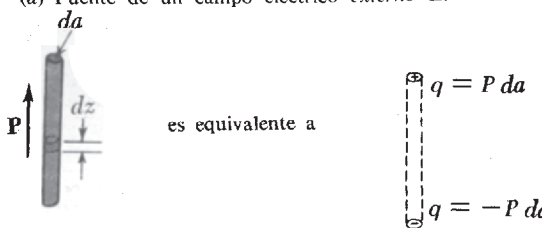
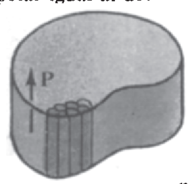


Fig. 11.18 (*a*) Barra cilíndrica uniformemente imanada.
(*b*) Cilindro hueco equivalente, o funda, de corriente.
(*c*) Podemos obtener el promedio espacial del campo microscópico, tomando las superficies paralelas, S_1, S_2,.., poco separadas.

(*a*) Fuente de un campo eléctrico *externo* **E**.

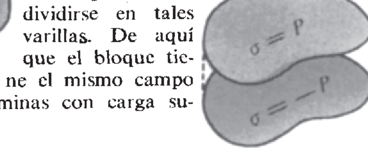


debido a que una porción de materia polarizada de volumen $da \cdot dz$ tiene un momento dipolar igual al de:



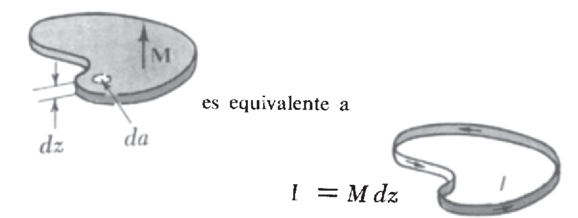
Un bloque polarizado uniformemente puede subdividirse en tales varillas. De aquí que el bloque tiene el mismo campo exterior que dos láminas con carga superficial

$$\sigma = P_n$$



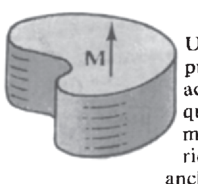
(De manera más general, para polarización no uniforme, la materia polarizada equivale a una distribución de carga $\rho = -\text{div}\ \mathbf{P}$).

(*b*) Fuente de un campo magnéntico *externo* **B**.



debido a que una porción de materia imanada, de volumen $da \cdot dz$ tiene un momento dipolar igual al de:



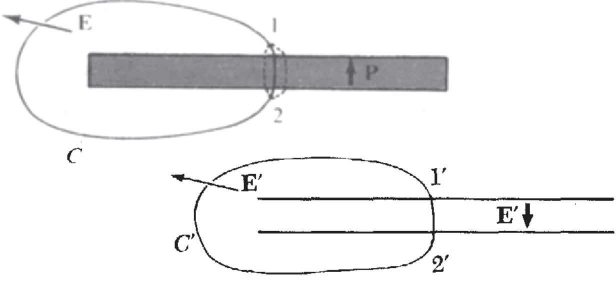


Un bloque imanado uniformemente puede dividirse en tales capas. De aquí que el bloque tenga el mismo campo exterior que la cinta ancha con una corriente superficial $\mathcal{J} = M$.

(De manera más general, para imanación no uniforme, la materia imanada equivale a una distribución de corriente $\mathbf{J} = \text{rot}\ \mathbf{M}$).

PRUEBA DE QUE LA EQUIVALENCIA SE EXTIENDE AL PROMEDIO ESPACIAL DE LOS CAMPOS INTERNOS

Consideremos una lámina ancha, delgada uniformemente polarizada y sus capas de carga superficial equivalente. Cerca



del punto medio el campo exterior es despreciable y $\mathbf{E}'$ es uniforme. Si $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para el campo interno, entonces $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Pero $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ en el camino exterior. De aquí $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{1'}^{2'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}'$ para todos los caminos internos.

CONCLUSIÓN

$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}'$; el promedio espacial del campo eléctrico interno es igual al campo $\mathbf{E}'$ que se produciría en un punto en el vacío por la distribución de carga equivalente descrita antes (junto con todas las fuentes exteriores).

Consideremos una columna larga uniformemente imanada y su cilindro equivalente de corriente superficial. Cerca del punto medio el campo exterior es despreciable y $\mathbf{B}'$ es uniforme. Si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, para el campo interno, entonces $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$.

Pero $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ en la superficie exterior a la columna. De aquí $\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1'} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{a}'$ sobre cualquier porción de superficie interior como S_1, S_2, etc.

Fig. 11.19 Comparación de los casos eléctrico (*a*) y magnético (*b*).

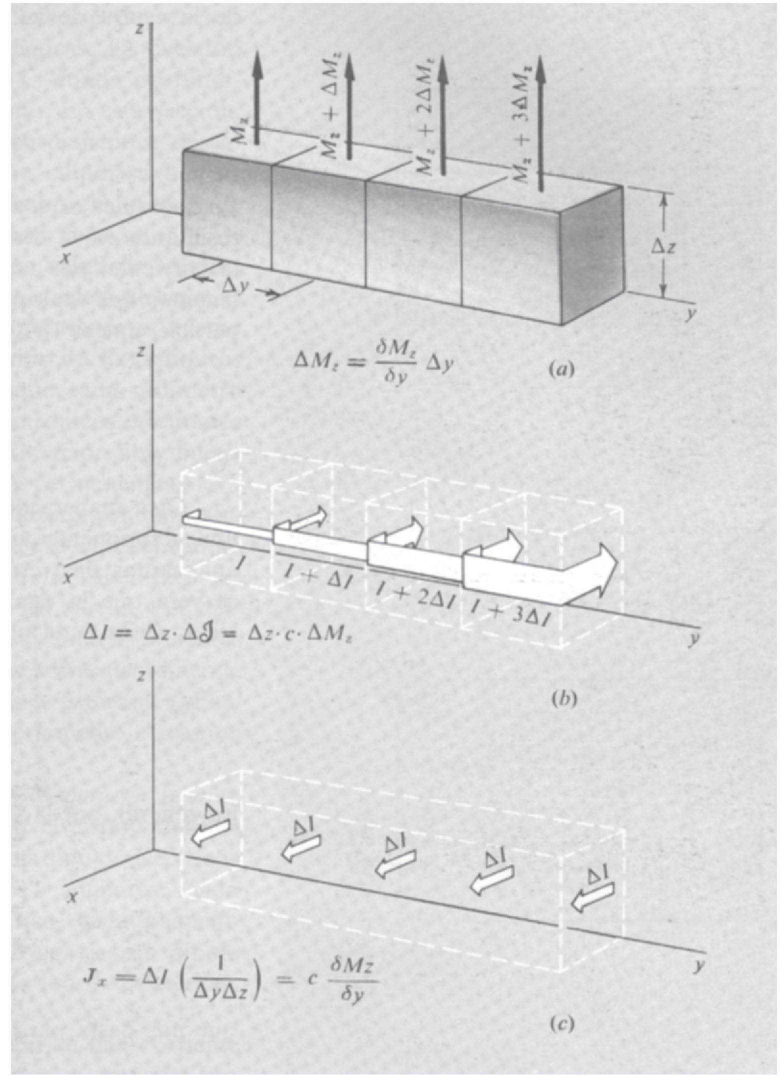


Fig. 11.20 La imanación no uniforme es equivalente a una densidad cúbica de corriente.

son tan pequeños para que pueda considerarse que la imanación, dentro de un mismo bloque, es uniforme. De esta manera podemos reemplazar cada bloque con una cinta recorrida por una corriente, con una densidad superficial $\mathcal{J} = M_z$. La corriente I que circula por tal cinta, si el bloque tiene altura Δz, es $\mathcal{J}\ \Delta z$, o $M_z \Delta z$. Ahora bien, cada cinta tiene un poco más de densidad de corriente que la

que tiene a su izquierda. La corriente en cada espira es mayor que la de la espira de su izquierda en

$$\Delta I = \Delta z \, \Delta M_z = \Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \qquad (44)$$

En cualquier cara de unión de esta fila de bloques, hay una corriente resultante en la dirección x de valor ΔI (Fig. 11.20*c*). Para obtener la corriente, por unidad de superficie, que circula en la dirección x, tenemos que multiplicar por el número de bloques por unidad de superficie, que es $1/(\Delta y \Delta z)$. Así

$$J_x = \Delta I \left(\frac{1}{\Delta y \, \Delta z} \right) = \frac{\partial M_z}{\partial y} \qquad (45)$$

Otra manera de obtener una corriente en la dirección x es tener una componente y de la imanación que varíe en la dirección z. Si analizamos bien este caso, usando una columna vertical de bloques, se verá que la densidad de la corriente resultante dirigida según el eje x, viene dada por

$$J_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \qquad (46)$$

En general, por la superposición de estos dos casos,

$$J_x = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = (\text{rot } \mathbf{M})_x \qquad (47)$$

que nos basta para establecer la Ec. 43.

11.9 Campo de un imán permanente

Las esferas y barras uniformemente polarizadas, de las que hablamos en el Cap. 10, pueden verse a menudo, incluso en el laboratorio. La polarización eléctrica congelada en el interior puede ocurrir en algunas substancias, aunque generalmente está enmascarada por cierta acumulación de carga libre. Para lograr la Fig. 11.3*a*, para indicar cómo se *vería* el campo de una barra polarizada, fue necesario usar dos discos cargados. Por otra parte, los cuerpos con polarización

magnética permanente, es decir, con *imanación* permanente, son conocidos y útiles. Los imanes permanentes pueden hacerse de muchas aleaciones y compuestos de substancias ferromagnéticas. La cuestión de tal posibilidad la dejaremos para la Sec. 11.11, donde profundizaremos brevemente en la física del ferromagnetismo. En esta sección, dando por supuesta la existencia de los imanes permanentes, deseamos estudiar el campo magnético **B** de una barra cilíndrica uniformemente imanada, y lo compararemos con el campo eléctrico **E** de una barra, uniformemente polarizada, de la misma forma.

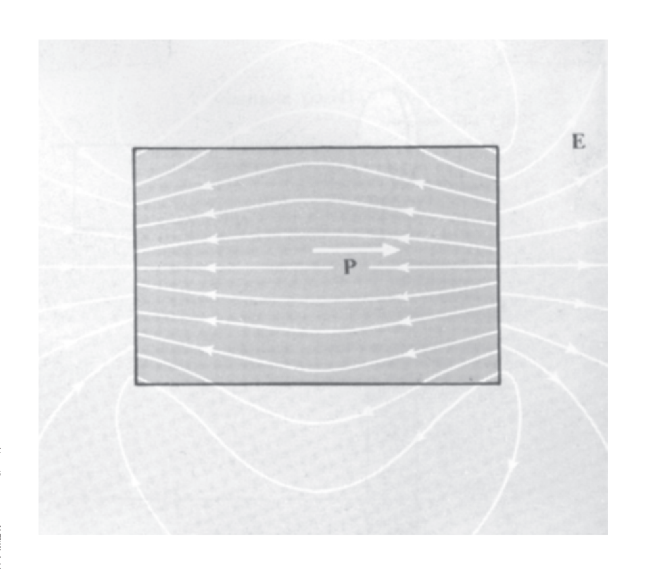
La Fig. 11.21, representa a cada uno de estos cilindros sólidos, en sección recta. En cada caso, la polarización es paralela al eje y es uniforme. O sea, la polarización **P** y la imanación **M** tienen el mismo módulo, dirección y sentido en todo punto interior de los cilindros respectivos. En el caso magnético, esto implica que cada milímetro cúbico del imán tenga el mismo número de spin electrónicos orientados en la misma dirección. (Puede obtenerse una aproximación muy buena de esto con los modernos materiales para imanes permanentes.)

Por campo en el interior del cilindro queremos decir, por supuesto, el campo macroscópico, definido como el promedio espacial del campo microscópico. Establecido esto, representamos en la Fig. 11.21 las líneas de campo, en el interior y en el exterior de las barras. Por descontado, estas barras no deben estar muy cerca una de otra; ponemos juntos los diagramas, sólo para poderlos comparar convenientemente. Cada barra está aislada en un espacio libre de campos externos. (¿Cuál de los dos podemos creer que modificaría más seriamente el campo del otro, si *estuvieran* cercanos?)

En el exterior de las barras, los campos **E** y **B** *parecen iguales*. En realidad las líneas de campo siguen exactamente el mismo camino. Esto no debe sorprendernos si recordamos que los dipolos eléctricos y los dipolos magnéticos tienen « campos lejanos » similares. Cada pequeño trozo de un imán es un dipolo magnético, cada pequeño trozo de barra polarizada (a veces llamada *«electrete»*) es un dipolo eléctrico, y el campo exterior es la superposición de todos sus campos lejanos.

El campo **B**, dentro y fuera, es el mismo que el de una corriente en una superficie cilíndrica. En realidad, si bobinamos muy uniformemente, sobre un cilindro de cartón, un solenoide de hilo fino y lo conectamos a una batería, reproduciremos el campo exterior e interior, **B**, de un imán permanente. (La bobina se calentaría, la batería se descargaría; los spin electrónicos nos proporcionan la corriente gratis y sin rozamiento.) El campo eléctrico **E**, tanto en el interior como en el exterior, de la barra polarizada, es el de dos discos cargados, uno en cada extremo del cilindro.

Obsérvese que los campos *interiores* **E** y **B** son esencialmente distintos en forma: **B** está dirigido hacia la derecha, es continuo en los extremos del cilindro y sufre un brusco cambio de dirección en la superficie del cilindro. **E** está dirigido hacia la izquierda, pasa a través de la superficie del cilindro como si ésta no existiera, pero es discontinuo en las superficies extremas. Estas discrepancias son con-



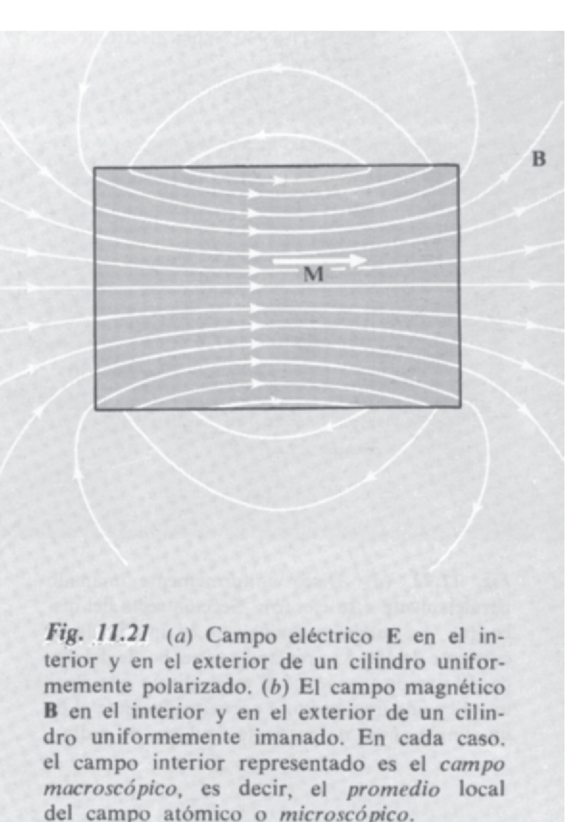


Fig. 11.21 (*a*) Campo eléctrico **E** en el interior y en el exterior de un cilindro uniformemente polarizado. (*b*) El campo magnético **B** en el interior y en el exterior de un cilindro uniformemente imanado. En cada caso, el campo interior representado es el *campo macroscópico*, es decir, el *promedio* local del campo atómico o *microscópico*.

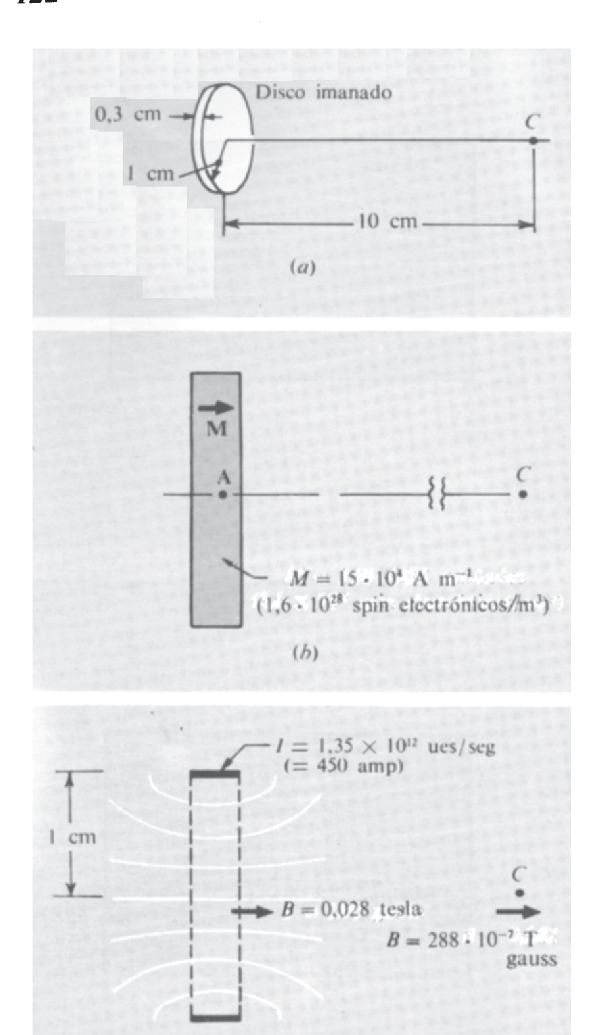


Fig. 11.22 (*a*) Disco uniformemente imanado paralelamente a su eje. (*b*) Sección recta del disco. (*c*) La corriente equivalente es una banda de corriente de 450 A, circulando por el borde del disco. El campo magnético **B** es el mismo que el de un solenoide muy corto, o aproximadamente el de un simple anillo de corriente de 1 cm de radio.

secuencia de las diferencias esenciales entre el « interior » del dipolo eléctrico físico y el « interior » del dipolo magnético físico, como se ve en la Fig. 11.8. Por *físicos* queremos decir los que la naturaleza nos ha dado realmente.

Si sólo nos interesa el campo en el exterior, podríamos usar cualquiera de las dos representaciones para describir el campo de nuestro imán. Podríamos decir que el campo magnético del imán permanente se origina por una capa de carga magnética positiva — una densidad superficial de polos « norte » magnéticos — en la parte derecha extrema del imán, y por una capa de carga magnética negativa, polos « sur » en el otro extremo. Podríamos adoptar una función potencial escalar φ_{mag}, tal que $\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \varphi_{\text{mag}}$. La función potencial φ_{mag} estaría relacionada con las densidades de polos ficticios, como el potencial eléctrico está relacionado a la densidad de carga. La simplicidad del potencial escalar frente al potencial vector es notoria. Además, el potencial escalar magnético puede relacionarse muy fácilmente con las corrientes, que son las fuentes reales de **B**, y así podemos utilizar el potencial escalar sin ningún uso explícito de los polos ficticios. Puede necesitarse este método cuando se trate de diseñar imanes o calcular campos magnéticos.

Sin embargo, debemos abandonar la ficción de los polos magnéticos, si queremos comprender el campo en el interior del material magnético. Que el campo magnético macroscópico dentro de un imán permanente, en un sentido muy real, es igual al campo de la Fig. 11.21*b* más bien que al de la Fig. 11.21*a*, ha sido demostrado experimentalmente desviando partículas cargadas en hierro imanado, así como por los efectos magnéticos sobre neutrones lentos que pasan aún más fácilmente por el interior de la materia.

En la Fig. 11.22*a* se representa un pequeño imán permanente en forma de disco, en el cual la imanación es paralela al eje de simetría. Estamos acostumbrados a ver imanes, por lo general, en forma de barras largas. Sin embargo, es posible construir discos magnéticos con intensidad considerable, empleando ciertos materiales nuevos. La imanación M vale $15 \cdot 10^4$ A · m^{-1}. El momento magnético del electrón vale $0{,}93 \times 10^{-23}$ A · m^2, por lo tanto este valor de M corresponde a $1{,}6 \times 10^{28}$ spin electrónicos alineados, por metro cúbico. El disco es equivalente a una cinta de corriente alrededor de su borde, de densidad superficial $\mathcal{J} = M$. Si la anchura de la cinta es de 0,3 cm, la intensidad de la corriente I vale $0{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot 15 \cdot 10^4 = 450$ ampere —mayor corriente que la que es posible conseguir cortocircuitando una batería de automóvil. El campo **B** en un punto del espacio, incluyendo los puntos interiores del disco, es simplemente el campo debido a la corriente en esta cinta. Por ejemplo, cerca del centro del disco, **B** vale aproximadamente:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{450}{0{,}01} = 280 \cdot 10^{-4} \text{ T} \tag{48}$$

La aproximación consiste en tratar esta banda de corriente de 0,3 cm

de ancho, como si fuera un simple anillo. (En la correspondiente aproximación en el ejemplo eléctrico, considerábamos las láminas de carga grandes comparadas a su separación.) En cuanto al campo en un punto lejano, sería fácil de calcular para el anillo de corriente, pero podríamos también, para un cálculo aproximado, actuar como en el ejemplo eléctrico. Es decir, podríamos hallar el momento magnético total del objeto, y encontrar el campo distante de un dipolo único, con esta intensidad.

11.10 Corrientes libres y el campo H

A menudo es útil distinguir entre corrientes *ligadas* y corrientes *libres*. Las corrientes *ligadas* son corrientes asociadas con los momentos magnéticos atómicos o moleculares incluyendo el momento magnético intrínseco de las partículas con spin. Estas son las espiras de corriente molecular previstas por Ampère, las fuentes de imanación que acabamos de considerar. Las corrientes *libres* son las corrientes de conducción ordinarias, que circulan en caminos macroscópicos; corrientes que pueden iniciarse o detenerse con un interruptor y medirse con un amperímetro.

La densidad de corriente **J** en la Ec. 42 es el promedio macroscópico de las corrientes ligadas, así que desde ahora la llamaremos $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$:

$$J_{\text{ligada}} = \text{rot } \mathbf{M} \tag{49}$$

En una superficie donde **M** es discontinua, tal como la superficie lateral del bloque imanado de la Fig. 11.17, tenemos una densidad superficial de corriente $\mathcal{J}$ que también representa corriente ligada.

Encontramos que **B**, fuera de la materia y, como promedio espacial, dentro de ella, está relacionado con $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$ al igual como lo est a cualquier densidad de corriente. O sea, rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{ligada}}$. Pero esto era en ausencia de corrientes libres. Si las hacemos intervenir, el campo que producen ellas se suma al campo originado por la materia imanada y tenemos

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{ligada}} + \mathbf{J}_{\text{libre}}) = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{total}} \tag{50}$$

Vamos a expresar $\mathbf{J}_{\text{ligada}}$ en función de **M**, por la Ec. 49. Entonces la Ec. 50 se convierte en

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\text{rot } \mathbf{M}) + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{libre}}$$

que puede reagruparse

$$\text{rot } (\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{J}_{\text{libre}} \tag{51}$$

Si ahora *definimos* una función vectorial $\mathbf{H}(x, y, z)$, en cada punto del espacio, por la relación

$$\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M} \tag{52}$$

o bien

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{52)'$$

Podemos escribir la Ec. 51.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{libre}} \tag{53}$$

En otras palabras, el vector $\mu_0\mathbf{H}$, definido por la Ec. 52, está relacionado con la corriente *libre* de la misma manera que **B** está relacionado con la corriente total, *ligada* más *libre*. Sin embargo, el paralelismo no es completo, porque tenemos siempre div $\mathbf{B} = 0$, mientras que nuestra función vectorial **H** no tiene que tener necesariamente divergencia nula.

Esto, seguramente, ha recordado al vector **D** que se introdujo, un poco incongruentemente, en el capítulo pasado. Recordemos que **D** estaba relacionado con la carga libre como **E** lo estaba con la carga total. Aunque casi despreciamos a **D**, el vector **H** es muy útil por una razón práctica, muy fácil de entender. En los sistemas eléctricos, lo que es más fácil de controlar y medir son las diferencias de potencial eléctrico entre los cuerpos, y no las cantidades de carga libre en ellos. Así controlamos directamente el campo eléctrico **E**. **D** está fuera de nuestro control directo, y puesto que no es una cantidad fundamental en ningún sentido, lo que le ocurra no nos preocupa demasiado. En los sistemas magnéticos, lo que podemos medir más fácilmente es precisamente la corriente libre. Las conducimos a través de hilos, las medimos con amperímetros, las canalizamos en caminos bien definidos y aislados, etc. En general, tenemos mucho menor control directo sobre la imanación, y por tanto sobre **B**. Así que el vector auxiliar **H** es útil, aunque **D** no lo sea.

La relación integral equivalente a la Ec. 53 es

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_{\text{libre}} \cdot d\mathbf{a} = I_{\text{libre}} \tag{54}$$

donde I_{libre} es la corriente total encerrada por el camino C. Supongamos que arrollamos una bobina alrededor de una pieza de hierro y mandamos a lo largo de esta bobina una cierta corriente I, que puede medirse conectando un amperímetro en serie con la bobina. Esta es la corriente libre, y es la única corriente libre en el sistema.

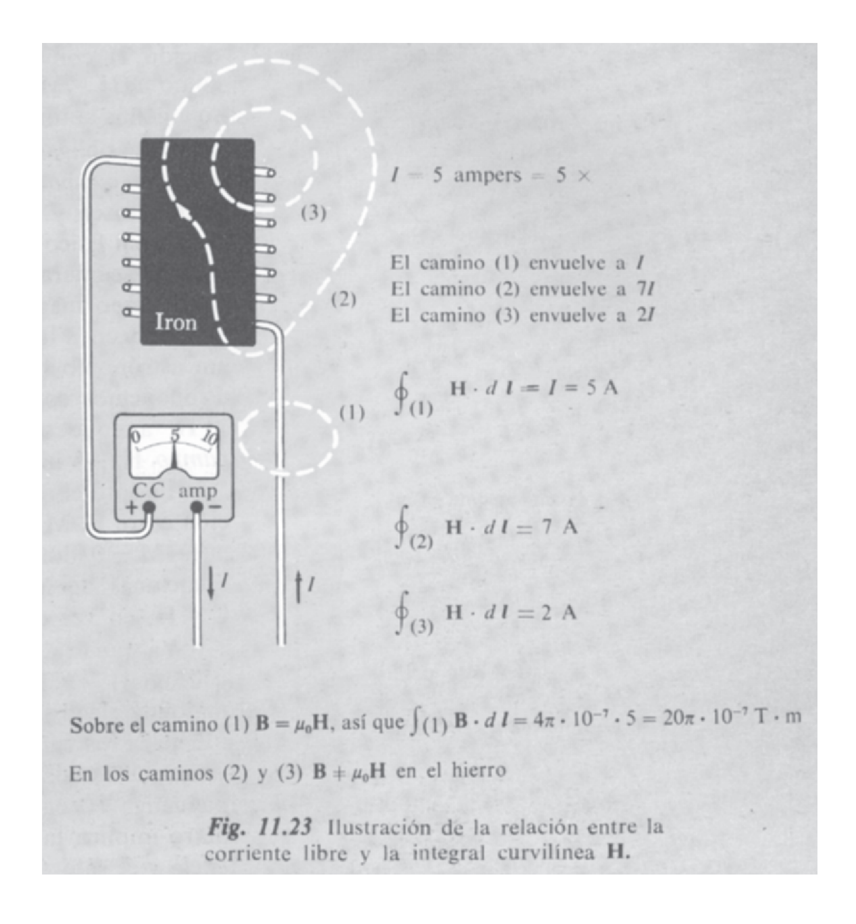


Fig. 11.23 Ilustración de la relación entre la corriente libre y la integral curvilínea **H**.

Por consiguiente, una cosa que seguro que conocemos es la integral curvilínea de **H** a lo largo de un camino cerrado, tanto si el camino va a través del hierro como si no. La integral depende solamente del número de vueltas de nuestra bobina incluidas dentro del camino, y no de la imanación del hierro. La determinación de **M** y **B** en este sistema puede ser bastante complicada. Nos ayuda el haber separado una magnitud que podemos determinar muy fácilmente.

La Fig. 11.23 ilustra esta propiedad de **H** con un ejemplo, y nos recuerda al mismo tiempo las unidades que deberemos usar en un caso práctico. H se mide en A/m.

Consideramos a **B** el vector campo magnético fundamental, puesto que la ausencia de cargas magnéticas, que se discutió en la Sec. 10.2, implica div $\mathbf{B} = 0$ en cualquier parte, incluso en el interior de átomos y moléculas. De div. $B = 0$ se deduce, como vimos ya en la Sec. 11.8, que el campo medio macroscópico en el interior de la materia es **B**, no **H**. Las implicaciones de esto no siempre han sido comprendidas ni consideradas en el pasado. Además **H** tiene la ventaja práctica que

ya hemos explicado. En algunos libros antiguos, se encontrará introducido **H** como campo magnético fundamental. Luego se define **B** como $\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, y se le da el nombre de *inducción magnética.* Incluso algunos autores modernos, que tratan a **B** como campo fundamental, se creen obligados a llamarlo inducción magnética debido a que el nombre *campo magnético* se reservó históricamente para **H**. Esto parece tosco y pedante. Si entramos en un laboratorio y preguntamos a un físico que es lo que hace que las trayectorias de los piones, en una cámara de burbuja, se curven, probablemente responderá « el campo magnético », no la « inducción magnética ». Pocas veces se oye decir a los geofísicos la inducción magnética de la tierra o que un astrónomo hable acerca de la inducción magnética de la galaxia. Proponemos continuar llamando a **B**, campo magnético. En cuanto a **H**, aunque se han propuesto otros nombres, lo llamaremos «*el campo* **H**», o incluso, «*el campo magnético* **H**».

Es sólo el nombre lo que nos preocupa, no los símbolos. La relación entre **B**, **M** y **H** es la indicada en la Ec. 52. En el vacío $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, pues $\mathbf{M} = 0$ donde no hay materia. A menudo se encontrarán las ecuaciones de Maxwell, para los campos en el vacío, escritas con **E** y **H**, en vez de con **E** y **B**.

Ya que $\mathbf{J}_{\text{libre}}$ está expresada en A/m², la unidad de **H** es A/m. En el vacío $\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B}$. Cuando se usan unidades SI en la descripción de una onda electromagnética, se acostumbra a usar **H** y **E**, mejor que **B** y **E**, para los campos magnético y eléctrico. Para la onda plana en el vacío que estudiamos en la Sección 9.4 la relación entre la amplitud magnética H_0 en amperes/metro y la amplitud eléctrica E_0 en volts/metro implica la constante $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ que tiene las dimensiones de resistencia y el valor aproximado de 377 ohms. Para su valor exacto véase el Apéndice E. Encontramos esta constante antes en la Sección 9.6, donde aparecía en la expresión para la densidad de potencia en la onda plana, Ec. 28. La condición que corresponde a E_0 y B_0, establecida en unidades CGS por la Ec. 20 en la Sección 9.4, se convierte en unidades SI en

$$E_0(\text{volts/metro}) = H_0(\text{amperes/metro}) \cdot 377 \text{ ohms} \tag{55}$$

Esto proporciona un sistema de unidades conveniente para tratar con campos electromagnéticos en el vacío cuyas fuentes sean corrientes y voltajes alternos macroscópicos. Pero recordemos que el campo magnético básico *dentro* de la materia es **B**, no **H** como hallamos en la última sección. Esto no se debe a una mera definición, sino que es consecuencia de la ausencia de cargas magnéticas.

En la Fig. 11.24 se expresa la relación de **H** con **B** y **M** en los dos sistemas de unidades. Estas relaciones se cumplen tanto si **M** es proporcional a **B** como si no. Sin embargo, si **M** es proporcional a **B**, también es proporcional a **H**. En realidad, la tradicional definición dada en la Ec. 39 de susceptibilidad magnética de volumen χ_m no es la preferida

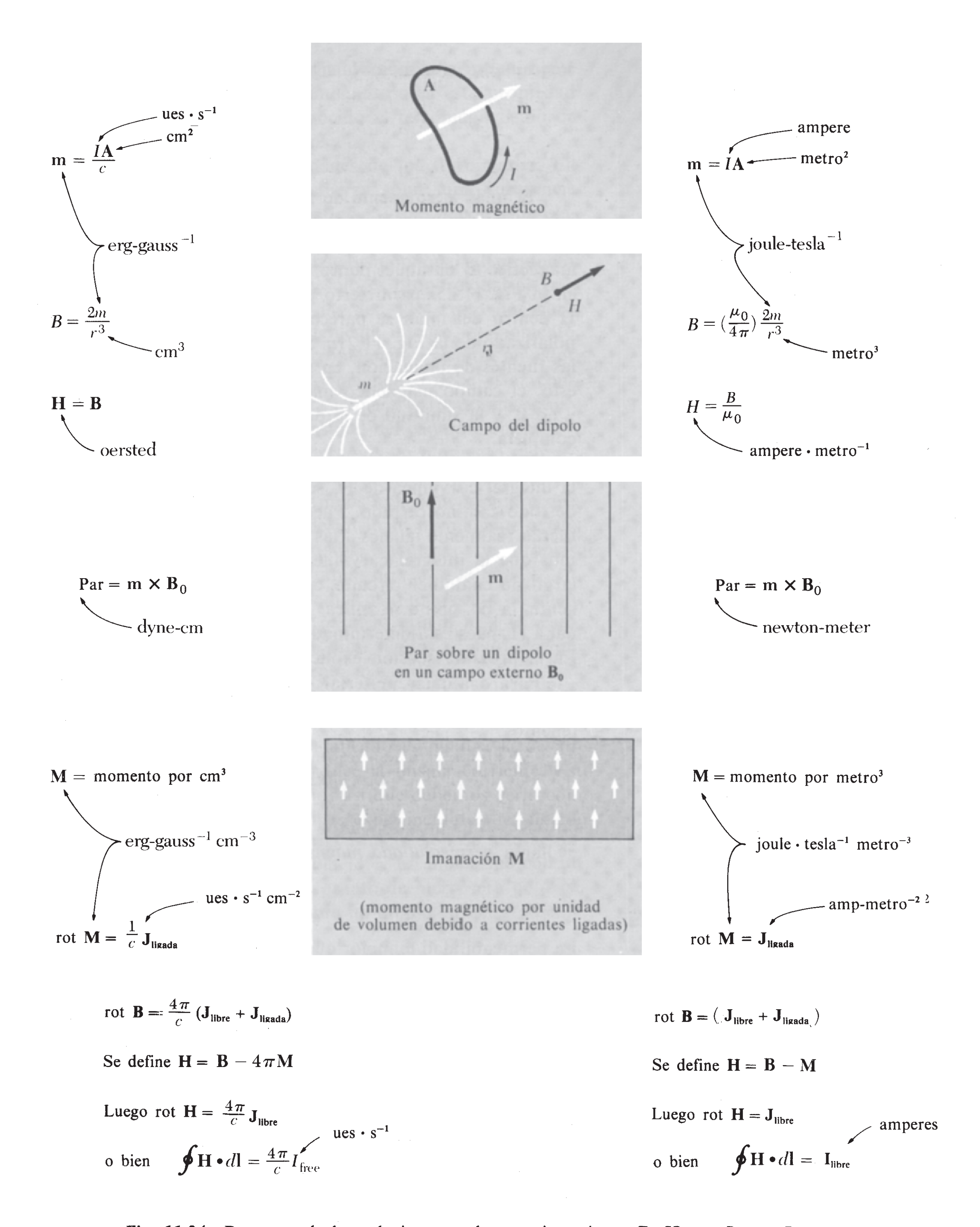


Fig. 11.24 Resumen de las relaciones en las que intervienen **B**, **H**, **m**, $\mathbf{J}_{libre}$ y $\mathbf{J}_{ligada}$.

lógicamente, sino mejor la siguiente:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{56}$$

El imán permanente de la Fig. 11.21*b* es un ejemplo instructivo de la relación entre **H**, **B** y **M**. Para obtener **H** en un punto interior del material imanado tenemos que sumar vectorialmente al campo magnético **B** en aquel punto, el vector $-\mu_0\mathbf{M}$. Esto está representado en la Fig. 11.25, para cierto punto dado **P**. Resulta que las líneas de **H** dentro del imán se parecen a las líneas de **E** dentro del cilindro polarizado de la Fig. 11.21*a*. Si los polos magnéticos fuesen realmente las fuentes de imanación, en vez de las corrientes eléctricas, ocurriría esto, el campo magnético macroscópico dentro del material sería **H** y no **B**, y la similitud de la polarización magnética y la eléctrica sería completa.

En el imán permanente no hay corrientes libres. En consecuencia, la integral curvilínea de **H**, según la Ec. 54, debe ser nula a lo largo de todo camino cerrado. Puede verse que sería así si las líneas de **H** fueran realmente iguales a las líneas de **E** en la Fig. 11.21*a*, pues sabemos que la integral curvilínea del campo electrostático es nula a lo largo de cualquier circuito cerrado. En el ejemplo del imán permanente, la Ec. 56 no se aplica. El vector imanación **M** no es proporcional a **H**, pues está determinado por el tratamiento previo del material. En la próxima sección explicaremos cómo puede hacerse esto.

Para cualquier material en el que **M** sea proporcional a **H**, de manera que se aplique la Ec. 56 además de la relación básica, Ec. 52, tenemos:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = (1 + \chi_m)\mathbf{H} \tag{57}$$

Entonces **B** es proporcional a **H**. El factor de proporcionalidad $(1 + \chi_m)$ se llama *permeabilidad magnética* y se designa habitualmente por μ:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \tag{58}$$

La permeabilidad μ, mejor que la susceptibilidad, se usa por lo general para describir el ferromagnetismo.

11.11 Ferromagnetismo

El ferromagnetismo ha servido y asombrado al hombre durante mucho tiempo. La *piedra imán* (magnetita) se conoció en la antigüedad, y la influencia del hierro en la historia, en forma de brújula, fue quizá secundaria solamente a la del hierro en forma de espadas. Durante

casi un siglo, nuestra tecnología eléctrica ha dependido principalmente de la circunstancia de que un metal abundante posea esta propiedad particular. Sin embargo, sólo se ha conocido el ferromagnetismo de una manera completa en los últimos años.

Ya hemos descrito algunas propiedades de los ferroimanes. En un campo magnético muy intenso, la fuerza sobre una substancia ferromagnética es en una dirección y sentido tal que tiende a desplazarla hacia los campos más intensos, como en las substancias paramagnéticas, pero en lugar de ser la fuerza proporcional al producto del campo **B** por su gradiente, la fuerza sólo es proporcional al gradiente. Como ya señalamos al final de las Sec. 11.4, esto nos hace suponer que si el campo es lo suficuentemente intenso, el momento magnético adquirido por la substancia ferromagnética alcanza un valor límite. La dirección del vector momento magnético debe estar controlada por el campo, puesto que de otra manera la fuerza no actuaría siempre hacia la dirección de la intensidad del campo creciente.

En los imanes « permanentes » observamos un momento magnético, incluso en ausencia de cualquier campo exterior, y mantiene su módulo y dirección aun cuando haya campos aplicados, siempre que éstos no sean muy intensos. El campo de un imán permanente existe siempre, y se puede preguntar si no podría mantener sus propias fuentes alineadas. De todos modos, si miramos de nuevo la Fig. 11.21*b* o la Fig. 11.25, aceptando la seguridad de que esto representa un imán real, se verá que generalmente **M** no es paralelo ni a **B** ni a **H**. Esto sugiere que los dipolos magnéticos deben estar fijados en su dirección por algo distinto de las fuerzas puramente magnéticas.

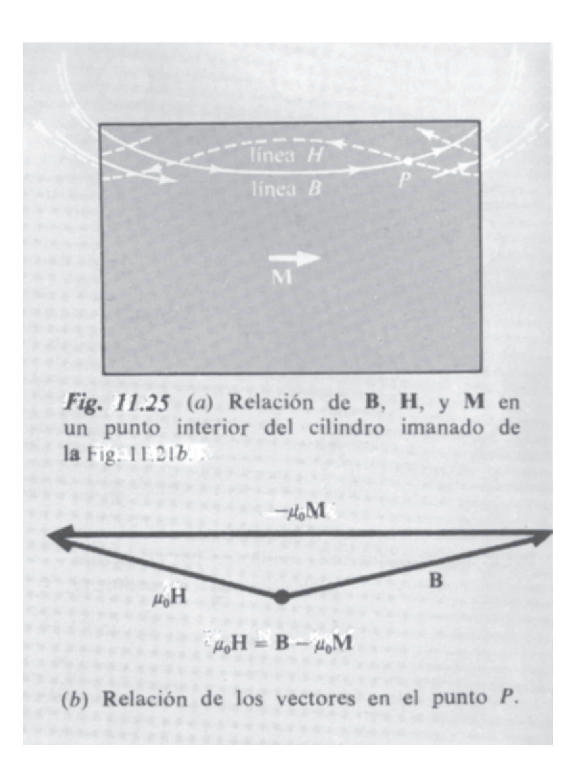


Fig. 11.25 (*a*) Relación de **B**, **H**, y **M** en un punto interior del cilindro imanado de la Fig. 11.21*b*.

(*b*) Relación de los vectores en el punto *P*.

La imanación observada en las substancias ferromagnéticas es mucho mayor que la usual en las substancias paramagnéticas. Los imanes permanentes tienen campos que son normalmente del orden de unas décimas de tesla. Una magnitud más característica es el valor límite de la imanación, el momento magnético por unidad de volumen, que el material adquiere en un campo muy intenso. A la que se llama imanación de *saturación*. Podemos deducir la imanación de saturación del hierro, a partir de los datos de la tabla 11.1. En un campo con un gradiente de 17 T/m, la fuerza sobre 1 gramo de hierro era de 4 N. De la Ec. 18, que relaciona la fuerza sobre un dipolo con el gradiente del campo, encontramos

$$\begin{aligned} m &= \frac{F}{dB/dz} = \frac{4\ \text{N}}{17\ \text{T/m}} = 0{,}235\ \text{Am}^2,\ \text{para 1 gramo} \\ &= 235\ \text{Am}^2\ \text{para 1 kg.} \end{aligned} \tag{59}$$

Para hallar el momento por metro cúbico multiplicamos m por la densidad del hierro, 7800 kg/m³. La imanación M es pues

$$M = 235 \times 7800 = 1830 \cdot 10^3\ \text{A/m} \tag{60}$$

Es más interesante ver a cuántos momentos de spin electronico corresponde esta imanación. Dividiendo M por el momento del electrón, dado en la Fig. 11.14, $0{,}93 \times 10^{-23}$ Am^2, hallamos aproximadamente 2×10^{29} momentos de spin por metro cúbico. Ahora bien, 1 m^3 de hierro contiene aproximadamente unos 10^{29} átomos. La imanación límite parece corresponder a dos spin alineados por átomo. Puesto que la mayor parte de los electrones del átomo están apareados y no tienen ningún efecto magnético, esto nos indica que estamos tratando con orientaciones substancialmente completas de estos pocos spin electrónicos que, en la estructura atómica, tienen libertad de orientarse en la misma dirección.

Un hecho muy sugestivo del ferromagnetismo es éste: Una substancia ferromagnética dada, por ejemplo, hierro puro, pierde sus propiedades ferromagnéticas, de forma bastante brusca, si se calienta a cierta temperatura. El hierro puro, a temperatura superior a 770° C se comporta como una substancia paramagnética. Enfriado por debajo de 770° C recobra inmediatamente sus propiedades ferromagnéticas. Esta temperatura de transición, llamada punto de Curie, puesto que fue Pierre Curie uno de sus primeros investigadores, es distinta para diferentes substancias. Para el níquel puro vale 358° C.

¿Qué es este « comportamiento ferromagnético » que distingue netamente entre el hierro por debajo de 770° C y el hierro por encima de 770° C y del cobre a la misma temperatura? Es la orientación *espontánea* en una dirección de los momentos magnéticos atómicos, lo que implica la orientación de los ejes de los spin de ciertos electrones de cada átomo de hierro. Por *espontáneo* queremos decir que no ha habido ningún campo externo. En una región del hierro lo suficientemente grande como para contener millones de átomos, los spin y los momentos magnéticos de casi todos los átomos están orientados en la misma dirección. Muy por debajo del punto de Curie (a temperatura ambiente, por ejemplo, en el hierro) la orientación es casi perfecta. Si pudiéramos mirar, mágicamente, el interior de un cristal de hierro metálico y ver los momentos magnéticos elementales como vectores, con sus puntas de flecha, podríamos ver algo parecido a la Fig. 11.26.

Fig. 11.26 Orientación ordenada de los spin en una pequeña región de un cristal de hierro. Cada flecha representa el momento magnético de un átomo de hierro.

Es apenas sorprendente que una temperatura elevada destruya esta disposición nítida. La energía térmica, por decirlo así, es la enemiga del orden. Un cristal, una disposición ordenada de átomos, pasa a líquido, una disposición mucho menos ordenada, a una temperatura exactamente determinada, el punto de fusión. El punto de fusión, como el punto de Curie, es diferente para las distintas substancias. Nos concentramos en el estado ordenado. Hay dos o tres preguntas evidentes:

Pregunta 1: ¿Qué hace que los spin se alineen y se mantengan alineados?

Pregunta 2: ¿Si no hay ningún campo externo presente, cómo pueden los spin elegir una dirección y no otra? ¿Por qué no seña-

laban todos los momentos, en la Fig. 11.26, hacia abajo, o hacia la derecha, o hacia la izquierda?

Pregunta 3: ¿Si todos los momentos atómicos están alineados, por qué no es un potente imán un trozo de hierro cualquiera a la temperatura ambiente?

Las respuestas a estas tres preguntas, nos ayudarán a comprender, de una manera general al menos, el comportamiento de las substancias ferromagnéticas, cuando se les aplica un campo externo, ni muy intenso ni muy débil. Esto incluye una gran variedad de fenómenos que aun no hemos descrito.

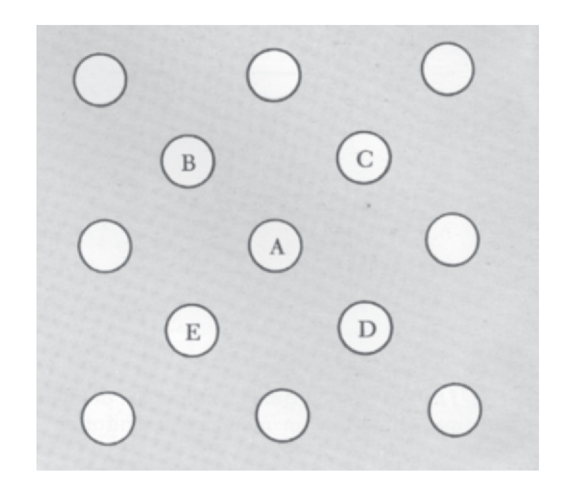


Fig. 11.27 Un átomo A y sus vecinos más próximos en la red cristalina. (Por supuesto que la red cristalina es tridimensional).

Respuesta 1: Por algún motivo, relacionado con la mecánica cuántica de la estructura del átomo de hierro, es energicamente favorable que los spin de los átomos adyacentes del hierro sean paralelos. Esto *no* se debe a su interacción magnética. Es un efecto más intenso, y además, favorece a los spin paralelos, tanto así ↑↑ como así →→ (las interacciones dipolares no actúan de este modo — véase el Problema 10.17). Ahora bien, sin un átomo *A* (Fig. 11.27) desea tener su spin en la misma dirección que la de los átomos vecinos, los átomos vecinos, los átomos *B*, *C*, *D* y *E*. y cada uno de *ellos* prefiere tener su spin en la misma dirección que la de los spin de *sus* vecinos, incluyendo el átomo *A*, puede fácilmente imaginarse que si aquí se desarrolla alguna vez una mayoría local, habrá una fuente tendencia a « hacerla unánime », y la novedad se extenderá.

Respuesta 2: El azar determina de algún modo cuál de las distintas direcciones equivalentes del cristal se escoge, si empezamos en un estado desordenado — como, por ejemplo, si el hierro se enfría por debajo de su punto de Curie sin ningún campo externo aplicado. El hierro puro consta de cristales cúbicos centrados. Cada átomo tiene ocho vecinos más próximos. La simetría del entorno se impone en cada aspecto físico del átomo, incluyendo el acoplamiento entre spins. En el hierro los ejes cúbicos son los ejes de más fácil imanación. Es decir, los spins prefieren señalar en la misma dirección, pero la prefieren más si esta dirección es una de las seis direcciones siguientes, $\pm \hat{\mathbf{x}}$, $\pm \hat{\mathbf{y}}$, $\pm \hat{\mathbf{z}}$ (Fig. 11.28). Esto es importante, pues significa que los spin no pueden girar fácilmente *en masa*, de una de estas direcciones fáciles a una equivalente perpendicular. Para hacerlo, debería pasar por orientaciones *menos* favorables en el trayecto. Precisamente, es este inconveniente lo que hace posible los imanes permanentes.

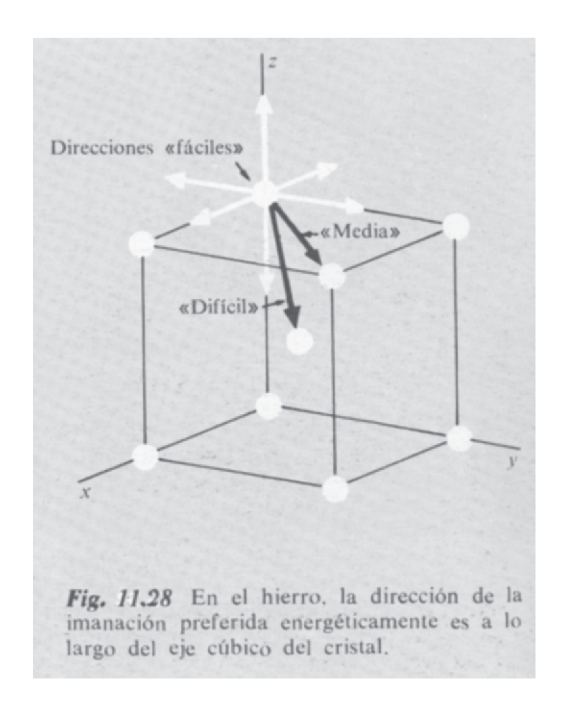


Fig. 11.28 En el hierro, la dirección de la imanación preferida energéticamente es a lo largo del eje cúbico del cristal.

Respuesta 3: Una pieza de hierro, aparentemente no imanada, está compuesta realmente de muchos *dominios*, en cada uno de los cuales los spin están alineados en una dirección, que es diferente de la de los dominios vecinos. En promedio en toda la pieza de hierro « no imanado », están igualmente representadas todas las direcciones, así que no resulta ningún campo magnético medible. Incluso en un cristal único están presentes los dominios. Los dominios son normalmente microscópicos, en el sentido corriente de la palabra. En realidad

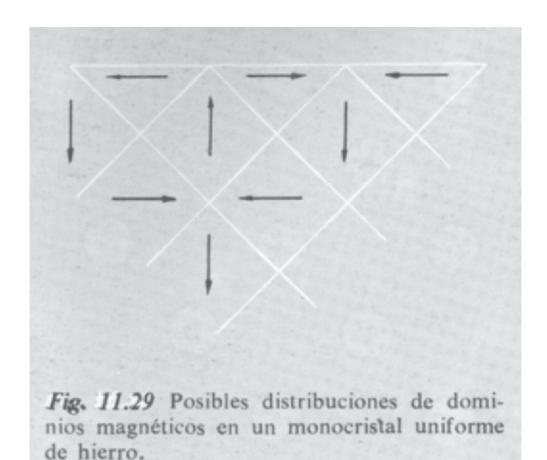


Fig. 11.29 Posibles distribuciones de dominios magnéticos en un monocristal uniforme de hierro.

puede verse con un microscopio de pocos aumentos. A escala atómica esto es enorme, es decir, un dominio magnético contiene miles de millones de momentos magnéticos elementales. En la Fig. 11.29 se representa una división en dominios. La división tiene lugar por el hecho de que es más económico en energía, que una distribución con todos los spin orientados en la misma dirección. Esta última distribución sería un imán permanente con un intenso campo magnético en el espacio que le rodea. La energía almacenada en este campo exterior, es mayor que la energía que se necesita para variar la inclinación de una pequeña fracción de los spin en el cristal, a saber, los del contorno de un dominio, no alineados con sus vecinos inmediatos. La estructura en dominios es pues el resultado de la pugna por hacer mínima la energía.

Si arrollamos una bobina de hilo alrededor de una barra de hierro, podemos aplicar un campo magnético al material, haciendo circular una corriente por el hilo. En este campo, los momentos orientados paralelamente al campo tienen energía más baja que los orientados antiparalelamente, o en otra dirección. Esto favorece algunos dominios sobre otros; los que tienen la dirección del momento orientada favorablemente * tenderán a crecer a expensas de los otros, si es posible. Un dominio crece como un club, es decir, ampliando el número de asociados. Esto ocurre en el contorno. Los spin que pertenecen a un dominio no favorable pero situado al lado de uno favorable, cambia simplemente la dirección para adoptar la dirección favorable. Esto lo único que hace es cambiar la dirección en los extremos del dominio, la cual es la superficie de separación de las dos clases de spin. Esto ocurre fácilmente en monocristales. Es decir, un campo muy débil aplicado puede lograr, por movimientos del contorno, un gran crecimiento del dominio, y por lo tanto una variación grande de imanación. Sin embargo, el movimiento del contorno de los dominios puede ser difícil según la estructura del grano del material.

Si el campo aplicado no lo está en una de las direcciones « fáciles » (en el caso de un cristal cúbico, por ejemplo) aunque agotemos los dominios no favorables, los momentos no señalan aún paralelamente al campo. Puede necesitarse un campo mucho más intenso para que adopten la dirección del campo y así, finalmente, crear la máxima imanación posible.

Veamos las consecuencias de esto, a gran escala, como aparece en el comportamiento magnético de una pieza de hierro, a la que se aplica diversos campos. Una disposición experimental conveniente es la de un toro de hierro, alrededor del cual se han arrollado dos bobinas (Fig. 11.30). Esto proporciona un campo magnético, prác-

$H = \dfrac{4\pi NI}{c \cdot \text{circunferencia}}$

I

N espiras

Al galvanómetro

Fig. 11.30 Dispositivo para estudiar la relación entre **B** y **M**, o **B** y **H**, en un material ferromagnético.

* Tendemos a usar *spin* y *momentos* casi intercambiablemente en esta discusión. El momento es un aspecto intrínseco del spin, y si uno está orientado el otro también lo está. Para ser meticulosos deberíamos recordar al lector, que en el caso del electrón, tiene sentidos contrarios (Fig. 11.14).

ticamente uniforme, en el hierro, sin efectos en los extremos que nos complicaría las cosas. Midiendo la diferencia de potencial inducida en una de las bobinas podemos determinar variaciones de flujo Φ, y por tanto **B** en el interior del hierro. Si seguimos la pista de las *variaciones* de **B**, partiendo de $\mathbf{B} = 0$, siempre sabremos cuánto vale **B**. Una corriente en la otra bobina establece **H**, que tomamos como variable independiente. Si conocemos **B** y **H** siempre podemos calcular **M**. Es más corriente expresar **B**, y no **M**, en función de **H**. Una curva típica *B-H* para el hierro puede verse en la Fig. 11.31. Nótese que las escalas en abscisas y en ordenadas son muy diferentes. Si no hubiese hierro en la bobina, 1 A/m equivaldría exactamente a $4\pi \cdot 10^{-7}$ T. Pero en cuanto el campo H es solamente de unos A/m, B ha subido a varias décimas de tesla. Por supuesto que B y H se refieren a su valor medio a lo largo de todo el anillo; la estructura fina de los dominios como tales nunca se pone de manifiesto.

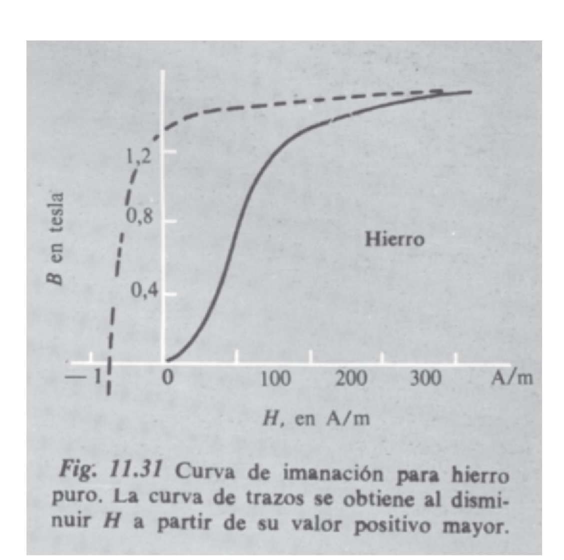


Fig. 11.31 Curva de imanación para hierro puro. La curva de trazos se obtiene al disminuir H a partir de su valor positivo mayor.

Partiendo del hierro « no imanado », $B = 0$ y $H = 0$, el incremento de H hace aumentar a B de manera claramente no lineal, lentamente al principio, luego más rápidamente, a continuación muy lentamente, para aplanarse al final. Lo que aparece constante en el límite es M, no B. Sin embargo, en esta gráfica, ya que $M = (B/\mu_0) - H$ y $H \ll B$, la diferencia entre $(1/\mu_0)B$ y M no es apreciable.

La parte inferior de la curva *B-H* viene regida por el movimiento del contorno de los dominios, es decir, por el crecimiento de los dominios « orientados correctamente » a expensas de los dominios « orientados incorrectamente ». En la parte de la curva aplanada, los momentos magnéticos son obligados por una « fuerza bruta » a orientarse en el campo. El hierro es un metal policristalino ordinario, así que solamente una pequeña fracción de microcristales serán lo suficientemente afortunados para tener una dirección « fácil » alineada con el campo.

Si ahora hacemos decrecer lentamente la corriente en la bobina, disminuyendo de esta manera a H, la curva no *sigue, a la vuelta, el mismo camino*. Por el contrario, hallamos que su comportamiento es el de la línea de trazos de la Fig. 11.32. Esta irreversibilidad se llama histeresis. Es debida, principalmente, a que los movimientos del contorno de los dominios es parcialmente irreversible. Las razones no son evidentes por lo que se ha dicho, pero están bién establecidas por los físicos que trabajan en ferromagnetismo. La irreversibilidad es un estorbo, y una causa de pérdida de energía en muchas aplicaciones de los materiales ferromagnéticos (por ejemplo, en los transformadores de corriente alterna). Pero es indispensable para la imanación permanente, y para tales aplicaciones lo que se desea es aumentar la irreversibilidad. La Fig. 11.32 muestra la porción correspondiente de la curva *B-H* de una buena aleación para imán permanente. Véase que H debe alcanzar el valor de $5 \cdot 10^4$ A/m en sentido contrario antes de que B se anule. Si desconectamos y quitamos la bobina, dejamos una B de 1,3 T, llamada ***remanencia***. Puesto que H es nulo, es la imanación M por μ_0. La aleación ha adquirido una imanación permanente, es decir, una que persistirá indefinidamente si la exponemos única-

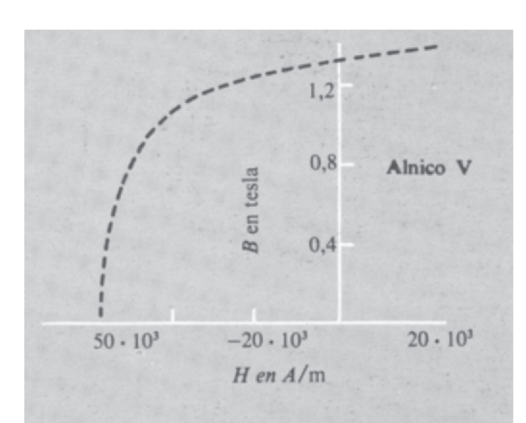


Fig. 11.32 El Alnico V es una aleación de aluminio, níquel y cobalto que se utiliza para imanes permanentes. Compárese esta porción de curva de su imanación con la correspondiente porción de la característica para un material magnético «dulce», representada en la Fig. 11.31.

mente a campos magnéticos débiles. Toda la información almacenada en cintas magnéticas, desde música a programación de calculadoras, debe su permanencia a este fenómeno físico. Los elementos computadores magnéticos, memorias magnéticas, y los dispositivos parecidos, implican el mismo fenómeno físico.

Problemas

11.1 A partir de los datos de la Tabla 11.1 determinar la susceptibilidad diamagnética del agua.

11.2 En el Cap. 6 se calculó el campo en un punto del eje de un anillo recorrido por una corriente, cuyo radio es b. (Véase Ec. 41 del Capítulo 6). Demuéstrese que para $z \gg b$ aquel valor se aproxima al del campo de un dipolo magnético, y hállese a qué distancia sobre el eje debemos situarnos para que el campo allí tome un valor dentro del uno por cien del que un dipolo infinitesimal del mismo momento dipolar, crearía en este punto.

11.3 ¿Cuál es el valor del momento magnético de un gramo de oxígeno líquido en un campo de 18 kilogauss, según los datos de la Tabla 11.1? ¿Dado que la densidad del oxígeno líquido es de 0,85 g/cm^3 a 90 K, cuál es su susceptibilidad magnética χ_m?

11.4 En el polo Norte magnético, el campo magnético terrestre es vertical, con una intensidad de $0{,}62 \cdot 10^{-4}$ T. El campo magnético terrestre en la superficie y más lejos es aproximadamente el de un dipolo central.

(*a*) ¿Cuál es el valor del momento dipolar?

(*b*) Imaginemos que la fuente del campo sea un anillo de corriente en el «ecuador» del núcleo metálico de la tierra, que tiene un radio de 3000 km, cerca de la mitad del radio terrestre. ¿Cuál tendría que ser la corriente?

11.5 Se coloca un solenoide como el descrito en la Sec. 11.1 en el sótano de un laboratorio de física. Un físico, en el piso superior del edificio, a una altura de unos 20 m y desplazado horizontalmente unos 30 m, se queja de que el campo interfiere sus medidas. Suponiendo que el solenoide trabaja en las condiciones descritas, y tratándolo como un dipolo magnético simple, calcúlese la intensidad del campo en el punto donde se halla el físico que se quejaba. Dígase si hay cierta base en sus quejas.

11.6 Un cubo de magnetita de 5 cm de arista está imanado a saturación en una dirección perpendicular a dos de sus caras. Hallar el valor en amperes de la cinta de corriente de carga ligada que fluye en torno al circuito que consiste en las otras cuatro caras del cubo. La imanación de saturación en la magnetita es de $4{,}8 \cdot 10^5$ joules/tesla · m^3. ¿El campo de este imán cúbico perturbaría notablemente una brújula situada a 2 m?

11.7 Una esfera de radio R tiene una carga Q distribuida uniformemente sobre la esfera, con una densidad $\sigma = Q/4\pi R^2$. Esta carga superficial gira alrededor de un eje de la esfera con velocidad angular ω radianes/seg. Hállese el momento magnético. (Puede dividirse la esfera en bandas estrechas giratorias; hállese la corriente equivalente a cada una de estas bandas, y su momento dipolar, e intégrese para todas las bandas).

Resultado: $QR^2\omega/3$.

11.8 Demuéstrese que el trabajo efectuado al trasladar 1 g de substancia paramagnética desde una región donde la intensidad del campo magnético vale B a una región donde la intensidad del campo es despreciable, vale $\frac{1}{2}\chi B^2$, siendo χ la susceptibilidad específica. Calcúlese luego el trabajo requerido, por gramo, para quitar el oxígeno líquido de la posición indicada en la tabla de la Sec. 10.1 (Por supuesto que esto sólo es cierto si χ es una constante en todo el intervalo de intensidades del campo que interviene).

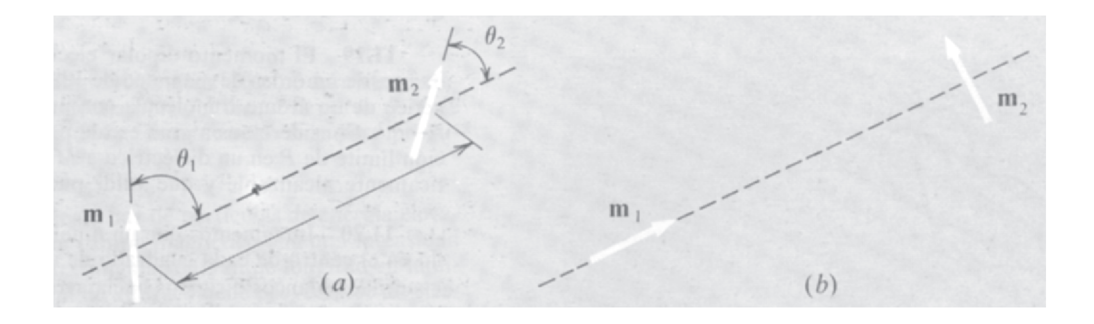
11.9 Un solenoide cilíndrico tiene un bobinado de una sola capa, de radio r_0. Es tan largo, que cerca de un extremo el campo puede tomarse como igual al del solenoide semiinfinito. Demuéstrese que el punto del eje del solenoide, donde una pequeña muestra paramagnética experimentará mayor fuerza, está situado a una distancia $r_0/\sqrt{15}$ del extremo, en el interior.

11.10 En el caso de un dipolo eléctrico, compuesto de dos cargas Q y $-Q$ separadas una distancia s, el volumen de la región próxima, donde el campo es esencialmente diferente del de un dipolo ideal, es proporcional a s^3. La intensidad del campo en esta región es proporcional a Q/s^2, en puntos similares, al variar s. El momento dipolar es $p = Qs$; si disminuimos s manteniendo constante p, ¿qué le ocurre al producto del volumen por la intensidad del campo? Llévese a cabo el desarrollo correspondiente para el campo magnético de una espira recorrida por una corriente. La moraleja es: Si nos interesa el promedio espacial del campo en un volumen que contiene dipolos, la diferencia esencial entre el «interior» de los dipolos eléctrico y magnético *no puede* ignorarse, incluso cuando se tratan los dipolos como infinitesimales.

11.11 Escríbanse las ecuaciones de Maxwell tal como aparecerían si existieran cargas magnéticas y corrientes de carga magnética, tal como ocurre con las cargas y corrientes eléctricas. Invéntese todos los nuevos símbolos que sean necesarios y defínase cuidadosamente lo que representan. Hay que tener particular cuidado con los signos + y −.

11.12 Deseamos hallar la energía necesaria para llevar dos dipolos desde una separación infinita a la configuración mostrada en (*a*) en la parte inferior, definida por la distancia de separación r y los ángulos θ_1 y θ_2. Ambos dipolos están en el plano del papel. Quizá la manera más simple de calcular la energía sea ésta: traer los dipolos desde el infinito manteniendo la orientación representada en (*b*). Esto no consume trabajo, pues la fuerza sobre cada dipolo es nula. Ahora calculamos el trabajo efectuado al girar $\mathbf{m}_1$ hasta su orientación final mientras se mantiene fijo $\mathbf{m}_2$. Luego calculamos el trabajo requerido para girar $\mathbf{m}_2$ hasta su orientación final. Así demostramos que el trabajo total efectuado, al cual podemos llamar energía potencial del sistema, es $(\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2)m_1m_2/r^3$.

Prob. 11.12



11.13 Dos vértices opuestos de un octaedro regular de arista de longitud b están situados sobre el eje z. En cada uno de estos vértices, y también en cada uno de los otros cuatro vértices, hay un dipolo de intensidad $\mathbf{m}$ dirigido en la dirección y sentido $\hat{\mathbf{z}}$. Usando el resultado del problema 11.12, calcular la energía potencial de este sistema.

11.14 Denotemos por χ_m' la susceptibilidad magnética definida por la Ec. 39, para distinguirla de la susceptibilidad χ_m de la definición convencional Ec. 56. Demostrar que $\chi_m = \chi_m'/(1 + \chi_m')$.

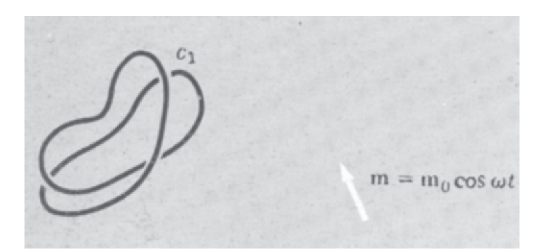
11.15 En la magnetita, Fe_3O_4, la imanación de saturación M_0 es $48 \cdot 10^4$ A/m. La bacteria magnética descubierta en 1975 por R.P. Blakemore contiene cristales de magnetita, aproximadamente cúbica, de dimensión $5 \cdot 10^{-6}$ cm. Una bacteria, la cual tiene el tamaño aproximado de unos 10^{-4} cm, puede contener de 10 a 20 de tales cristales unidos como una cadena. Este imán mantiene la célula en conjunto orientada en el campo magnético terrestre, y así controla la dirección en la que la bacteria se mueve. Véase «Magnetic Navigation in Bacteria», de R. P. Blakemore y R.B. Frankel, *Scientific American,* diciembre, 1981. Calcular la energía que interviene en la rotación de 90° de una célula que contenga tal imán en el campo magnético terrestre, y comparar con la energía kT de la agitación térmica.

11.16 Una notable nueva aleación magnética permanente, de samario y cobalto, tiene una imanación de saturación de 0,75 Am², que mantiene completa en campos externos de hasta 1,5 tesla. Se considera que es lo más cerca a la imanación rígidamente congelada hasta ahora. Consideremos una esfera de samario-cobalto uniformemente imanada de 1 cm de radio. (*a*) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético **B** inmediatamente en el exterior de la esfera en uno de sus polos? (*b*) ¿En su ecuador magnético? (*c*) Imaginemos dos de tales esferas en contacto con los polos distintos tocándose. ¿Qué fuerza deberemos aplicarles para separarlas?

11.17 Una placa de hierro de 20 cm de espesor está imanada a saturación en una dirección paralela a la superficie de la placa. Un muón de 10 GeV se mueve perpendicularmente a esta superficie atravesando la placa con relativamente poca pérdida de energía. Calcular aproximadamente la desviación angular de la trayectoria del muón, sabiendo que la masa en reposo del muón es 200 MeV y que la imanación de saturación del hierro es equivalente a $1{,}5 \cdot 10^{23}$ momentos de electrón por cm³.

11.18 Tres brújulas están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero horizontal. Como en una brújula ordinaria, cada aguja de la brújula es un dipolo magnético limitado a girar en un plano horizontal. En este caso el campo magnético terrestre ha sido precisamente anulado. El único campo que actúa sobre cada dipolo es el campo debido a los otros dos. ¿Qué orientación asumirían en esa circunstancia? (Utilícense argumentos de simetría) ¿Puede generalizarse la respuesta a N brújulas en los vértices de un N-ágono?

Prob. 11.21



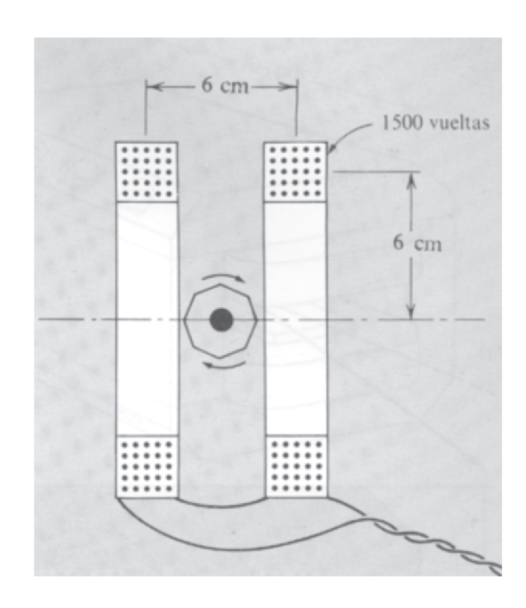
11.19 El momento dipolar eléctrico de una molécula dipolar es típicamente, de un orden de magnitud de 10^{-30} C · m (Fig. 10.14). El momento magnético de un átomo o molécula con un spin electrónico no apareado es de 10^{-17} A · m². Consideremos a gran escala polarización P e imanación M. ¿Qué relación límite de P en un dieléctrico a M en un material ferromagnético, es practicamente alcanzable y qué valor puede pensarse que podría tener?

11.20 Imaginemos que un dipolo magnético de intensidad m está situado en el centro de cada cuadrado de un tablero de ajedrez, con dipolos en los cuadrados blancos dirigidos hacia arriba y dipolos en los cuadrados negros dirigidos hacia abajo. El lado del cuadrado es s.

(*a*) Calcular el trabajo necesario para sacar cualquier dipolo hasta el infinito, dejando los otros 63 fijos en su posición y orientación. Así determinamos cuáles de los dipolos, en este sentido, están más estrechamente ligados.

(*b*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para dispersar todos los 64 dipolos a separaciones mutuas infinitas? Para responder a esta cuestión habrá que escribir y desarrollar un pequeño programa.

11.21 El dipolo magnético **m** del diagrama oscila a la frecuencia angular ω. Parte de su flujo corta el circuito próximo C_1 induciendo en él una fuerza electromotriz $\mathscr{E}_1$ sen wt. Sería fácil calcular $\mathscr{E}_1$ si conociésemos el flujo del dipolo que atraviesa C_1, pero el cálculo podría ser arduo. Supongamos que todo lo que sabemos de C_1 es esto: si circula una corriente I_1 por C_1 produce un campo magnético $\mathbf{B}_1$ en la posición de **m**. Hemos dicho el valor de $\mathbf{B}_1/I_1$, pero nada más acerca de C_1, ri su forma o posición. Demostrar que esta información es suficiente para relacionar $\mathscr{E}_1$ a $\mathbf{m}_0$ por la simple fórmula $\mathscr{E} = (\omega/I_1)\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{m}_0$. *Sugerencia:* Representar **m** como una pequeña espira de área A recorrida por la corriente I_2. Llamar a este circuito C_2. Consideremos el voltaje inducido en C_2 por una variación de corriente en C_1; luego invocar la reciprocidad de la inducción mutua que se ha demostrado en la Sección 7.7. $\mathscr{E}I$ está en watts y $\mathbf{m}_0$ en A · m²).



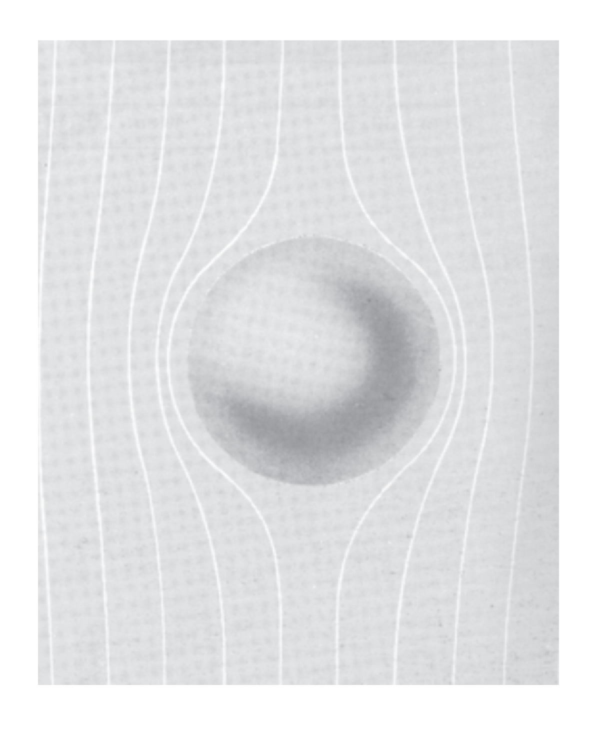
Prob. 11.22

11.22 La dirección del campo magnético terrestre en las pasadas eras geológicas puede deducirse estudiando la imanación remanente en las rocas. El momento magnético de una muestra de roca puede determinarse haciéndola girar en el interior de una bobina y medir el voltaje alterno inducido de este modo. Las dos bobinas del diagrama están conectadas en serie. Cada una tiene 1500 vueltas y un radio medio de 6 cm. La roca gira a 1740 revoluciones por minuto por un eje perpendicular al plano del diagrama.

(*a*) ¿Cuánto vale el momento magnético de la roca si la amplitud de la fuerza electromotriz inducida es de 1 milivolt? Aquí es útil la fórmula deducida en el Problema 11.21.

(*b*) ¿Cuál es la mínima cantidad de material ferromagnético requerido, en orden de magnitud, para producir un efecto de esta magnitud?

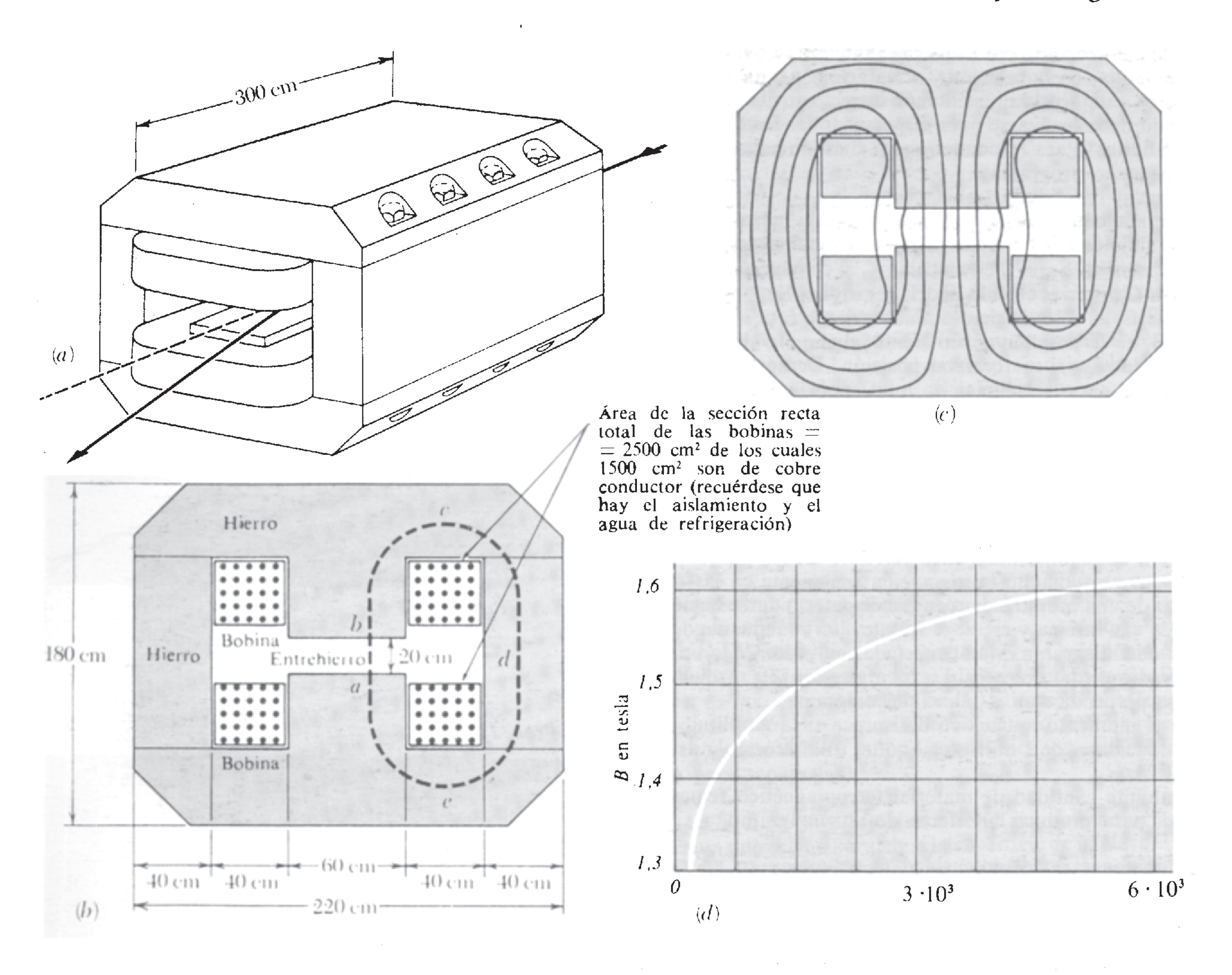

Prob. 11.23



11.23 Un dipolo magnético de intensidad m se coloca en un campo magnético homogéneo de intensidad B_0, con el momento dipolar en sentido contrario al campo. Demuéstrese que en el campo resultante, existe cierta superficie esférica, centrada en el dipolo, a la que no atraviesa ninguna línea de campo. Podría decirse que el campo exterior se ha «expulsado» de esta esfera. En la figura se han representado las líneas de campo exteriores. ¿Cómo son las líneas de campo en el interior de la esfera? ¿Cuál es la intensidad del campo, inmediatamente fuera de la esfera, en el ecuador? En lo que atañe al campo exterior, el dipolo podría sustituirse por corrientes que circulasen por la superficie de la esfera, su pudiésemos encontrar la distribución correcta de corrientes. ¿Cuál es el campo en el interior de la esfera en este caso? ¿Por qué podemos estar seguros? (Ésta es una configuración importante en el estudio de la superconductividad. Una esfera superconductora, en realidad, expulsa todo campo de su interior).

11.24 Un toroide de hierro de diámetro interior 10 cm, diámetro exterior 12 cm, tiene arrolladas 20 espiras de alambre. Utilícese la curva B-H de la Fig. 11.30 para estimar la intensidad de la corriente requerida para producir un campo en el hierro de 1,2 T.

11.25 Para producir desviación de un haz de partículas de energía elevada en cierto experimento, se necesita un campo magnético con una intensidad de 1,6 tesla, mantenida en una región rectangular de 3 m de longitud en la dirección del haz, 60 cm de ancho y 20 cm de altura. Puede proyectarse un electroimán conveniente siguiendo las directrices indicadas en las partes (*a*) y (*b*) de la figura. Tomando las dimensiones dadas, determínese (i) el número total



Prob. 11.25

de ampere-vueltas necesarias en las dos bobinas para que el campo en el entrehierro sea de 1,6 T (ii) la potencia, en kilowatt, que debe suministrársele; (iii) el número de espiras que debe contener cada bobina y la correspondiente sección del hilo para que se obtenga el campo deseado cuando conectamos las bobinas en serie con una línea de cc de 400 volt. Para usarla en la parte (i), en la parte (*d*) de la figura se representa una parte de la curva ***B-H*** para el imán de hierro Armco. Todo lo que hace falta determinar es la integral curvilínea de H a lo largo de un camino como el ***abcda***. En el entrehierro, $H = B$. En el hierro, puede suponerse que B tiene la misma intensidad que en el entrehierro. Las líneas de campo se parecerán a las dibujadas en la parte (*c*) de la figura. Puede estimarse aproximadamente la longitud del camino en el hierro. Esto no es muy crítico, porque se verá que el largo camino ***bcdea*** contribuye relativamente poco a la integral curvilínea, comparado con la contribución del camino ***ab*** en el aire. (De hecho, no es una mala aproximación, para intensidades de campo bajas, despreciar H en el hierro). Para (ii) supóngase la resistividad del cobre $\rho = 2{,}0 \times 10^{-8}$ ohm-m, y que cada bobina contenga N espiras. Se encontrará que la potencia necesaria para un número dado de ampere-vueltas es independiente de N; es decir, es la misma para muchas vueltas de hilo fino, que para pocas espiras de hilo grueso, con tal de que la sección recta

total del cobre esté fijada específicamente. El proyectista, por lo tanto, selecciona N y la sección del conductor para poder conectar el electroimán a la fuente de tensión disponible.

11.26 La molécula del agua H_2O contiene 10 electrones con spins desapareados y, en consecuencia, momento magnético nulo. Su estructura electrónica es puramente diamagnética. Sin embargo, el núcleo de hidrógeno, el protón, es una partícula con spin y momento magnético intrínseco. El momento magnético del protón es unas 700 veces menor que el del electrón. En el agua los dos spins del protón en una molécula no son antiparalelos sino prácticamente libres para orientarse individualmente, sujetos solamente a la agitación térmica.

(*a*) Usando la Ec. 40, calcular la susceptibilidad paramagnética resultante del agua a 20° C.

(*b*) ¿Cuánto vale el momento magnético inducido en 1 litro de agua en un campo de 1,5 T?

(*c*) ¿Si arrollamos una sola vuelta de hilo en torno de un frasco de 1 litro, cuál será la corriente en microamperes que produciría un momento magnético equivalente?

Solución: (*c*): 0,01 microamperes.

11.27 Alguien que conociese un poco de la teoría cuántica del átomo podía incomodarse por un punto de nuestro análisis en la Sección 11.5 del efecto de un campo magnético sobre la velocidad orbital de un electrón atómico. Cuando cambia la velocidad, mientras r permanece constante, el momento cinético mvr cambia. Pero el momento cinético de un electrón orbital se supone que es precisamente un múltiplo de la constante $h/2\pi$, siendo h la constante universal cuántica, constante de Planck. ¿Cómo puede cambiar mvr sin violar esta ley cuántica fundamental? La solución de esta paradoja es importante para la mecánica cuántica de las partículas cargadas, pero no es peculiar de la teoría cuántica. Cuando consideramos la conservación de la energía de una partícula con carga q, moviéndose en un campo electrostático externo $\mathbf{E}$, siempre incluimos, junto con la energía cinética $1/2\ mv^2$, la energía potencial $q\varphi$, donde φ es el potencial eléctrico escalar en la posición de la partícula. No sería sorprendente que cuando consideramos la conservación de la cantidad de movimiento, hallásemos no solamente la cantidad de movimiento ordinaria $M\mathbf{v}$, sino también una cantidad que implica un potencial vector $\mathbf{A}$ del campo magnético. Resulta que la cantidad de movimiento debe tomarse como $M\mathbf{v} + q\mathbf{A}$, donde $\mathbf{A}$ es el potencial vector del campo externo evaluado en la posición de la partícula. Podemos llamar a $M\mathbf{v}$ *cantidad de movimiento cinética* y a $q\mathbf{A}$ *cantidad de movimiento potencial*. (En relatividad la inclusión del término $q\mathbf{A}$ es un paso evidente debido a que la energía y la cantidad de movimiento forman un «cuadrivector», así también φ y $\mathbf{A}$, los potenciales escalar y vector del campo.) El momento cinético que aquí nos interesa debe ser, pues, no

$$\mathbf{r} \times (M\mathbf{v}) \quad \text{sino} \quad \mathbf{r} \times (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$$

Volvamos a la carga girando el extremo de la cuerda, en la Fig. 11.12. Comprobar primero que un potencial vector apropiado a un campo $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ sentido negativo es $\mathbf{A} = [(B/2)(-\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x)]$. Hallar luego lo que ocurre con el momento cinético $\mathbf{r} \times (M\mathbf{v} + q\mathbf{A})$ cuando se aplica el campo.

A

Breve resumen de la relatividad restringida

Suponemos al lector ya introducido en la relatividad restringida. Revisaremos las ideas principales y las fórmulas usadas en el comienzo del Capítulo 5. Lo más esencial es el concepto de sistema de referencia inercial para los sucesos espacio-tiempo y la transformación de las coordenadas de un suceso de una referencia inercial a otra.

Un sistema de referencia es un sistema coordenado que dispone de reglas graduadas y relojes. Los relojes están en todas partes. Cuando ocurre algo en cierto lugar, el instante de su ocurrencia se lee en un reloj que estaba en este lugar y permanece en él. Es decir, el tiempo se mide con un reloj *local* que está *estacionario* en la referencia. Los relojes pertenecientes a la referencia están todos *sincronizados*. Una manera de que se cumpla esto (no la única) fue descrita por Einstein en su gran artículo de 1905. Se usan señales luminosas. Desde el punto A, en el instante t_A, se manda un corto pulso luminoso hacia un punto remoto B. Llega a B en el instante t_B, leído en el reloj en B, e inmediatamente se refleja hacia A, donde llega en t_A'. Si $t_B = (t_A + t_A')/2$, los relojes en A y en B están sincronizados. Si no, uno de ellos requiere ajuste. Todos los relojes de la referencia pueden sincronizarse de esta manera. Adviértase que la tarea de los observadores en este proceder es, meramente, registrar las lecturas de los relojes locales para la comparación subsiguiente.

Un *suceso* está localizado en el espacio y en el tiempo por sus coordenadas x, y, z, t en cierto sistema de referencia elegido. El suceso puede ser el paso de una partícula en el instante t_1, por el punto del espacio (x_1, y_1, z_1). La historia del movimiento de esta partícula es una secuencia de tales sucesos. Supongamos que la secuencia tiene la propiedad particular que $x = v_x t$, $y = v_y t$, $z = v_z t$, en cualquier instante t,

con v_x, v_y, v_z constantes. Esto describe el movimiento en línea recta a celeridad constante respecto esta referencia. Un ***sistema de referencia inercial*** es una referencia en la cual un cuerpo aislado, libre de influencias exteriores, se mueve de esta manera. Una referencia inercial, en otras palabras, es aquella en la cual se cumple la primera ley de Newton. Tras todo esto, incluida la sincronización de los relojes, hay dos hipótesis acerca del espacio vacío: su ***homogeneidad,*** o sea, que todas las posiciones en el espacio son equivalentes, y su ***isotropía***, o sea, que todas las direcciones en el espacio son equivalentes.

Dos referencias, que llamamos F y F', pueden diferir de varias maneras. Una puede simplemente desplazarse respecto a la otra, siendo el origen de coordenadas de F' un punto en F que no sea el origen de coordenadas de F. O bien los ejes en F' pueden no ser paralelos a los ejes en F. A efectos de determinar el instante de un suceso, si F y F' no se mueven uno respecto a otro, un reloj estacionario en F también es estacionario en F'. En este caso podemos poner todos los relojes de F' que concuerden con los de F e ignorar la distinción. Las diferencias en la posición de las referencias y la orientación de las mismas no tienen consecuencias interesantes si el espacio es homogéneo e isótropo. Supongamos ahora que el origen de la referencia F' se ***mueve*** relativamente al origen de la referencia F. La descripción de una secuencia de sucesos por los valores de las coordenadas y el tiempo en el reloj en F puede diferir de la descripción de los mismos sucesos por los valores de las coordenadas en F' y el tiempo medido en los relojes de F'. ¿Cómo podemos relacionar ambas descripciones? Para contestar esto, solamente nos interesaremos en el caso en que F es una referencia inercial y F' es una referencia que se mueve respecto a F a velocidad constante y sin girar. En este caso F' también es una referencia inercial.

La relatividad restringida se basa en el postulado según el cual los fenómenos físicos observados en diferentes sistemas de referencia obedecen exactamente a las mismas leyes. Respecto a esto cualquier referencia es tan buena como cualquier otra; ninguna referencia es única. Si es cierto, este postulado de la relatividad es suficiente para determinar la manera cómo la descripción de sucesos en una referencia está relacionada con la descripción, en una referencia distinta, de los mismos sucesos. En esta relación aparece una celeridad universal, la misma en todas las referencias, cuyo valor debe hallarse experimentalmente. A veces se añade un segundo postulado que es la expresión de que la celeridad de la luz en cualquier referencia da el mismo resultado, tanto si la fuente luminosa es estacionaria en la referencia como si no. Esto puede considerarse como una expresión acerca de la naturaleza de la luz más bien que un postulado independiente. Afirma que las ondas electromagnéticas, en realidad, se propagan con la celeridad límite implicada en el postulado de la relatividad. Otras cosas se propagan con esta celeridad —por ejemplo, los neutrinos—, pero estamos acostumbrados a llamar a la celeridad límite la «celeridad de la luz». Las deducciones a partir del postulado de la relatividad, expresadas en las fórmulas de la relatividad restringida, se han comprobado precisamente en numerosos experimentos. Nada en la física reposa sobre una base más firme.

Consideremos dos sucesos, A y B, observados en un sistema inercial F. *Observados,* aquí, es la abreviatura de «cuyas coordenadas espacio-temporales están determinadas con las reglas graduadas y los relojes de la referencia F». (Recordemos que nuestros observadores están equipados solamente con papel y lápiz, y deben situar un observador en la posición de cualquier suceso.) El desplazamiento de un suceso del otro viene dado por los cuatro números

$$x_B - x_A, \qquad y_B - y_A, \qquad z_B - z_A, \qquad t_B - t_A \qquad (1)$$

Los *dos mismos sucesos* podrían haber sido localizados dando sus coordenadas en algún otro sistema de referencia F'. Supongamos que F' se mueve con respecto a F de la manera indicada en la Fig. A.1. Los ejes espaciales de F' permanecen paralelos a los de F, mientras

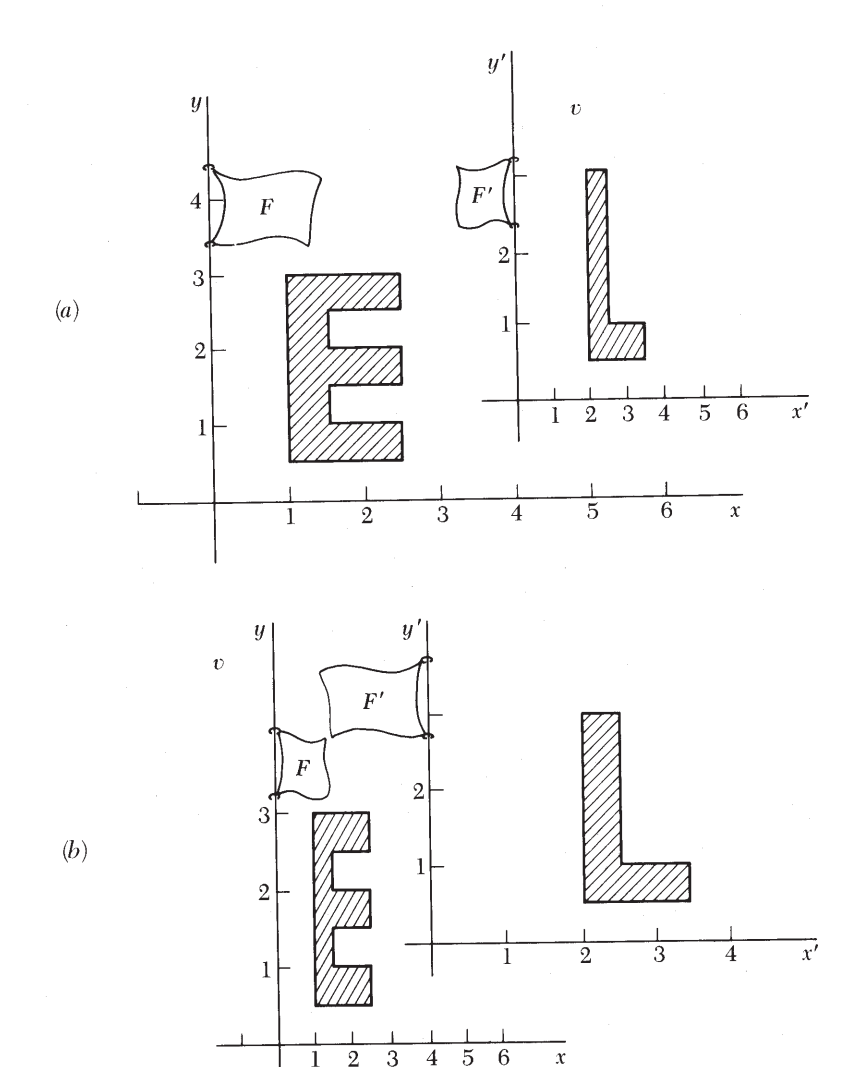


Fig. A.1 Dos referencias se mueven con celeridad relativa v. La «E» es estacionaria en la referencia F. La «L» es estacionaria en la referencia F'. En este ejemplo $\beta = v/c = 0{,}866$; $\gamma = 2$. (a) Donde todo estaba determinado por observadores en F en el instante particular t según los relojes en F. (b) Donde todo estaba determinado por observadores en F' en un instante t' determinado según los relojes en F'.
Cuestión: Supongamos que los relojes en las dos referencias se hallaban de manera que el extremo izquierdo de la E tocaba el extremo izquierdo de la L en $t = 0$ según un reloj local en F y en $t' = 0$ según un reloj local en F'. Sean las distancias dadas en pies y tómese $c = 1$ pie/nanosegundo. ¿Cuál es la lectura t para todos los relojes de F en (a)? ¿Cuál es la lectura t'de todos los relojes de F' en (b)?
Respuesta: $t = 4{,}62$ nanosegundos, $t' = 4{,}04$ nanosegundos. Si no está de acuerdo, estudie de nuevo el ejemplo.

que, vista desde F, la referencia F' se mueve con celeridad v en la dirección positiva de x. Evidentemente, éste es un caso particular pero que tiene gran interés físico.

El suceso A, observado en F', ocurrió en x'_A, y'_A, z'_A, t'_A, el último de estos números es la lectura en un reloj perteneciente a (es decir, ***estacionario en***) F'. El desplazamiento espacio-tiempo, o ***intervalo*** entre los sucesos A y B en F' no es el mismo que en F. Sus componentes están relacionadas a las de F por la ***transformación de Lorentz:***

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= \gamma(x_B - x_A) - \beta\gamma c(t_B - t_A) \\ y'_B - y'_A &= y_B - y_A \\ z'_B - z'_A &= z_B - z_A \\ t'_B - t'_A &= \gamma(t_B - t_A) - \beta\gamma(x_B - x_A)/c \end{aligned} \qquad (2)$$

En estas ecuaciones c es la celeridad de la luz, $\beta = v/c$, y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. La transformación inversa tiene apariencia parecida —como debe ser si ninguna referencia es única. Puede obtenerse a partir de las Ecs. (2) simplemente cambiando las primas por no primas e invirtiendo el signo de β.

Dos sucesos A y B son simultáneos en F si $t_B - t_A = 0$. Pero esto no significa que $t'_B - t'_A = 0$ a menos que $x_B = x_A$. Estos sucesos que son simultáneos en una referencia inercial pueden no serlo en otra. No debe confundirse esta fundamental «relatividad de la simultaneidad» con el hecho evidente de que un observador no equidistante de dos explosiones simultáneas recibe los destellos de éstas en tiempos distintos. Los tiempos t'_A y t'_B se registran mediante relojes *locales* para cada suceso, relojes estacionarios en F' que se han sincronizado previamente.

Consideremos una regla estacionaria en F', la cual es paralela al eje x' y se extiende desde x'_A a x'_B. Su longitud en F' es justamente $x'_B - x'_A$. La longitud de la regla medida en la referencia F es la distancia $x_B - x_A$ entre dos puntos de la referencia F cuyos extremos pasan ***simultáneamente*** según los relojes en F. Para estos dos sucesos, pues, $t_B - t_A = 0$. Con esta condición la primera de las ecuaciones de la transformación de Lorentz dada antes, nos da

$$x_B - x_A = (x'_B - x'_A)/\gamma \qquad (3)$$

Ésta es la famosa *contracción de Lorentz*. Podemos decir que las longitudes entre puntos fijos en F', si son paralelas a la velocidad relativa de las referencias, juzgadas por observadores en F serán más cortas en un factor $1/\gamma$. Esta expresión se mantiene cierta si F' y F se intercambian. Las longitudes perpendiculares a la velocidad relativa se miden lo mismo en las dos referencias.

Consideremos uno de los relojes en F'. Se mueve con celeridad v a través de la referencia F. Registremos t'_A como su lectura al pasar por uno de nuestros relojes locales en F; el reloj local en este instante indica t_A. Luego este reloj móvil pasa por otro reloj de F. Para este suceso el reloj local de F señala t_B, y la lectura del reloj móvil se registra como

t'_B.Los dos sucesos están separados en la referencia F por la distancia $x_B - x_A = v(t_B - t_A)$. Sustituyendo esta expresión en la cuarta ecuación de la transformación de Lorentz, Ec. 2, obtenemos

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A)(1 - \beta^2) = (t_B - t_A)/\gamma \qquad (4)$$

Según los dos relojes móviles, ha transcurrido menos tiempo entre los dos sucesos que los indicados por los relojes estacionarios en F. Ésta es la ***dilatación del tiempo*** que figura en la «paradoja de los gemelos». Se ha comprobado en muchos experimentos, incluyendo uno en el cual un reloj atómico estuvo circulando en torno a la tierra.

Recordando que «los relojes móviles marchan más lentamente, en un factor $1/\gamma$», y que «el papel cuadriculado móvil se acorta paralelamente a su movimiento en el factor $1/\gamma$», a menudo pueden resolverse las consecuencias de una transformación de Lorentz sin transcribir las ecuaciones. Debe subrayarse que este comportamiento no es una propiedad física peculiar de nuestros relojes y papel, sino que está intrínseco en las medidas del espacio y tiempo bajo el postulado de la relatividad.

La fórmula para la suma de velocidades, que se usa en el Capítulo 5, se deduce fácilmente de las ecuaciones de la transformación de Lorentz. Supongamos que un objeto se mueve en el sentido positivo a lo largo del eje x en la referencia F con velocidad u_x. ¿Cuál es su velocidad en la referencia F'? Para simplificar conviene que el objeto móvil pase por el origen en el instante $t = 0$. Luego su posición en el sistema de referencia F en cualquier instante t es simplemente $x = u_x t$. Para simplificar de nuevo, supongamos que los orígenes de espacio y tiempo de F y F' coinciden. Luego la primera y la última de las ecuaciones de la transformación de Lorentz se convierten en

$$x' = \gamma x - \beta\gamma ct \qquad \text{y} \qquad t' = \gamma t - \beta\gamma x/c$$

Sustituyendo x por $u_x t$ en el segundo miembro de cada una de ellas y dividiendo la primera por la segunda, obtenemos

$$\frac{x'}{t'} = \frac{u_x - \beta c}{1 - \beta u_x/c} \qquad (5)$$

En el primer miembro tenemos la velocidad del objeto u'_x en la referencia F'. La fórmula se acostumbra a utilizar con v en vez de βc.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \qquad (6)$$

Despejando u_x de la Ec. 6, podemos comprobar que la inversa es

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \qquad (7)$$

y que en ningún caso estas relaciones conducirán a una velocidad, u_x o u'_x, mayor que c.

Una componente de la velocidad perpendicular a v, la velocidad relativa de las dos referencias, se transforma diferentemente. Recordando que $y' = y$, pero que los relojes móviles son más lentos, debemos obtener $u'_y = u_y/\gamma$. En este caso la transformación inversa es $u_y = u'_y/\gamma$, y no $u_y = \gamma u'_y$. Tanto si nuestra referencia es F como F', el *otro reloj correspondiente siempre* es más lento comparado con el reloj en reposo en nuestra referencia.

Una consecuencia dinámica de la relatividad restringida puede expresarse como sigue. Consideremos una partícula que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en una referencia inercial F. Hallamos que la energía y la cantidad de movimiento se conservan en las interacciones de estas partículas con otras si atribuimos a la partícula la cantidad de movimiento $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{u}$ y la energía $\gamma m_0 c^2$, donde m_0 es una constante característica de esta partícula. Llamamos a m_0, *masa en reposo* de la partícula. Podríamos haberla determinado en una referencia en la cual la partícula se moviera tan lentamente que se pudiera aplicar la mecánica newtoniana —por ejemplo, ligando la partícula con cierta masa patrón. El factor γ que multiplica a m_0 es $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$, donde u es la celeridad de la partícula tal como se observa en nuestra referencia F.

Dados $\mathbf{p}$ y E, la cantidad de movimiento y la energía de una partícula observada en F, ¿cuál es la cantidad de movimiento de esta partícula y su energía observadas en otra referencia F'? Como antes, supondremos que F' se mueve en la dirección x, sentido positivo, con celeridad v, vista desde F. La transformación resulta ser ésta:

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma p_x - \beta\gamma E/c \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma E - \beta\gamma c p_x \end{aligned} \qquad (8)$$

Adviértase que βc aquí es la velocidad relativa de las dos referencias, como lo era en las Ecs. 2, no la velocidad de la partícula.

Comparemos esta transformación con las Ecs. 2. El parecido sería perfecto si considerásemos cp en vez de p en las Ecs. 8, y ct en vez de t en las Ecs. 2. Un conjunto de cuatro cantidades que se transforman de esta manera se llama un *cuadri-vector*.

El significado de *fuerza* es la variación temporal de la cantidad de movimiento. La fuerza que actúa sobre un objeto es simplemente $d\mathbf{p}/dt$, donde $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento del objeto en el sistema de referencia elegido, y t se mide con los relojes de esta referencia. Para hallar cómo se transforma la fuerza, consideremos una partícula de masa m_0 inicialmente en reposo en el origen en la referencia F en la que una fuerza f actúa un corto tiempo Δt. Deseamos hallar la variación temporal de la cantidad de movimiento dp'/dt', observada en la referencia F'. Como antes, F' se moverá en la dirección x tal como se ve desde F. Consideremos primero el efecto de la componente de la fuerza f_x. En el instante Δt, p_x se incrementará desde cero a $f_x \Delta t$, mien-

tras que x se incrementa en

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\frac{f_x}{m_0}\right)(\Delta t)^2 \tag{9}$$

y la energía de la partícula se incrementa en $\Delta E = (f_x \Delta t)^2/2m_0$, la energía cinética que adquiere, observada en F. (La celeridad de la partícula en F aún es tan pequeña que se aplica la mecánica newtoniana.) Usando la primera de las Ecs. 8 hallamos el cambio en p'_x:

$$\Delta p'_x = \gamma\, \Delta p_x - \beta\gamma\, \Delta E/c \tag{10}$$

y usando la cuarta de las Ecs. 2 hallamos

$$\Delta t' = \gamma \Delta t - \beta\gamma\, \Delta x/c \tag{11}$$

Ambas ΔE y Δx son proporcionales a $(\Delta t)^2$, así que cuando pasamos al límite haciendo $\Delta t \to 0$, el último término de cada una de estas ecuaciones desaparece, dando

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'} = \frac{\gamma f_x}{\gamma} = f_x \tag{12}$$

Conclusión: la componente de la fuerza *paralela* al movimiento relativo de la referencia tiene el mismo valor en la referencia móvil como en la referencia en reposo de la partícula.

Una componente transversal de la fuerza se comporta de manera diferente. En la referencia F, $\Delta p_y = f_y \Delta t$. Pero ahora $\Delta p'_y = \Delta p_y$, y $\Delta t' = \gamma \Delta t$; así obtenemos

$$\frac{dp'_y}{dt'} = \frac{f_y\, \Delta t}{\gamma\, \Delta t} = \frac{f_y}{\gamma} \tag{13}$$

La componente de una fuerza perpendicular al movimiento relativo de la referencia, observada en F', es *menor* en el factor $1/\gamma$ que el valor determinado por observadores en la referencia en reposo de la partícula.

La transformación de una fuerza desde F' a cualquier otra referencia móvil F'' sería algo más complicada. Siempre podemos hacerlo transformando a la referencia en reposo de la partícula y luego pasar a la otra referencia móvil.

Concluiremos nuestro resumen con una nota acerca de la invariancia Lorentz. Si elevamos al cuadrado los dos miembros de la Ec. 8 y recordando que $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, fácilmente podemos demostrar que

$$c^2(p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z) - E'^2 = c^2(p^2_x + p^2_y + p^2_z) - E^2 \tag{14}$$

Evidentemente esta cantidad $c^2p^2 - E^2$ *no ha cambiado* por una transformación de Lorentz. A menudo se llama *invariante cuadricantidad de movimiento* (incluso a pesar de tener dimensiones de cuadrado de energía). Tiene el mismo valor en cada sistema de referencia, incluida la referencia en reposo de la partícula. En la referencia en reposo la cantidad de movimiento de la partícula es nula y su energía E es m_0c^2.

El cuadrimomento invariante es por tanto $-m_0^2c^4$. Se deduce que en otra referencia

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 \tag{15}$$

El invariante construido de la misma manera con las Ecs. 2 es $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2$. Dos sucesos, A y B, para los cuales esta cantidad es positiva se dice que tienen una separación *seudoespacial.*

Es siempre posible hallar una referencia en la cual son simultáneos. Si el invariante es negativo los sucesos tienen una separación *seudotemporal.* En este caso existe una referencia en la cual ocurre en tiempos distintos, pero en el mismo lugar. Si este «invariante intervalo» es nulo, los dos sucesos pueden conectarse por un destello luminoso.

B

Radiación de una carga acelerada

Una partícula con carga q se ha movido en línea recta a celeridad constante v_0 durante largo tiempo. Choca con algo, imaginamos, y en un corto intervalo de tiempo y desaceleración constante, de duración τ, la partícula queda en reposo. La gráfica de la velocidad función del tiempo en la Fig. B.1 describe su movimiento. ¿Qué aspecto debe tener el campo eléctrico de esta partícula después de esto? La figura B.2 muestra cómo deducirlo.

Supondremos que v_0 es pequeña frente a c. Sea $t = 0$ el instante en que empieza la desaceleración, y sea $x = 0$ la posición de la partícula en aquel instante. Hasta que la partícula se haya parado completamente se habrá movido un poco más lejos, hasta $x = \frac{1}{2}v_0\tau$. Esta distancia, aunque hemos intentado representarla en nuestro diagrama, es pequeña comparada con las otras distancias que intervendrán.

Examinemos ahora el campo eléctrico en un instante $t = T \gg \tau$. Los observadores distantes del origen más de $R = cT$ no pueden haber sabido que la partícula se ha desacelerado. En toda esta región, la región I en la Fig. B.2, el campo debe ser el de una carga que se ha estado moviendo y *aún se está moviendo* a celeridad constante v_0. Este campo, como se vio en la Sección 5.7, parece emanar de la posición presente de la carga, que para un observador en cualquier parte de la región I es el punto $x = v_0 T$ sobre el eje x. Éste es donde estaría ahora la partícula si no se hubiese desacelerado. Por otro lado, para cualquier observador cuya distancia al origen sea menor de $c(T - \tau)$, o sea, para cualquier observador en la región II, el campo es el de una carga en reposo cerca del origen (realmente en $x = \frac{1}{2}v_0\tau$).

¿Qué aspecto debe tener el campo en la región de transición, la capa esférica de espesor $c\tau$? La ley de Gauss nos proporciona la clave. Una línea de campo tal como AB está sobre un cono en torno al eje x que incluye cierta cantidad de flujo de la carga q. Si CD forma el mis-

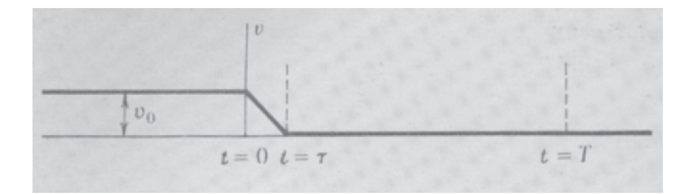


Fig. B.1 Diagrama velocidad-tiempo para una partícula que se ha propagado a celeridad constante v_0 hasta $t = 0$. Luego experimenta una aceleración negativa constante de módulo $a = v_0/\tau$, que la conduce al reposo en el instante $t = \tau$. Suponemos que v_0 es pequeña comparada con c.

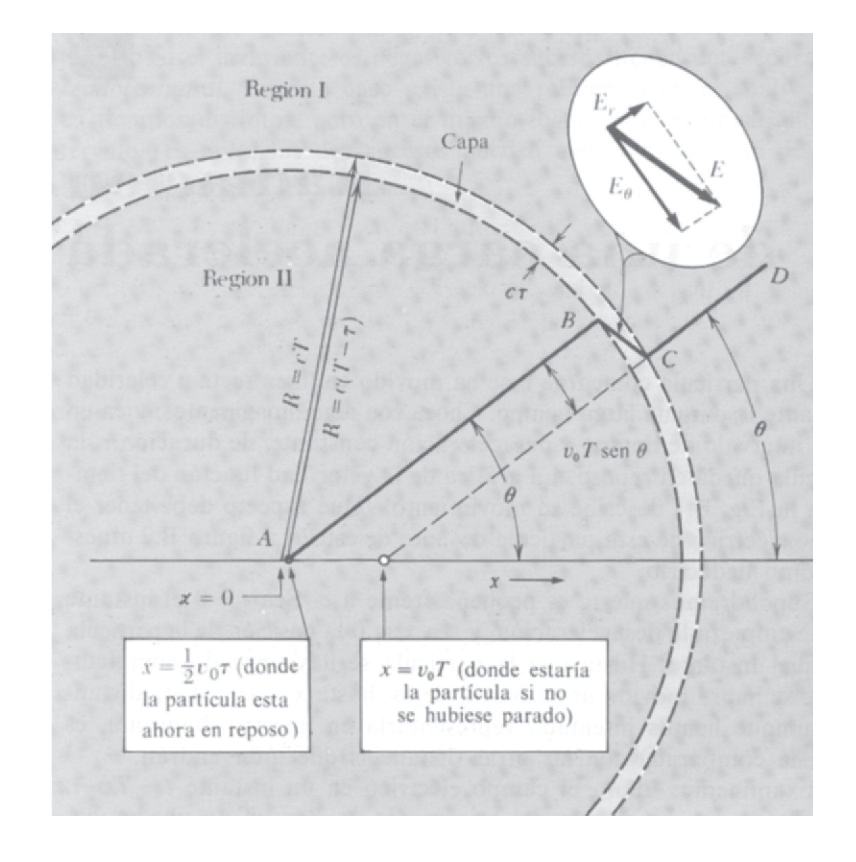


Fig. B.2 Diagrama espacial para el instante $t = T \gg \tau$, largo tiempo después de que la partícula se ha parado. Para los observadores en la región I, el campo debe ser el de la partícula en la posición $x = v_0T$; para los observadores en la región II, es el de la partícula en reposo cerca del origen. La región de transición es una capa de espesor $c\tau$.

mo ángulo θ con el eje, el cono que delimita incluye la misma cantidad de flujo. (Debido a que v_0 es pequeña, la compresión relativista de las líneas de campo, visible en la Fig. 5.13 y 5.17, ahora es despreciable). De donde AB y CD deben ser partes de la misma línea de campo, conectados por un segmento BC. Esto nos indica la *dirección* del campo **E** dentro de la capa; es la dirección del segmento BC. Este campo **E** dentro de la capa tiene componente radial E_r y componente transversal E_θ. De la geometría de la figura se halla fácilmente su relación

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \text{ sen } \theta}{c\tau} \tag{1}$$

Ahora bien, E_r debe tener el mismo valor dentro del espesor de la capa que en la región II cerca de B (de nuevo la ley de Gauss). Por tanto $E_r = 1/4\pi\varepsilon_0\, q/R^2 = 1/4\pi\varepsilon_0\, q/c^2T^2$, y sustituyendo en la Ec. 1 obtenemos

$$E_\theta = \frac{v_0 T \operatorname{sen}\theta}{c\tau} \qquad E_r = \frac{q v_0 \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 T\tau} \tag{2}$$

Pero $v_0/\tau = a$, el módulo de la aceleración (negativa), y $cT = R$, así que nuestro resultado puede escribirse

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{qa \operatorname{sen}\theta}{c^2 R} \tag{3}$$

Aquí se revela un hecho importante: E_θ es proporcional a $1/R$, *no* a $1/R^2$. En el transcurso del tiempo en que R aumenta, el campo transversal E_θ será eventualmente mucho más intenso que E_r. Acompañando a este campo eléctrico transversal (o sea, perpendicular a **R**) tendremos un campo magnético de igual intensidad perpendicular a la vez a **R** y a **E**. Ésta es una propiedad general de una onda electromagnética, explicada en el Cap. 9.

Calculemos la energía almacenada en el campo eléctrico transversal anterior, en toda la capa esférica. La densidad de energía es

$$\frac{\varepsilon_0 E_\theta^2}{2} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{q^2a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{R^2c^4} \tag{4}$$

El volumen de la capa es $4\pi R^2 c\tau$, y el valor medio de $\operatorname{sen}^2\theta$ a lo largo de la esfera * es 2/3. La energía total del campo eléctrico transversal es por tanto

$$\frac{2}{3}4\pi R^2 c\tau \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\,\frac{q^2a^2}{R^2c^4} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2a^2\tau}{c^3}$$

A ésta debemos sumarle una cantidad igual para la energía almacenada en el campo magnético transversal:

$$\text{Energía total en el campo electromagnético transversal} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2a^2}{c^3} \tag{5}$$

El radio R se ha simplificado. Esta cantidad de energía se propaga hacia el exterior, sin disminuir, con celeridad c desde el lugar de la desaceleración. Ya que τ es la duración de la desaceleración, y también es la dura-

* Nuestro eje polar en esta figura es el eje x: $\cos^2\theta = x^2/R^2$. Con una barra denotamos un valor medio en la esfera, $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3}R^2$. De donde $\overline{\cos^2\theta} = 1/3$, y $\overline{\operatorname{sen}^2\theta} = 1 - \overline{\cos^2\theta} = 2/3$.

ción del pulso electromagnético, que mide un observador distante, podemos decir que la potencia radiada durante el proceso de desaceleración fue

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q^2a^2}{c^3} \tag{6}$$

Como lo que aparece en la Ec. 6 es el cuadrado de la aceleración instantánea, no importa si a es positiva o negativa. Por supuesto que no debe importar, pues parar en una referencia inercial podría significar arrancar en otra. Hablando de referencias distintas, P_{rad} resulta ser invariante Lorentz, lo cual es a veces muy socorrido. Esto se debe a que P_{rad} es *energía/tiempo,* y la energía se transforma como el tiempo, siendo la cuarta componente de un cuadrivector, como se indicó en el Apéndice A.

Tenemos aquí un resultado más general que podíamos haber esperado. La Ecuación 6 da correctamente el valor instantáneo de la radiación de energía, por unidad de tiempo, por una partícula móvil con aceleración variable —por ejemplo, una partícula que vibra con movimiento armónico simple. Se aplica a una amplia variedad de sistemas radiantes desde antenas de radio a átomos y núcleos.

Problemas

B.1 Un electrón que se mueve inicialmente a celeridad constante v se conduce al reposo con una desaceleración uniforme a durante un tiempo $t = v/a$. Compárese la energía electromagnética radiada por el electrón durante la desaceleración con la energía cinética inicial del electrón. Expresar la relación en función de dos longitudes, la distancia que la luz recorre en un tiempo t y el radio clásico del electrón r_0, definido como $(\mu_0/4\pi)e^2/m$.

B.2 Un electrón ligado elásticamente vibra con movimiento armónico simple a la frecuencia angular ω con amplitud A.

(a) Hallar el promedio de la pérdida de energía por radiación por unidad de tiempo.

(b) ¿Si no se suministra energía para compensar la pérdida, cuánto tarda la energía del oscilador en caer a $1/e$ de su valor inicial?

Solución (b): $6\pi\varepsilon_0 mc^3/e^2\omega^2$.

B.3 Una onda electromagnética plana con frecuencia angular ω y amplitud del campo eléctrico E_0 incide sobre un electrón aislado. En la oscilación sinusoidal resultante del electrón la aceleración máxima es E_0e/m. ¿Cuánta potencia radía esta carga oscilante, promediada en muchos ciclos? (Adviértase que es independiente de la frecuencia ω.) Dividir esta potencia media radiada por $\varepsilon_0E_0^2c/2$, la densidad media de potencia (potencia por unidad de superficie del frente de onda) en la onda incidente. Esto da una constante σ con dimensiones de área, llamada *sección eficaz de difusión.* La energía radiada, o difundida, por el electrón, y perdida por la onda plana, es equivalente a la caída en un área σ. (El caso considerado aquí, que implica un electrón libre que se mueva no relativísticamente, a menudo se llama *difusión Thomson*, en honor de J J. Thomson, el descubridor del electrón, que fue quien lo calculó primero).

B.4 Nuestra fórmula fundamental, Ec. 6, es útil para partículas que se mueven relativísticamente, incluso aunque hemos supuesto $v_0 \ll c$ en la deducción. Todo lo que hay que hacer es transformar a una referencia inercial F' en la cual la partícula en cuestión, al menos temporalmente, se mueva lentamente, aplicar la Ec. 6 en esta referencia, y luego volverla a transformar a la referencia que elegimos. Consideremos un electrón altamente relativístico ($\gamma \gg 1$) moviéndose perpendicularmente a un campo magnético **B**. Se continúa acelerando perpendicularmente al campo, y debe radiar. ¿Cuánta energía pierde por unidad de tiempo? Para contestar esto, transformemos a una referencia F' que se mueva momentáneamente junto al electrón, hallemos E' en esta referencia, y P'_{rad}. Demostrar ahora que, debido a que la potencia es ***energía/tiempo,*** $P_{\text{rad}} = P'_{\text{rad}}$. Esta radiación generalmente recibe el nombre de ***radiación sincrotón.***

Solución: $P_{\text{rad}} = \dfrac{1}{6\pi\varepsilon_0}\gamma^2\dfrac{e^4B^2}{m^2c}\beta^2$

C

Superconductividad

El metal plomo es un, moderadamente, buen conductor a la temperatura ambiente. Su resistividad, como la de otros metales puros, varía aproximadamente en proporción a su temperatura absoluta. Al enfriar un hilo de plomo a 15 K su resistividad disminuye a 1/20 de su valor a la temperatura ambiente, y la resistencia continúa decreciendo al disminuir de nuevo la temperatura. Pero cuando se pasa de los 7,22 K, ocurre de improviso un sorprendente cambio: la resistencia eléctrica del hilo de plomo se anula. Se ha hecho tan pequeña que una corriente que circule por un anillo cerrado de hilo de plomo más frío de 7,22 K —una corriente que ordinariamente cesa en mucho menos de un microsegundo— circulará durante *años* sin decrecimiento medible. Esto se ha demostrado directamente. Otros experimentos indican que tal corriente podría persistir miles de millones de años. Difícilmente se pueden poner evasivas a la categórica manifestación de que la resistividad es nula. Sin duda ocurre algo completamente diferente de la conducción eléctrica ordinaria en el plomo por debajo de 7,22 K. A esto lo llamamos ***superconductividad***.

La superconductividad fue descubierta en 1911 por el gran experimentador holandés de las bajas temperaturas Kamerlingh Onnes. Lo observó primero en el mercurio, para el cual la temperatura crítica es de 4,15 K. Desde entonces se han hallado diez docenas de metales puros y aleaciones que se convierten en superconductores. Su temperatura crítica individual oscila entre unas pocas centésimas de grado a la más alta descubierta hasta ahora, 23,2 K para cierto compuesto de niobio y germanio. Curiosamente, entre los elementos que *no* se hacen superconductores hay algunos de los mejores conductores normales tales como la plata, el cobre y los metales alcalinos.

Sólo hace poco se ha explicado satisfactoriamente la superconductividad. Esencialmente es un fenómeno mecánico-cuántico, y bas-

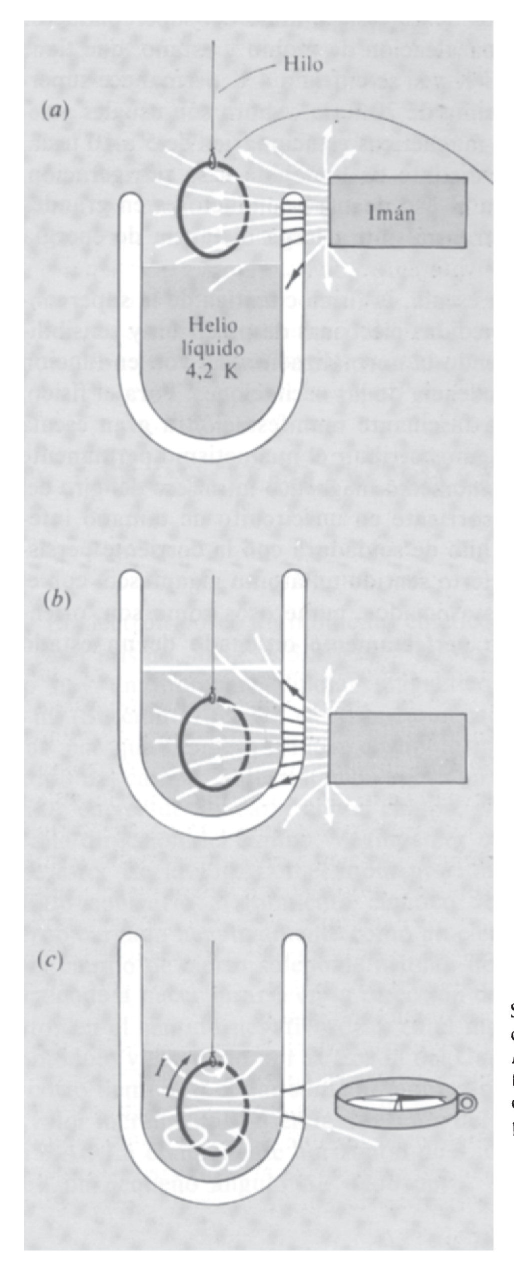
tante sutil. La corriente eléctrica que circula libremente consta de electrones en movimiento perfectamente ordenado. Como el movimiento de un electrón en un átomo, este flujo de electrones es inmune a pequeñas perturbaciones —y por una razón similar: se necesita una cantidad finita de energía para efectuar cualquier cambio en el estado de movimiento. Es algo parecido a la situación en un aislador en el cual todos los niveles de la banda de valencia están ocupados y separados de los niveles de energía más elevada de la banda de conducción, por un vacío de energía. Pero diferente a los electrones que llenan la banda de valencia, que en total debe dar flujo neto nulo, el estado de energía más bajo de los electrones superconductores puede tener una velocidad electrónica resultante, y por tanto un flujo de corriente, en cierta dirección. ¿Por qué tal estado singular se hace posible por debajo de cierta temperatura crítica? Esto no podemos explicarlo aquí *. Implica la interacción de los electrones de conducción no solamente con cada uno de los otros, sino también con toda la red de iones positivos a través de los cuales se están moviendo. Esto explica por qué diferentes substancias pueden tener diferentes temperaturas críticas, y por qué algunas substancias se espera que permanezcan conductores normales en las proximidades del cero absoluto.

En la física de la superconductividad los campos magnéticos son aún más importantes de lo que se podía esperar. Debemos expresar prestamente que el fenómeno de la superconductividad ***de ningún modo*** viola las ecuaciones de Maxwell. Así que la persistente corriente que puede circular en un anillo de hilo superconductor es una consecuencia directa de la ley de Faraday de la inducción, dado que la resistencia del anillo es realmente nula. Pues si partimos con un cierto flujo Φ_0 que atraviese el anillo, como $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ en torno a este anillo siempre es nulo, $d\Phi/dt$ debe ser nula. El flujo no puede cambiar; la corriente I en el anillo automáticamente asumirá el valor necesario para mantener el flujo en Φ_0. La Figura C.1 esquematiza una demostración simple de esto, y demuestra cómo puede establecerse una corriente persistente en un circuito superconductor aislado.

El campo magnético *dentro* de un material superconductor (excepto muy cerca de la superficie) siempre es nulo. Esto *no* es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, sino una propiedad del estado superconductor, tan fundamental, a la vez que desconcertante, como la ausencia de resistencia. La condición $\mathbf{B} = 0$ dentro del cuerpo superconductor es automáticamente mantenida por la corriente que circula por una delgada capa superficial.

Un campo magnético intenso destruye la superconductividad.

* La brusca emergencia de un estado de orden a cierta temperatura crítica nos recuerda la orientación espontánea de los spins de los electrones que tiene lugar en el hierro por debajo de su temperatura de Curie (mencionada en la Sección 11.11). Tal fenómeno *cooperativo* siempre implica un gran número de partículas interactuando mutuamente. Un fenómeno cooperativo más familiar es la congelación del agua, también caracterizado por una temperatura crítica bien definida.



Anillo de soldadura (aleación de plomo-estaño); conductor normal; corriente nula; un imán permanente produce un flujo Φ_0 a través del anillo.

Anillo enfriado por debajo de su temperatura crítica. (Cierta cantidad de helio se habrá consumido por evaporación.) El flujo a través del anillo no cambia. El anillo ahora es un superconductor.

Se quita el imán. Ahora circula una corriente persistente I en el anillo para mantener el flujo en el valor Φ_0. La aguja de la brújula responde al campo de la corriente persistente.

Fig. C.1 Establecimiento de una corriente persistente en un anillo superconductor. El anillo está hecho de soldadura ordinaria, una aleación de plomo estaño. (*a*) El anillo ahora no enfriado es un conductor normal con resistencia óhmica. Colocando el imán permanente inducirá una corriente en el anillo que rápidamente cesa, dejando el flujo magnético del imán, de valor Φ, que pase a través del anillo. (*b*) El baño de helio se eleva sin alterar la posición relativa del anillo y el imán permanente. El anillo, ahora por debajo de su temperatura crítica, es un superconductor con resistencia nula. (*c*) Se quita el imán. El flujo a través del anillo de resistencia nula no puede cambiar. Se mantiene a su valor Φ por la corriente en el anillo que circulará en tanto el anillo permanezca por debajo de su temperatura crítica. El campo magnético de la corriente persistente puede comprobarse con la brújula.

Ningún superconductor conocido antes de 1957 podía soportar más de unas cuantas centésimas de tesla. Esto frustra las aplicaciones prácticas de los conductores de resistencia nula. No puede circular una gran corriente por un hilo superconductor a causa de que el campo magnético de la propia corriente destruiría el estado superconductor. Pero luego se descubrió otro tipo de superconductor que puede mante-

ner resistencia nula en campos de 10 tesla o más. Un superconductor de este tipo muy usado es una aleación de niobio y estaño, que tiene una temperatura crítica de 18 K y si se enfría a 4 K permanece superconductor en campos por encima de 20 tesla. Ahora son usuales solenoides que producen campos magnéticos estacionarios de 5 a 10 tesla, sin ningún coste de potencia distinto de la debida a su refrigeración. Hay buenas perspectivas para el uso de superconductores en grandes máquinas eléctricas y en la transmisión a larga distancia de energía eléctrica.

En el otro extremo de la escala, la física cuántica de la superconductividad hace posible las medidas eléctricas de precisión y sensibilidad sin precedentes —incluyendo la normalización del volt en función de una medida fácil de la frecuencia de las oscilaciones. Para el físico, la superconductividad es una fascinante manifestación a gran escala de la mecánica cuántica. Podemos atribuir el magnetismo permanente del imán de la fig. C.1 (*a*) al momento magnético intrínseco del giro del electrón (una clase de supercorriente en un circuito de tamaño inferior a 10^{-8} cm). El anillo de hilo de soldadura con la corriente persistente circulando en él es en cierto sentido un átomo gigantesco, con el movimiento de sus electrones asociados, numerosos como son, orientado por el comportamiento perfectamente ordenado de un estado cuántico único.

D

Resonancia magnética

El electrón posee un momento cinético de spin, **J**. Su valor siempre es el mismo, $h/4\pi$, o $5{,}27 \cdot 10^{-35}$ kg $\cdot$m^2/s. Asociado con el eje de giro hay un momento dipolar magnético μ de valor $0{,}9273 \cdot 10^{-23}$ A $\cdot$ m^2 (Sección 11.6). Un electrón en un campo magnético experimenta un par que tiende a alinear el dipolo magnético en la dirección y sentido del campo. Este responde como un giróscopo que gire rápidamente: en vez de alinearse con el campo, el eje de giro *precesa* en torno a la dirección del campo. Veamos por qué cualquier imán que gire hace esto. En la Fig. D.1 el momento magnético μ se representa en sentido contrario al momento cinético **J**, como lo haría cualquier cuerpo cargado negativamente como un electrón. El campo magnético **B** (el campo de cierto solenoide o imán no mostrado) origina un par que tiende a hacer girar μ en la dirección del campo **B**. Este par es un vector en el sentido negativo de $\hat{\mathbf{x}}$ en el instante de nuestro esquema. Su módulo viene dado por la Ec. 38 del Capítulo 11; vale μB sen θ. En un corto tiempo Δt el par suma al momento cinético de nuestra peonza un valor incremental $\Delta\mathbf{J}$ en la dirección del vector par y de módulo μB sen $\theta\ \Delta t$. La componente horizontal de **J**, de valor J sen θ, ha girado, pues un pequeño ángulo $\Delta\psi$ dado por

$$\Delta\psi = \frac{\Delta J}{J \operatorname{sen} \theta} = \frac{\mu \mathrm{B}\, \Delta t}{J} \qquad (1)$$

Al continuar esto el extremo superior del vector **J** se moverá en torno a la circunferencia con celeridad angular constante ω_p:

$$\omega_p = \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{\mu B}{J} \qquad (2)$$

Ésta es la velocidad de precesión del eje de giro (spin). Adviértase que es la misma para cualquier ángulo de inclinación; el sen θ se ha simplificado.

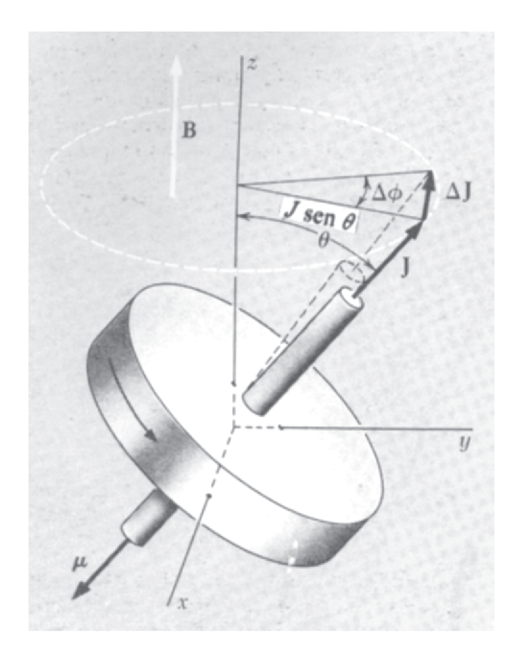


Fig. D.1 La precesión de una peonza magnética en un campo externo. El momento cinético de giro **J** y el momento magnético dipolar μ están en sentidos contrarios, como debe ser para un rotor con carga negativa.

Para el electrón μ/J tiene el valor $1{,}759 \cdot 10^{-9}$ $s^{-1} \cdot T$. En un campo de 10^{-4} tesla el vector spin precesa a $1{,}759 \cdot 10^{7}$ rad/s, o $2{,}800 \cdot 10^{6}$ revoluciones/s. El protón tiene exactamente el mismo momento cinético de spin intrínseco que el electrón, $h/4\pi$, pero el momento magnético asociado es menor. Esto es lo que debía esperarse ya que la masa del protón es 1836 veces la masa del electrón. Como en el caso del momento cinético orbital (Ec. 23 en el Capítulo 11) el momento magnético de una partícula elemental con spin debe ser inversamente proporcional a su masa, siendo lo demás igual. El momento magnético del protón es $1{,}411 \cdot 10^{-26}$ $A \cdot m^2$, casi 660 veces menor que el momento del electrón, lo que demuestra que el protón de cierta manera es una partícula compuesta. En un campo de 10^{-4} tesla el spin del protón precesa a 4258 revoluciones/s. Casi el 40 por cien de los núcleos atómicos estables tienen momento cinético intrínseco y momentos dipolares magnéticos asociados.

Podemos detectar la precesión de los momentos magnéticos dipolares por su influencia en un circuito eléctrico. Imaginemos un protón en un campo magnético B, con su eje de spin perpendicular al campo, y rodeado por una pequeña bobina de hilo, como en la Fig. D.2. La precesión del protón causa cierto flujo alterno a través de la bobina como lo haría la rotación de una pequeña barra magnética. En la bobina se inducirá un voltaje alterno a la frecuencia de la precesión. Como podía esperarse, el voltaje inducido por un solo protón sería demasiado débil para detectarse. Pero es fácil proporcionar más protones —1 cm^3 de agua contiene unos $7 \cdot 10^{22}$ protones, y todos ellos precesan a la misma frecuencia. Desgraciadamente no todos ellos están orientados en la misma dirección en el mismo instante. En realidad, sus ejes de spin y los momentos magnéticos estarán distribuidos tan uniformemente, sobre todas las posibles direcciones, que sus campos casi se anularán uno a otro. Pero no completamente si introducimos otro paso. Si aplicamos un intenso campo magnético B al agua, durante varios segundos se desarrollará un ligero exceso de momentos protónicos orientados en la dirección **B**, la dirección energéticamente favorable. La fracción en exceso, en orden de magnitud, será $\mu B/kT$, como en el paramagnetismo ordinario. Puede ser no más de uno por un millón, pero si estos momentos que no se anulan, ahora originan precesión en nuestra bobina, inducirán una señal observable. Un método simple para observar la precesión del spin nuclear en campos débiles tal como el campo terrestre, se describe en la Fig. D.3. Se han usado muchos otros esquemas para observar la precesión del spin de electrones y de núcleos. Generalmente interviene una combinación de campo magnético estacionario y campos magnéticos oscilantes con frecuencias en las proximidades de ω_p. Para spins electrónicos (*resonancia paramagnética electrónica,* o RPE) las frecuencias son típicamente de varios millares de megahertz, mientras que para los spins nucleares (*resonancia magnética nuclear,* o RMN) son de varias decenas de megahertz. La frecuencia exacta de precesión, o resonancia, en un campo aplicado dado puede desplazarse ligeramente por interacciones magnéticas dentro de una molécula. Esto ha hecho a la RMN,

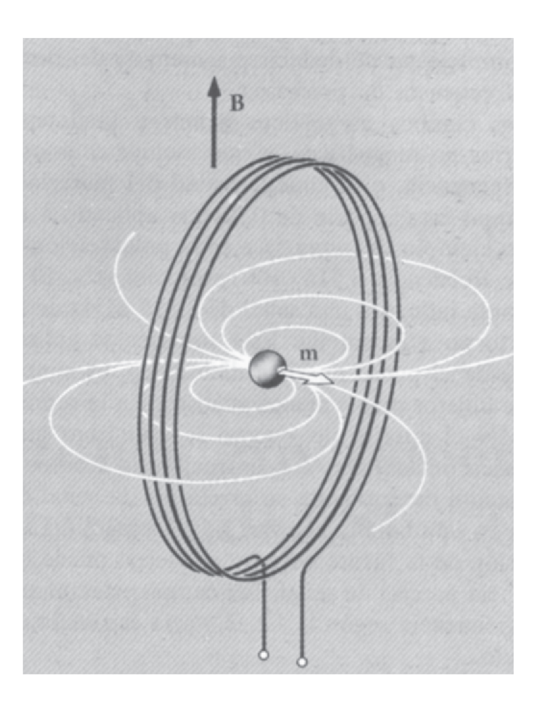


Fig. D.2 Un momento dipolar magnético que precesa en el centro de una bobina, da lugar a un cambio periódico en el flujo a través de tal bobina, induciendo una fuerza electromotriz alterna en la misma. Adviértase que el flujo debido al dipolo **m** que enlaza la bobina es el que forma bucles en torno su parte exterior. Véase el Problema D.1.

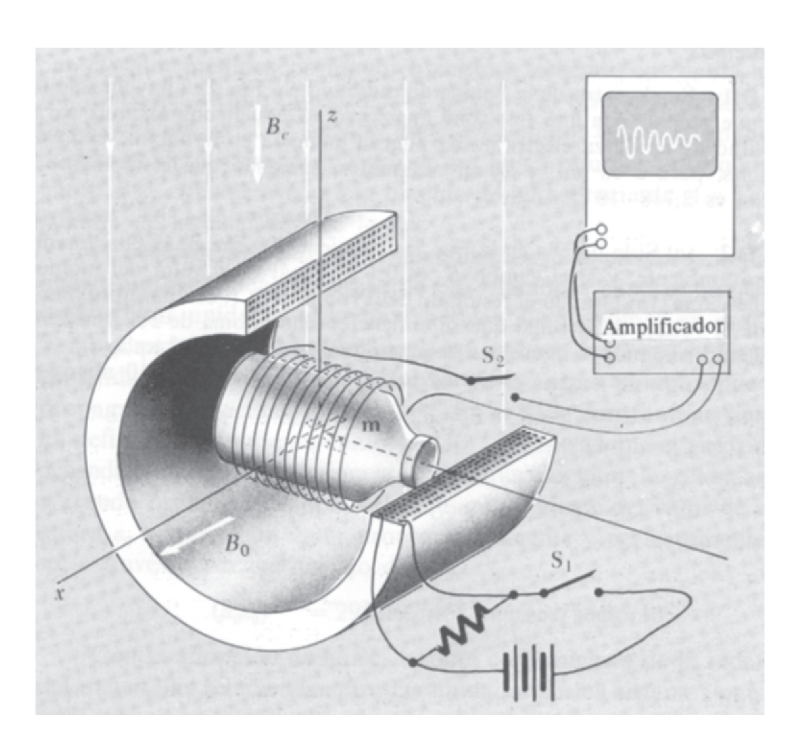


Fig. D.3 Aparato para la observación de la precesión del spin del protón en el campo terrestre $\boldsymbol{B}_0$. Una botella de agua está rodeada por dos bobinas perpendiculares. Con el interruptor S_2 abierto y con el interruptor S_1 cerrado, el solenoide grande crea un campo magnético intenso $\boldsymbol{B}_0$. Como en el paramagnetismo ordinario (Sección 11.6) la energía disminuye si los dipolos apuntan en la dirección del campo, pues la agitación térmica produce desorden. Nuestros dipolos ahora son los protones (núcleos de hidrógeno) en las moléculas de agua. Cuando de alcanza equilibrio térmico, que en este caso tarda varios segundos, la imanación es la que se obtendría alineando con el campo magnético la pequeña fracción $\mu B_0/kT$ de todos los momentos protónicos. Ahora desconectamos el intenso campo $\boldsymbol{B}_0$ y cerramos el interruptor S_2 para conectar la bobina en torno la botella al amplificador. El momento magnético **m** ahora precesa en el plano *x-y* en torno al campo magnético, relativamente débil, que queda $\boldsymbol{B}_e$, con frecuencia de precesión dada por la Ec. 2. La componente *y* alterna del vector **m** giratorio induce un voltaje alterno en la bobina que podrá ampliarse y observarse. De su frecuencia, puede determinarse $\boldsymbol{B}_e$ de manera muy precisa. Esta misma señal desaparecerá en unos pocos segundos, al destruir la imanación la agitación térmica, después de desconectar el intenso campo $\boldsymbol{B}_0$. Los geofísicos utilizan magnetómetros de resonancia magnética, de éste o de otros tipos, para explorar el campo magnético terrestre e incluso los arqueólogos para localizar artefactos enterrados.

en particular, útil en química. La posición de un protón en una molécula compleja puede deducirse a menudo del pequeño desplazamiento de su frecuencia de precesión.

Los campos magnéticos penetran fácilmente en los materiales ordinarios no magnéticos, y esto incluye campos magnéticos alternos si su frecuencia, o la conductividad del material, no es muy grande. Un campo estacionario de 0,2 tesla aplicado a la botella de agua de nuestro ejemplo ocasionaría a toda polarización protónica una precesión de frecuencia $8{,}516 \cdot 10^6$ revoluciones/s. El campo del momento precesante induciría una señal de 8,516 MHz de frecuencia en la bobina en torno a la botella. Esto también se aplica al cuerpo humano, que, desde el punto de vista dieléctrico, es simplemente una agrupación de objetos más o menos acuosos. En la representación por *imagen* en RMN el interior del cuerpo se vislumbra mediante la resonancia magnética nuclear. La concentración de átomos de hidrógeno en una localización determinada se revela por la señal de radiofrecuencia inducida en una bobina exterior por la precesión de los protones. La localización de la fuente dentro del cuerpo puede inferirse a partir de la frecuencia precisa de señal si el campo estacionario B, el cual determina la frecuencia según la Ec. 2, varía espacialmente con un gradiente conocido.

Problemas

D.1 En el centro de la bobina de radio a de la Fig. D.2 hay un solo protón, que precesa con una velocidad angular ω_p. Deducir una fórmula para la amplitud de la fuerza electromotriz alterna inducida en la bobina, expresada en volts, para a en cm, y ω_p en radianes/s, sabiendo que el momento del protón es $2{,}718 \cdot 10^{-26}$ A · m².

Solución: $6{,}84 \cdot 10^{-30}\ \omega/a$ volts

D.2 (*a*) Si la botella en la Fig. E.2 contiene 200 cm³ de H_2O a la temperatura ambiente, y si el campo B_0 es 0,1 T, ¿cuál es el valor del momento magnético **m**? (*b*) Usando el resultado del Problema D.1, estimar aproximadamente el voltaje de la señal que se obtiene en una bobina de 500 vueltas y 4 cm de radio cuando la intensidad del campo B_e es de $0{,}4 \cdot 10^{-4}$ tesla.

Solución (*a*): $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ A · m²; (*b*) 10 microvolts.

E

Relaciones exactas entre las unidades SI y CGS

En 1983, la Conferencia General de Pesas y Medidas definió nuevamente el metro como la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299 792 458 segundos. El segundo se define en función de ciertas frecuencias atómicas de cierto modo que aquí no nos importa. El entero de nueve dígitos se eligió para que el valor asignado a c concuerde con el valor medido con mayor precisión, teniendo en cuenta la incertidumbre del último dígito. En lo sucesivo la celeridad de la luz será, por *definición,* de 299 792 458 metros/segundo. Un experimento en el cual se mide el tiempo de paso de un pulso luminoso del punto A al punto B se considera como la medida de la distancia de A a B, no una medida de la celeridad de la luz.

A pesar de que esto no tenga consecuencias prácticas inmediatas, aporta una significación grata de las relaciones exactas que conectan las distintas unidades electromagnéticas. Como vimos en el Capítulo 9, las ecuaciones de Maxwell para los campos en el vacío, formuladas en unidades SI, tienen una solución en la forma de una onda que se propaga con velocidad $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$. En el SI la constante μ_0 siempre se ha definido exactamente como $4\pi \cdot 10^{-7}$, mientras que el valor de ε_0 ha dependido del valor experimental determinado para la celeridad de la luz, todo refinamiento del cual requiere un ajuste del valor de ε_0. Pero ahora ε_0 adquiere un valor propio permanente y perfectamente preciso, a través del requerimiento de que

$$(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} = 299\,792\,458 \text{ metros/segundo} \qquad (1)$$

Con la adopción de la Ec. 1 como consecuencia de la redefinición del metro, las relaciones entre las unidades en los sistemas que hemos usado pueden establecerse con precisión ilimitada. Estas relaciones

vienen en la Tabla E.1 para las magnitudes principales con las que tratamos. En la Tabla, el símbolo «3» representa el decimal preciso 2,99792458; el símbolo «9» representa el número de 17 dígitos 8,9875517873681764, cuadrado de «3».

Los números exactos no son interesantes y para nuestro trabajo innecesarios. El que «3» sea tan próximo a 3 es una ligera casualidad, una consecuencia accidental de la longitud del metro y el segundo. Cuando es buena una precisión del 0,1 por cien solamente necesitamos recordar que «300 volts es un statvolt» y «$3 \cdot 10^9$ ues es un coulomb». Mucho menos preciso, pero aún dentro del 12 por cien, la capacidad de 1 cm es equivalente a 1 picofarad.

Una constante SI importante es $(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$, la cual es una resistencia en ohms. Su valor preciso está al final de la Tabla. Se tiende a recordarla, e incluso se refiere a ella, como «377 ohms». Es la relación de la intensidad del campo eléctrico E, en volts/metro en una onda plana en el vacío, a la intensidad, en amperes/metro, del campo magnético acompañante H. Por esta razón la constante $(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ a veces se denota por Z_0 y se llama, tal vez crípticamente, *impedancia del vacío*. En una onda plana en el vacío en la cual E_{ef} es el valor eficaz del campo eléctrico en volts/metro, la densidad media de potencia transmitida, en watts/m^2, es E_{ef}^2/Z_0.

La relación lógica de las unidades SI eléctricas una a otra toma ahora un aspecto ligeramente diferente. Antes de la redefinición del metro se acostumbraba a designar una de las unidades eléctricas como *primaria,* en este sentido: Su preciso valor, al menos en principio, podría establecerse por un procedimiento en el que intervenían unidades SI mecánicas y métricas solamente. Así el ampere, al cual por lo general se le ha asignado este papel, se definía en función de la fuerza en newtons entre corrientes paralelas, usando la relación Ec. 7 del Capítulo 6. Esto era posible a causa de que la constante μ_0 en esta relación tenía el valor preciso $4\pi \cdot 10^{-7}$. Luego, con el ampere como unidad eléctrica primaria, se definía el coulomb precisamente como 1 ampere · segundo. El mismo coulomb, a causa de la presencia de ε_0 en la ley de Coulomb, no fue elegible para servir de unidad primaria. Ahora con ε_0 al igual que μ_0 con un valor numérico asignado exacto, el sistema puede basarse con cualquier unidad como punto de partida. Todas las magnitudes, en este sentido, tienen la misma base, y la elección de la unidad primaria pierde su importancia. Aunque nunca ha sido una cuestión interesante, ahora puede relegarse a la historia.

Tabla E.1

	En unidades SI		En unidades CGS
Energía	1 joule	=	10^7 erg
Fuerza	1 newton	=	10^5 dyne
Carga eléctrica	1 coulomb	=	«3» × 10^9 ues
Corriente eléctrica	1 ampere	=	«3» × 10^9 ues/sec
Potencial eléctrico	«3» × 10^2 volts	=	1 statvolt (1 erg/ues)
Campo eléctrico *E*	«3» × 10^4 volts/m	=	1 statvolt/cm (1 dina/ues)
Campo magnético *B*	1 tesla	=	10^4 gauss (10^4 dinas/ues)
Campo magnético *H*	1 ampere/m	=	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted
Capacidad	1 farad	=	«9» × 10^{11} cm
Inducción	1 henry	=	(«9» × 10^{11})$^{-1}$ s^2/cm
Resistencia	1 ohm	=	(«9» × 10^{11})$^{-1}$ s/cm

$\mu_0 = 4\pi \times 10^7$ ohm · s/m $\varepsilon_0 = (4\pi \times$ «9» $\times 10^9)^{-1}$ s/ohm · m
$(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 4\pi \times$ «3» ohms = 376,73 · · · ohms
«3» = 2,9979245800000 · · · «9» = «3» × «3»

Índice alfabético

D

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

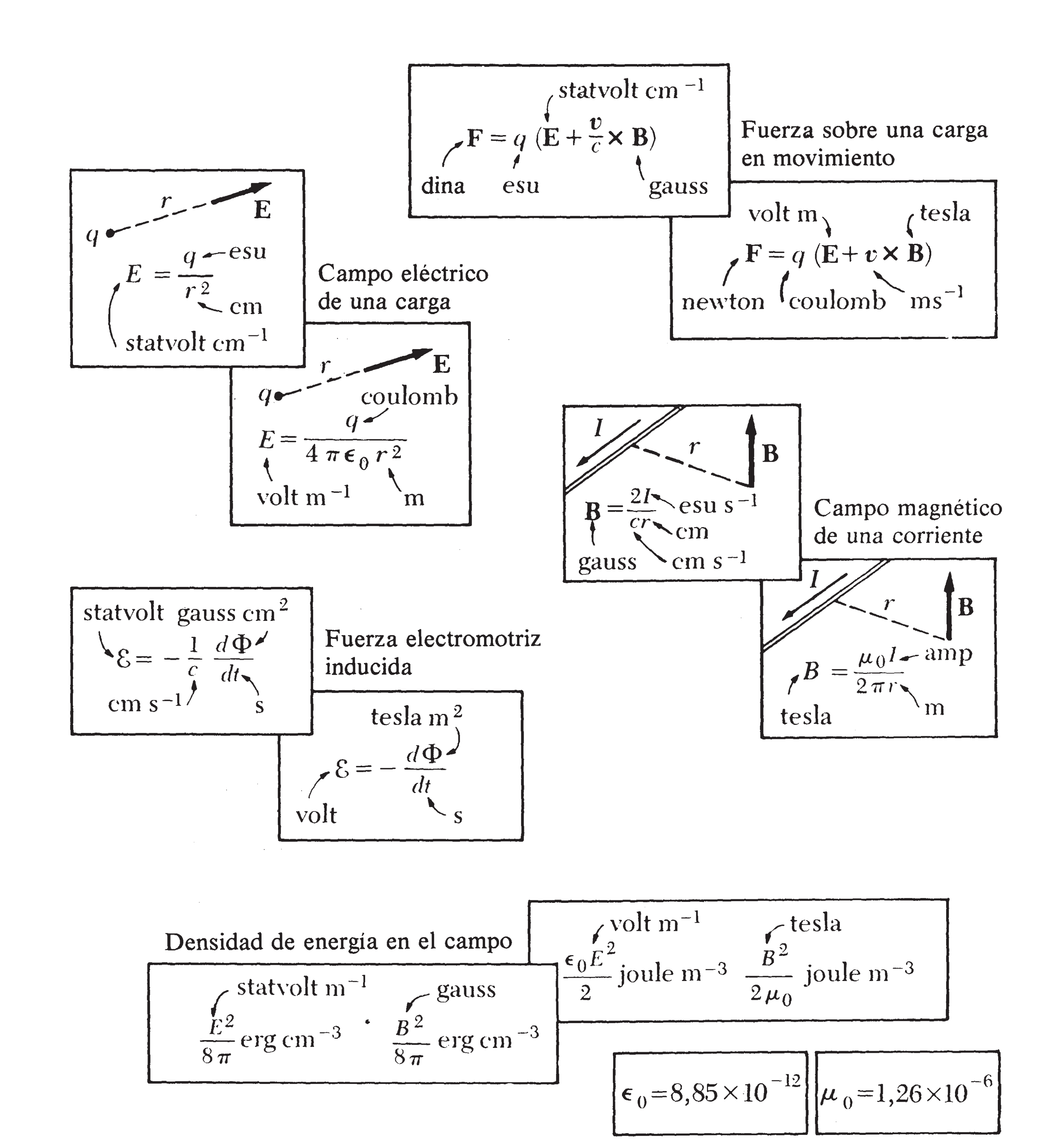
U

V

W

		Unidades CGS	Unidades SI
Distancia	s	centímetro	metro
Masa	m	gramo	kilogramo
Tiempo	t	segundo	segundo
Velocidad	v	cm s^{-1}	m s^{-1}
Cantidad de movimiento	p	gm cm s^{-1}	kg m s^{-1}
Fuerza	F	dina (gm cm s^{-2})	newton (kg m s^{-2})
Energía, trabajo	W	erg (dina cm)	joule (newton m)
Potencia	P	erg s^{-1}	watt (joule s^{-1})
Carga eléctrica	q	esu	coulomb (amp s)
Densidad de carga	ρ	esu cm^{-3}	coulomb m^{-3}
Potencial eléctrico	φ	statvolt (erg esu^{-1})	volt (joule $coulomb^{-1}$)
Campo eléctrico	E	statvolt cm^{-1} (dina esu^{-1})	volt m^{-1} (newton $coulomb^{-1}$)
Corriente eléctrica	I	esu s^{-1}	ampere (coulomb s^{-1})
Densidad de corriente	J	esu s^{-1} cm^{-2}	amp m^{-2}
Resistencia	R	cm^{-1} s	ohm (volt amp^{-1})
Resistividad	ρ	s	ohm m
Campo magnético	B	gauss (dina esu^{-1})	tesla (newton m^{-1} amp^{-1})
Campo magnético	H	oersted (dina esu^{-1})	amp m^{-1}
Flujo magnético	Φ	gauss cm^2	weber (tesla m^2)
Capacitancia	C	cm	farad (ohm^{-1} s)
Inductancia	L, M	cm^{-1} s^2	henry (ohm s)

1 coulomb = 3×10^9 esu	1 ampere = 3×10^9 esu s^{-1}
300 volts = 1 statvolt	3×10^4 volt m^{-1} = 1 statvolt cm^{-1}
1 tesla = 10^4 gauss	1 ohm = $1{,}113 \times 10^{-12}$ cm^{-1} s
1 farad = 9×10^{11} cm	1 henry = $1{,}113 \times 10^{-12}$ cm^{-1} s^2



statvolt cm $^{-1}$
$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \frac{v}{c} \times \mathbf{B})$
dina
esu
gauss
Fuerza sobre una carga en movimiento
volt m
tesla
$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B})$
newton
coulomb
ms $^{-1}$
r
E
q
$E = \frac{q}{r^2}$
esu
cm
statvolt cm $^{-1}$
Campo eléctrico de una carga
coulomb
$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
volt m $^{-1}$
m
I
B
$\mathbf{B} = \frac{2I}{cr}$
esu s $^{-1}$
cm
cm s $^{-1}$
gauss
Campo magnético de una corriente
$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
amp
tesla
statvolt gauss cm ^{2}
$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$
cm s $^{-1}$
s
Fuerza electromotriz inducida
tesla m ^{2}
$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$
volt
Densidad de energía en el campo
volt m $^{-1}$
$\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ joule m $^{-3}$
$\frac{B^2}{2\mu_0}$ joule m $^{-3}$
statvolt m $^{-1}$
gauss
$\frac{E^2}{8\pi}$ erg cm $^{-3}$
$\frac{B^2}{8\pi}$ erg cm $^{-3}$
$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$
$\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}$